

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	13
----------	----

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ	17
ΣΥΝΟΛΑ – ΣΧΕΣΕΙΣ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	17
1. Η έννοια του συνόλου	17
2. Εγκλεισμός και ισότητα συνόλων	19
3. Παράδοξα της θεωρίας συνόλων	21
4. Πράξεις με σύνολα	22
5. Καρτεσιανό γινόμενο	27
6. Δυαδικές σχέσεις	28
7. Πράξεις με διμελείς σχέσεις	29
8. Διμελείς σχέσεις μέσα σ' ένα σύνολο – Στοιχεία της θεωρίας γραφημάτων	31
9. Είδη δυαδικών σχέσεων σ' ένα σύνολο	38
10. Συναρτήσεις	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ	49
ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ	49
1. Εισαγωγή	49
2. Βασικές αρχές μέτρησης	51
3. Μεταθέσεις – Συνδυασμοί	56
4. Μεταθέσεις – συνδυασμοί σε πολυσύνολα	63
5. Επαναληπτικές διατάξεις – επαναληπτικοί συνδυασμοί	67
6. Διωνυμικοί συντελεστές	71
7. Διωνυμικό θεώρημα	74
8. Αρχή εγκλεισμού – αποκλεισμού	77

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ	89
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	89
1. Εισαγωγή	89
2. Εφαρμογές συστημάτων γραμμικών εξισώσεων	91
3. Οι αλγόριθμοι απαλοιφής Gauss και Gauss - Jordan	96
4. Υπολογιστική πολυπλοκότητα των αλγορίθμων απαλοιφής Gauss και Gauss – Jordan	114
5. Προσδιορισμένα, υποπροσδιορισμένα και υπερπροσδιορισμένα γραμμικά συστήματα	117

6.	Ομογενή συστήματα	125
7.	Πολλά συστήματα με διαφορετικούς σταθερούς όρους b_i	126
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ		129
Ο n – ΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ		129
1.	Εισαγωγή	129
2.	Ο χώρος $V_n(R)$	130
3.	Ο n – διάστατος ευκλείδειος χώρος E_n	144
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ		155
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΗΤΡΩΝ		155
1.	Εισαγωγή	155
2.	Πράξεις με μήτρες	160
3.	Δυνάμεις μητρών	172
4.	Ανάστροφες μητρών	175
5.	Σύνθετες μήτρες	179
6.	Κλιμακωτές μήτρες και βαθμός μήτρας	182
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ		185
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΚΑΙ ΥΠΟΧΩΡΟΙ		185
1.	Εισαγωγή	185
2.	Ορισμός και παραδείγματα διανυσματικών χώρων	186
3.	Διανυσματικοί υποχώροι	189
4.	Ζευγνύοντα σύνολα – Γραμμική εξάρτηση – ανεξαρτησία	192
5.	Πράξεις με διανυσματικούς υποχώρους	198
6.	Βάση και Διάσταση ενός διανυσματικού χώρου	200
7.	Οι τέσσερις θεμελιώδεις υποχώροι μιας μήτρας	208
8.	Βαθμός μήτρας	215
9.	Η δομή του συνόλου λύσεων γραμμικών συστημάτων	217
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ		221
ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΜΗΤΡΕΣ		221
1.	Εισαγωγή	221
2.	Δεξιές και Αριστερές αντίστροφες	221
3.	Αντίστροφη	227
4.	Υπολογισμός της A^{-1}	230
5.	Αντίστροφες και Συστήματα γραμμικών εξισώσεων	238
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΟΓΔΩΟ		241
ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ		241
1.	Εισαγωγή	241
2.	Ορισμός και παραδείγματα	241
3.	Το πεδίο τιμών και ο πυρήνας ενός γραμμικού μετασχηματισμού	244
4.	Συντεταγμένες και αλλαγή βάσης	249
5.	Η μήτρα ενός γραμμικού μετασχηματισμού	254
6.	Η άλγεβρα γραμμικών μετασχηματισμών	260
7.	Σχέσεις μεταξύ μητρών παράστασης	265
8.	Στοιχειώδεις μήτρες και τριγωνική παραγοντοποίηση	268
9.	Επίλυση γραμμικών συστημάτων με LU – παραγοντοποίηση	276

