

1	Σύνολα-Σχέσεις	5
1.1	Εισαγωγή	5
1.2	Η έννοια του συνόλου	5
1.3	Ισότητα, εγκλεισμός και συγκρισιμότητα συνόλων	8
1.4	Πράξεις με σύνολα	11
1.5	Η μέθοδος των πινάκων συμμετοχής	14
1.6	Διαμερισμός ενός συνόλου αναφοράς σε διαζευκτά υποσύνολα	16
1.7	Ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου	17
1.8	Καρτεσιανό γινόμενο	20
1.9	Διμελείς σχέσεις	22
1.10	Διμελείς σχέσεις σε ένα σύνολο (σχέσεις ως γραφήματα)	22
2	Στοιχεία Λογικής	31
2.1	Εισαγωγή	31
2.2	Βασικοί όροι και θεμελιώδεις έννοιες	32
2.3	Προτασιακός λογισμός	39
2.4	Υποθετικές προτάσεις (συνεπαγωγή-ισοδυναμία)	46
2.5	Εγκυρότητα και λογική ισοδυναμία με ταυτολογίες	52
2.6	Κατηγορηματικός λογισμός	56
2.7	Καθολικές και υπαρξιακές προτάσεις	58
3	Το σύστημα των πραγματικών αριθμών	65
3.1	Εισαγωγή	65
3.2	Είδη αριθμών	66
3.3	Δεκαδική και δυαδική παράσταση των πραγματικών αριθμών	71
3.4	Η αλγεβρική δομή των πραγματικών αριθμών	74
3.5	Η απόλυτη τιμή	77
3.6	Ανισότητες	78
3.7	Οικονομικές εφαρμογές ανισοτήτων	80
3.8	Πληρότητα του $\mathbb{R}$	81
4	Συναρτήσεις	87
4.1	Εισαγωγή	87
4.2	Η έννοια της συνάρτησης	87
4.3	Γενίκευση της έννοιας της συνάρτησης	92
4.4	Η έννοια της οικονομικής συνάρτησης	98
4.5	Το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης και οι μετασχηματισμοί του	99

4.6	Πράξεις με πραγματικές συναρτήσεις	103
4.7	Σύνθεση συναρτήσεων	105
4.8	Αντίστροφες συναρτήσεις	110
5	Γραμμικές συναρτήσεις	117
5.1	Εισαγωγή	117
5.2	Βασικά χαρακτηριστικά των γραμμικών συναρτήσεων	118
5.3	Προσδιορισμός της ευθείας	121
5.4	Συστήματα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους	123
5.5	Γραμμικές ανισότητες	129
5.6	Γραμμικές οικονομικές συναρτήσεις	131
6	Πολυωνυμικές, ρητές και συναρτήσεις δύναμης	139
6.1	Εισαγωγή	139
6.2	Τετραγωνικές συναρτήσεις	139
6.3	Προσδιορισμός μιας τετραγωνικής συνάρτησης από τρία σημεία	144
6.4	Σύστημα δύο τετραγωνικών συναρτήσεων	145
6.5	Κυβικές συναρτήσεις	146
6.6	Γενικά πολώνυμα	150
6.7	Ρητές συναρτήσεις	154
6.8	Συναρτήσεις δύναμης	155
7	Εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις	159
7.1	Εισαγωγή	159
7.2	Οι συναρτήσεις ανατοκισμού, απόσβεσης και πληθυσμού	160
7.3	Φυσικές εκθετικές συναρτήσεις	165
7.4	Λογαριθμικές συναρτήσεις	170
7.5	Φυσικές λογαριθμικές συναρτήσεις	173
7.6	Προσδιορισμός φυσικών εκθετικών και φυσικών λογαριθμικών συναρτήσεων από ένα κατάλληλο αριθμό σημείων	174
7.7	Οικονομικές εφαρμογές των φυσικών εκθετικών συναρτήσεων	176
8	Περιοδικές συναρτήσεις	185
8.1	Εισαγωγή	185
8.2	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	186
8.3	Γραφήματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων	190
8.4	Τριγωνομετρικές ταυτότητες	193
8.5	Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί τριγωνομετρικών συναρτήσεων	194
9	Ακολουθίες-Όρια-Σειρές	201
9.1	Εισαγωγή	201
9.2	Ορισμός της ακολουθίας	202
9.3	Αριθμητική και γεωμετρική πρόοδος	203
9.4	Αθροίσματα των n πρώτων όρων γεωμετρικής και αριθμητικής προόδου	205
9.5	Όριο μιας ακολουθίας	209
9.6	Σειρές	213
9.7	Πραγματικοί αριθμοί και συναρτήσεις ως σειρές	217

