

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	5
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ	15
1. Γενικά	15
<i>Επιφάνεια</i>	15
<i>Ευθριογενείς επιφάνειες</i>	15
<i>Επιφάνειες δευτέρου βαθμού</i>	16
2. Μερικές επιφάνειες δευτέρου βαθμού στην κανονική μορφή τους	17
<i>Σφαίρα</i>	17
<i>Ελλειψοειδές</i>	18
<i>Ελλειπτικό παραβολοειδές</i>	19
<i>Υπερβολικό παραβολοειδές</i>	21
<i>Ελλειπτικός κώνος</i>	22
<i>Μονόχωνο υπερβολοειδές</i>	24
<i>Δίχωνο υπερβολοειδές</i>	26
<i>Παραβολικός κύλινδρος</i>	27
<i>Ελλειπτικός κύλινδρος</i>	28
<i>Υπερβολικός κύλινδρος</i>	29
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	30
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ –	
ΟΡΙΑ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ	35
1. Τοπολογικές έννοιες	35
<i>Ταξινόμηση των σημείων του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^2$</i>	37
<i>Ανοικτά και κλειστά σύνολα</i>	38
<i>Ακολουθίες σημείων</i>	40

2. Ορισμός των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	41
3. Ισοσταθμικές Καμπύλες – Επιφάνειες	46
4. Όρια και συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	52
Όρια συναρτήσεων	52
Επάλληλα ή διαδοχικά όρια	55
Συνέχεια συναρτήσεων	58
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	61
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	68

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ 71

1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξεως	71
Υπολογισμός των μερικών παραγώγων	74
Ιδιότητες των μερικών παραγώγων	77
Γεωμετρική ερμηνεία των μερικών παραγώγων	78
Εφαπτόμενα διανύσματα σε επιφάνεια	79
Το διάνυσμα κλίσεως μιας βαθμωτής συναρτήσεως	80
2. Μερικές παράγωγοι ανωτέρας τάξεως	80
3. Συναρτησιακοί πίνακες – συναρτησιακές ορίζουσες	85
4. Συναρτησιακή εξάρτηση	87
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	89
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	95

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΛΥΣΩΤΗ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ – ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 99

1. Αλυσωτή παραγωγή	99
Μετασχηματισμοί των εξισώσεων του Laplace	107
2. Διαφορίσιμες συναρτήσεις – Ολικό διαφορικό	110
Διαφορίσιμες συναρτήσεις	110
Ολικό διαφορικό	112
Σφάλματα	115
Ιδιότητες του ολικού διαφορικού	117
Διαφορικά ανωτέρας τάξεως	117
3. Ομογενείς συναρτήσεις	119
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	12
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	140

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ	145
1. Ορισμός της παραγώγου κατά κατεύθυνση	145
2. Υπολογισμός της παραγώγου κατά κατεύθυνση και ερμηνεία αυτής	147
<i>Ιδιότητες</i>	155
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	160
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	171

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ – ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	175
1. Πλεγμένες συναρτήσεις	175
<i>Γενικά</i>	175
<i>Θεωρήματα υπέρξεως πλεγμένων συναρτήσεων</i>	178
<i>Συστήματα πλεγμένων συναρτήσεων</i>	185
<i>Αντιστροφή συστήματος</i>	191
2. Εφαπτόμενο επίπεδο	195
<i>Ευθεία κάθετη σε επιφάνεια</i>	198
<i>Εφαπτομένη ευθεία καμπύλης η οποία δίνεται ως τομή δύο επιφανειών</i>	199
<i>Γεωμετρική ερμηνεία του ολικού διαφορικού</i>	199
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	203
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	214

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ TAYLOR – ΑΚΡΟΤΑΤΑ	219
1. Τύπος του Taylor	219
2. Ελεύθερα ακρότατα	224
<i>Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών</i>	224
<i>Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών</i>	235
<i>Εύρεση ολικών ακροτάτων</i>	239
3. Δευσμενμένα ακρότατα – Πολλαπλασιαστές του Lagrange	241
<i>Δεσμμενμένα ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών</i>	242
<i>Δεσμμενμένα ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών</i>	245
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	257
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	272

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΔΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	277
1. Ορισμός του διπλού ολοκληρώματος	277
2. Γεωμετρική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος	279

Όγκος	279
Εμβαδόν	281
3. Ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων	281
4. Υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος	283
5. Αλλαγή μεταβλητών σε διπλά ολοκληρώματα	292
Μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες	296
6. Εφαρμογές του διπλού ολοκληρώματος	302
7. Γενικευμένα διπλά ολοκληρώματα	306
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	308
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	327

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΤΡΙΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 333

1. Ορισμός του τριπλού ολοκληρώματος	333
2. Ιδιότητες των τριπλών ολοκληρωμάτων	335
3. Υπολογισμός του τριπλού ολοκληρώματος	336
4. Εφαρμογές του τριπλού ολοκληρώματος	342
5. Αλλαγή μεταβλητών σε τριπλά ολοκληρώματα	344
Μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες	345
Μετασχηματισμός σε σφαιρικές συντεταγμένες	347
6. Γενικευμένα τριπλά ολοκληρώματα	349
Κριτήριο συγκρίσεως των γενικευμένων ολοκληρωμάτων	351
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	352
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	365