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΑΤΟ	279
ΒΑΘΜΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΗΤΡΩΝ	
ΤΟ ΙΧΝΟΣ ΚΑΙ Η ΟΡΙΖΟΥΣΑ	279
1. Εισαγωγή	279
2. Ίχνος μήτρας	279
3. Ορίζουσα	280
4. Βασικές ιδιότητες οριζουσών	286
5. Παράσταση λύσεων ενός τετραγωνικού συστήματος με ορίζουσες	293

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ	295
Η ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΤΑ ΕΠΑΚΟΛΟΥΘΑ ΤΗΣ	295
1. Εισαγωγή	295
2. Ορθογώνιες Βάσεις	296
3. Ορθογώνιοι υποχώροι	298
4. Προβολές	306
5. Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	312
6. Ορθογώνιες μήτρες, ορθογωνοποίηση Gram – Schmidt και παραγοντοποίηση QR	324

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΝΔΕΚΑΤΟ	339
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	339
1. Εισαγωγή	339
2. Αλγεβρική δομή του $\mathbb{R}$	340
3. Ανισότητες και Ανισοεξισώσεις με απόλυτες τιμές	348
4. Πληρότητα του $\mathbb{R}$	356
5. Τοπολογική δομή του $\mathbb{R}$	359
6. Πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής	361
7. Άλγεβρα πραγματικών συναρτήσεων	364
8. Ορισμένα είδη πραγματικών συναρτήσεων	366
9. Μετασχηματισμοί του γραφήματος μιας πραγματικής συνάρτησης	372

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΩΔΕΚΑΤΟ	377
ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ	377
1. Εισαγωγή	377
2. Όρια ή οριακές τιμές μιας συνάρτησης	378
3. Ιδιότητες των ορίων	380
4. Ο $(\varepsilon - \delta)$ ορισμός του ορίου	385
5. Μονόπλευρα ή πλευρικά όρια	388
6. Όρια προς το άπειρο	392
7. Συνέχεια συναρτήσεων	394

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΡΙΤΟ	405
ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ	405

1.	Εισαγωγή	405
2.	Οι έννοιες του μέσου και οριακού μεγέθους	406
3.	Η παράγωγος	410
4.	Η παράγωγος είναι τελικά πηλίκο δύο διαφορικών: Ιστορική αναδρομή	415
5.	Πλευρικές ή μονόπλευρες παράγωγοι	419
6.	Κανόνες παραγωγίσης	427
7.	Παράγωγοι ανώτερης τάξης	434
8.	Απροσδιόριστες μορφές – Κανόνες L'Hospital	436
9.	Διαφορικό και γραμμική προσέγγιση συνάρτησης	438
10.	Διαφορικό ανώτερης τάξης	446
11.	Θεμελιώδη θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού	447

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΤΕΤΑΡΤΟ 451

ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1.	Εισαγωγή	451
2.	Εκθετικές συναρτήσεις	452
3.	Λογαριθμικές συναρτήσεις	463
4.	Παράγωγοι εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων	471
5.	Παράγωγος λογαριθμικής συνάρτησης και ποσοστιαίος ρυθμός Μεταβολής	476
6.	Οικονομικές εφαρμογές εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων	480
7.	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	496
8.	Παράγωγοι τριγωνομετρικών συναρτήσεων	503

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΠΕΜΠΤΟ 507

ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

1.	Εισαγωγή	507
2.	Αύξουσες – φθίνουσες συναρτήσεις	507
3.	Τοπικά ακρότατα σημεία (μέγιστα – ελάχιστα)	509
4.	Απόλυτα μέγιστα – ελάχιστα	520
5.	Κυρτότητα, κοιλότητα και σημεία καμπής	524
6.	Ασύμπτωτες του γραφήματος μιας συνάρτησης	531
7.	Μελέτη του γραφήματος μιας συνάρτησης	537