10 Όριο και συνέχεια συναρτήσεων	223
10.1 Εισαγωγή	223
10.2 Έννοια του ορίου μιας συνάρτησης	223
10.3 Υπολογισμός ορίων	226
10.4 Όριο προς το άπειρο και άπειρο όριο (ασύμπτωτες)	230
10.5 Συνέχεια συναρτήσεων	232
10.6 Ασυνεχείς οικονομικές συναρτήσεις	236
10.7 Θεμελιώδη θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων	239
11 Παράγωγος-Ελαστικότητα	243
11.1 Εισαγωγή	243
11.2 Ο μέσος και ο οριακός ρυθμός μεταβολής	244
11.3 Η παράγωγος	247
11.4 Παραγωγισιμότητα	251
11.5 Η παράγωγος είναι τελικά πηλίκο δύο διαφορικών; Μια ιστορική διαδρομή	255
11.6 Ελαστικότητα συναρτήσεων	258
12 Παραγωγή συναρτήσεων	267
12.1 Εισαγωγή	267
12.2 Αριθμητική παραγωγή	268
12.3 Κανόνες παραγωγής	268
12.4 Παράγωγοι εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων	274
12.5 Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων	281
12.6 Παράγωγοι ανώτερης τάξης	282
13 Εφαρμογές των παραγώγων	287
13.1 Εισαγωγή	287
13.2 Ο ποσοστιαίος ρυθμός μεταβολής και οι οικονομικές εφαρμογές του	287
13.3 Απροσδιόριστοι μορφές-Κανόνας L'Hôpital	290
13.4 Γραμμικές προσεγγίσεις	292
13.5 Πολυωνυμικές προσεγγίσεις	299
13.6 Το θεώρημα Taylor	301
13.7 Θεμελιώδη θεωρήματα του διαφορικού λογισμού	302
14 Μελέτη και βελτιστοποίηση συναρτήσεων μιας μεταβλητής	307
14.1 Εισαγωγή	307
14.2 Αύξουσες, φθίνουσες συναρτήσεις	307
14.3 Βασικές έννοιες βελτιστοποίησης	308
14.4 Τοπικά βέλτιστα σημεία και σημεία καμπής με οριζόντια εφαπτόμενη	310
14.5 Σφαιρικά βέλτιστα σημεία	316
14.6 Κυρτότητα, κοιλότητα, σημεία καμπής και η οικονομική τους ερμηνεία	319
15 Μελέτη και βελτιστοποίηση οικονομικών συναρτήσεων	329
15.1 Εισαγωγή	329
15.2 Σχέσεις μεταξύ ολικών, μέσων, και οριακών οικονομικών συναρτήσεων και των ελαστικοτήτων τους	329
15.3 Συναρτήσεις παραγωγής και κόστους	332
15.4 Συναρτήσεις εσόδων	337
15.5 Μεγιστοποίηση κερδών και νεκρά σημεία	340

15.6	Μεγιστοποίηση εσόδων από φορολογία	345
15.7	Βελτιστοποίηση σε σχέση με το χρόνο	350
15.8	Βελτιστοποίηση σε κατασκευαστικά προβλήματα	352
16	Ολοκληρώματα	359
16.1	Εισαγωγή	359
16.2	Το αόριστο ολοκλήρωμα	360
16.3	Το ορισμένο ολοκλήρωμα	365
16.4	Το εμβαδόν ως ορισμένο ολοκλήρωμα	368
16.5	Άπειρα διαστήματα ολοκλήρωσης (Μη γνήσια ή γενικευμένα ολοκληρώματα)	375
17	Μέθοδοι ολοκλήρωσης	383
17.1	Εισαγωγή	383
17.2	Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	383
17.3	Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες	386
17.4	Η μέθοδος της δοκιμής και σφάλματος (trial and error method)	393
17.5	Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων. Η μέθοδος των μερικών κλασμάτων	395
18	Οικονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων	401
18.1	Εισαγωγή	401
18.2	Ανισοκατανομή του εθνικού εισοδήματος	401
18.3	Συναρτήσεις εθνικού εισοδήματος, κατανάλωσης και επένδυσης	404
18.4	Μεγιστοποίηση κερδών ως προς το χρόνο	406
18.5	Τα πλεονάσματα παραγωγού και καταναλωτή	408
18.6	Μέση τιμή μιας συνάρτησης	414
18.7	Μια πρώτη επαφή με τις διαφορικές εξισώσεις	416
19	Συστήματα γραμμικών εξισώσεων	427
19.1	Εισαγωγή	427
19.2	Οικονομικές εφαρμογές γραμμικών συστημάτων	430
19.3	Οι αλγόριθμοι απαλοιφής Gauss και Gauss-Jordan	435
19.4	Τετραγωνικά (προσδιορισμένα) συστήματα	442
19.5	Υπερπροσδιορισμένα και υποπροσδιορισμένα συστήματα	447
19.6	Συνοπτικά αποτελέσματα	451
19.7	Ομογενή συστήματα	452
20	Διανύσματα	457
20.1	Εισαγωγή	457
20.2	Πρόσθεση, βαθμωτός πολλαπλασιασμός και γραμμικός συνδυασμός	458
20.3	Γραμμική ανεξαρτησία	466
20.4	Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	470
20.5	Μη Ευκλείδειες γεωμετρίες	475
21	Μήτρες και γραμμικοί μετασχηματισμοί	479
21.1	Εισαγωγή	479
21.2	Πρόσθεση και πολλαπλασιασμός επί βαθμωτό	482
21.3	Πολλαπλασιασμός μητρών	484
21.4	Ανάστροφη μήτρας	491
21.5	Βαθμός μήτρας	492