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 369

1. Γενικά	369
2. Διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής	372
3. Παράγωγος διανυσματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής	375
Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου μιας διανυσματικής συναρτήσεως	376
Κίνηση ενός υλικού σημείου	378
Κανόνες παραγωγίσεως	379
4. Διαφορικό μιας διανυσματικής συναρτήσεως	381
5. Ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων	382
α) Ορισμένο ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως	382
β) Αόριστο ολοκλήρωμα διανυσματικής συναρτήσεως	383
6. Διανυσματικές συναρτήσεις με περισσότερες μεταβλητές	384
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	386
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	395

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ	399
1. Γενικά	399
<i>Εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης</i>	402
2. Καμπυλότητα, στρέψη. Τύποι των Frenet–Serret	404
<i>Καμπυλότητα</i>	404
<i>Τρίεδρο του Frenet</i>	406
<i>Στρέψη και τύποι των Frenet–Serret</i>	409
3. Εγγύτατο, κάθετο και ευθειοποιούν επίπεδο	412
<i>Εξίσωση εγγυτάτου επιπέδου</i>	413
4. Υπολογισμός της καμπυλότητας μιας καμπύλης, αν η καμπύλη δίνεται στη μορφή $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$	416
5. Υπολογισμός της στρέψεως αν η καμπύλη δίνεται στη μορφή $\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}$	418
6. Υπολογισμός της στρέψεως σ αν η καμπύλη C δίνεται στη μορφή $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$	420
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	421
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	435
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΒΑΘΜΩΤΑ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ	437
1. Γενικά περί πεδίων – Διανυσματικές γραμμές	437
<i>Διανυσματικές γραμμές</i>	438
<i>Διαφορικές εξισώσεις διανυσματικών γραμμών</i>	438
2. Κλίση – Απόκλιση – Περιστροφή	440
<i>Σχέσεις μεταξύ των grad, div και rot</i>	443
3. Συντηρητικά και σωληνοειδή πεδία	450
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	456
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	471
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	473
1. Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους	474
<i>Ορισμός και υπολογισμός αυτού</i>	474
<i>Ιδιότητες του επικαμπυλίου ολοκληρώματος α' είδους</i>	478
<i>Εφαρμογές επικαμπυλίου ολοκληρώματος α' είδους</i>	480
α) Κέντρο μάζας ενός υλικού τόξου	480
β) Ροπές αδρανείας ενός υλικού τόξου	480
2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα β' είδους	482
<i>Ορισμός και υπολογισμός αυτού</i>	482
<i>Εφαρμογές επικαμπυλίου ολοκληρώματος β' είδους</i>	488
α) Έργο παραγόμενο από δοθείσα δύναμη	488

<i>β) Κυκλοφορία και ροή ενός διανυσματικού πεδίου που περιγράφει την κίνηση ενός ρευστού</i>	492
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	496
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	512

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14: ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ GREEN 515

1. Απόδειξη του Θεωρήματος του Green	515
2. Υπολογισμός εμβαδού επίπεδης επιφάνειας	520
3. Το Θεώρημα του Green για πολλαπλά συνεκτικούς τύπους	522
4. Εφαρμογές του Θεωρήματος του Green	528
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	533
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	552

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ 555

1. Επικαμπύλια ολοκληρώματα στο επίπεδο ανεξάρτητα του δρόμου ολοκληρώσεως	555
2. Επικαμπύλια ολοκληρώματα ανεξάρτητα του δρόμου ολοκληρώσεως στο χώρο	566
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	568
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	582

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16: ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ 585

1. Παραμετρικές εξισώσεις επιφανειών – Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	585
2. Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια	595
3. Διαφορικό εμβαδού – Εμβαδόν επιφάνειας – Θεμελιώδη ποσά επιφάνειας 1 ^{ης} τάξεως	602
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	612
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	624

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17: ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ 627

1. Επιφανειακά ολοκληρώματα α' είδους	627
Υπολογισμός των επιφανειακών ολοκληρωμάτων α' είδους	629
2. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων α' είδους	634
3. Επιφανειακά ολοκληρώματα β' είδους	637

<i>Επιφανειακό ολοκλήρωμα ή ροή διανυσματικού πεδίου $F(x,y,z)$</i>	643
4. Εφαρμογές επιφανειακών ολοκληρωμάτων β' είδους	650
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	653
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	670

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18: ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ GAUSS Ή ΤΗΣ ΑΠΟΚΛΙΣΕΩΣ 673

1. Το θεώρημα του Gauss για τόπους απλά συνεκτικούς	673
2. Το θεώρημα του Gauss για τόπους πολλαπλά συνεκτικούς	682
3. Ιδιότητες σωληνοειδών πεδίων	685
4. Εφαρμογές του θεωρήματος του Gauss	687
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	689
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	718

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19: ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ STOKES 723

1. Τύπος του Stokes και πορίσματα αυτού	723
2. Εφαρμογές του τύπου του Stokes	732
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	734
ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ	748

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 751

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΩΝ 755