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΚΤΟ 541

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

1.	Εισαγωγή	541
2.	Ελαστικότητα συναρτήσεων	544
3.	Άλγεβρα ελαστικότητας	549
4.	Σχέσεις μεταξύ ολικών, μέσων και οριακών μεγεθών και των ελαστικότητων τους	552
5.	Συναρτήσεις ολικού, οριακού και μέσου προϊόντος	554
6.	Συναρτήσεις ολικού, οριακού και μέσου κόστους	557
7.	Υποδείγματα προγραμματισμού αποθεμάτων	564
8.	Σχέσεις μεταξύ των συναρτήσεων των ολικών, μέσων και οριακών Εσόδων και της ελαστικότητας της ζήτησης	569

9.	Μεγιστοποίηση κερδών – Νεκρά σημεία	574
10.	Μεγιστοποίηση εσόδων από φορολογία	579
11.	Βελτιστοποίηση σε σχέση με το χρόνο	585

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ	591
ΤΟ ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	591
1. Εισαγωγή	591
2. Αόριστο ολοκλήρωμα	592
3. Ολοκληρώματα και παράγωγοι ως τελεστές	597
4. Το αόριστο ολοκλήρωμα στοιχειωδών συναρτήσεων	599
5. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση	603
6. Ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες	608
7. Η μέθοδος δοκιμής και σφαλματος (Trial and error method)	616
8. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων: Η μέθοδος των μερικών κλασμάτων	619
9. Πίνακες Ολοκληρωμάτων	625
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΟΓΔΩΟ	631
ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ	631
1. Εισαγωγή	631
2. Ορισμένο κατά Riemann Ολοκλήρωμα	634
3. Ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος	638
4. Υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος από έναν αόριστο ολοκλήρωμά του	642
5. Μη γνήσια ή Γενικευμένα Ολοκληρώματα	654
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΚΑΤΟ ΕΝΑΤΟ	667
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	667
1. Εισαγωγή	667
2. Οικονομικές εφαρμογές ολοκληρωμάτων	667
3. Εφαρμογές της ολοκλήρωσης στη θεωρία πιθανοτήτων και στη Στατιστική	678

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ	697
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ	697
1. Εισαγωγή	697
2. Σφάλματα	698
3. Επαναληπτικές διαδικασίες	700
4. Ρίζες μη γραμμικών εξισώσεων μιας πραγματικής μεταβλητής	701
5. Αριθμητική ολοκλήρωση	709

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ ΠΡΩΤΟ	719
ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ TAYLOR – McLAURIN	719
1. Εισαγωγή	719
2. Πολυώνυμα Taylor - McLaurin	720
3. Το θεώρημα Taylor	725
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ ΔΕΥΤΕΡΟ	729
ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ – ΣΕΙΡΕΣ	729
1. Εισαγωγή	729
2. Ακολουθίες	730
3. Άλγεβρα ακολουθιών	736
4. Σύγκλιση – Όρια ακολουθιών	737
5. Σειρές	742
6. Κριτήρια ολοκληρώματος και σύγκρισης	750
7. Τα κριτήρια λόγου και ρίζας	756
8. Εναλλάσσουσες σειρές	759
9. Απόλυτη σύγκλιση και σύγκλιση υπό συνθήκη	760
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΙΚΟΣΤΟ ΤΡΙΤΟ	765
ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ	765
1. Εισαγωγή	765
2. Σύγκλιση δυναμοσειρών	767
3. Παραγωγή, Ολοκλήρωση Δυναμοσειρών	769
4. Σειρές Taylor και Maclaurin	772
5. Πράξεις με σειρές Taylor - Maclaurin	776
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ	783