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

21.6 Αντίστροφη μήτρα	494
21.7 Δυνάμεις μητρών και δυναμικά συστήματα	499
22 Η ορίζουσα και το ίχνος μιας μήτρας	507
22.1 Εισαγωγή	507
22.2 Η έννοια της ορίζουσας	507
22.3 Υπολογισμός μιας ορίζουσας	509
22.4 Επίλυση ενός $n \times n$ γραμμικού συστήματος με τη μέθοδο Cramer	514
22.5 Ίχνος μήτρας	515
23 Το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού και η επίλυση με την μέθοδο simplex	517
23.1 Εισαγωγή	517
23.2 Εισαγωγή στο πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού	518
23.3 Τυπικές εφαρμογές του γραμμικού προγραμματισμού	521
23.4 Γεωμετρική επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού	528
23.5 Η μέθοδος simplex	533
24 Έναρξη και σύγκλιση της μεθόδου simplex	547
24.1 Εισαγωγή	547
24.2 Εύρεση μιας πρώτης βασικής εφικτής λύσης	547
25 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και οι παραγωγοί τους	569
25.1 Εισαγωγή	569
25.2 Ορισμός των πολυμεταβλητών συναρτήσεων	569
25.3 Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών	574
25.4 Όρια και συνέχεια των πολυμεταβλητών συναρτήσεων	577
25.5 Παράγωγοι πολυμεταβλητών συναρτήσεων	580
25.6 Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης	583
25.7 Κυρτές και κοίλες πολυμεταβλητές συναρτήσεις	587
26 Εφαρμογές των μερικών παραγώγων	591
26.1 Εισαγωγή	591
26.2 Οικονομικές εφαρμογές των μερικών παραγώγων	591
26.3 Ομογενείς συναρτήσεις	596
26.4 Το εφαπτόμενο επίπεδο και το ολικό διαφορικό	600
26.5 Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων	604
26.6 Πλεγμένες συναρτήσεις και οι παράγωγοι τους	606
27 Βελτιστοποίηση πολυμεταβλητών συναρτήσεων	615
27.1 Εισαγωγή	615
27.2 Βασικές έννοιες βελτιστοποίησης	615
27.3 Μη δεσμευμένη βελτιστοποίηση	617
27.4 Επέκταση σε συναρτήσεις $n > 2$ μεταβλητών	622
27.5 Δεσμευμένη βελτιστοποίηση (εξισωτικοί περιορισμοί)	624
28 Πολλαπλά ολοκληρώματα	641
28.1 Εισαγωγή	641
28.2 Οικονομική ερμηνεία του διπλού ολοκληρώματος	641
28.3 Διπλά ολοκληρώματα και η γεωμετρική τους ερμηνεία	643

28.4 Διπλά ολοκληρώματα ορισμένα σε φραγμένες μη παραλληλόγραμμες περιοχές	649
28.5 Το τριπλό ολοκλήρωμα	656

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A' Ένα αλγοριθμικό πλαίσιο για την κατασκευή του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου	661
B' Από δυνάμεις με φυσικούς εκθέτες σε δυνάμεις με πραγματικούς εκθέτες	667
Γ' Οι εκθετικές συναρτήσεις με βάση το 2 στην επιστήμη των Η/Υ	675

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