

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΡΟΛΟΓΟΣ</b>	13
<b>ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ</b>	
<b>ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</b>	
	15
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</b>	17
1. Εισαγωγή	17
2. Πραγματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής	18
3. Γεωμετρική παράσταση πραγματικής συνάρτησης διανυσματικής Μεταβλητής	20
4. Διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής	27
5. Διανυσματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής	29
6. Βασικές έννοιες τοπολογίας των Ευκλείδειων χώρων $R^n$	32
7. Όρια και συνέχεια πολυμεταβλητών συναρτήσεων	36
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ</b>	43
1. Εισαγωγή	43
2. Μερική παράγωγος μιας $R^n \rightarrow R$ συνάρτησης	44
3. Μερική παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης	48
4. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης	50
5. Το διάνυσμα κλίσης	56
6. Απλές οικονομικές εφαρμογές μερικών παραγώγων	58
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</b>	65
1. Εισαγωγή	65
2. Διαφορισιμότητα και παράγωγοι συναρτήσεων $R^n \rightarrow R$	66
3. Κανόνες υπολογισμού του ολικού διαφορικού	76
4. Ολικό διαφορικό και διάνυσμα κλίσης	78
5. Διαφορισιμότητα και παράγωγοι διανυσματικών συναρτήσεων ( $R^n \rightarrow R^m$ συναρτήσεων)	80
6. Παραγωγή σύνθετων συναρτήσεων (αλυσωτός κανόνας)	84
7. Αλυσωτή παραγωγή στα πλαίσια της θεωρίας γραφημάτων	94
8. Παράγωγος κατά κατεύθυνση	97
9. Θεώρημα μέσης τιμής και πολυώνυμα Taylor	103
10. Συναρτησιακή εξάρτηση	106
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΙ ΤΟΥΣ</b>	111
1. Εισαγωγή	111
2. Πλεγμένες συναρτήσεις διανυσματικής μεταβλητής	114
3. Συστήματα πλεγμένων συναρτήσεων	125
4. Αντίστροφη μιας διανυσματικής συνάρτησης	135

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΛΕΓΜΕΝΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ</b>	141
1. Εισαγωγή	141
2. Η έννοια του μαθηματικού οικονομικού υποδείγματος	141
3. Στατική, Συγκριτική στατική και Δυναμική ανάλυση	145
4. Ένα Γενικό Πλαίσιο Συγκριτικής Στατικής Οικονομικής Ανάλυσης	150
5. Ποιοτικός Λογισμός σε Προβλήματα Συγκριτικής Στατικής Ανάλυσης	152
6. Απλό Μοντέλο Ανταγωνιστικής Αγοράς	156
7. Απλό Κεϋνσιανό μοντέλο Εθνικού Εισοδήματος	162
8. Ένα IS-LM μοντέλο εθνικού εισοδήματος	166
9. Οι κλίσεις των καμπυλών IS και LM	169
<b>ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	173
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ</b>	175
1. Εισαγωγή	175
2. Ορισμένες, ημιορισμένες και αόριστες τετραγωνικές μορφές	179
3. Έλεγχος οριστικότητας τετραγωνικών μορφών	187
4. Έλεγχος οριστικότητας με τα πρόσημα των ιδιοτιμών	187
5. Τετραγωνικές μορφές με γραμμικούς περιορισμούς	189
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ</b>	201
1. Εισαγωγή	201
2. Ορισμοί	201
3. Αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης	207
4. Συνθήκες δεύτερης τάξης	212
5. Συγκριτική στατική ανάλυση σε μοντέλα μη δεσμευμένης βελτιστοποίησης	221
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΗ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</b>	229
1. Εισαγωγή	229
2. Μεγιστοποίηση κερδών σε συνθήκες μονοπωλίου	229
3. Μεγιστοποίηση κερδών σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και με γενική συνάρτηση παραγωγής	231
4. Μεγιστοποίηση κερδών με διαφοροποίηση παραγωγής	244
5. Μεγιστοποίηση κερδών με διαφοροποίηση τιμών	247
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9: ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ I: Εξισωτικοί περιορισμοί</b>	255
1. Εισαγωγή	255
2. Αναγκαίες συνθήκες πρώτης τάξης	259
3. Η μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange	267
4. Γενικευμένες συνθήκες πρώτης τάξης	277
5. Συνθήκες δεύτερης τάξης	281
6. Συγκριτική στατική ανάλυση	292

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10: ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</b>	299
1. Εισαγωγή	299
2. Οικονομική ερμηνεία των πολλαπλασιαστών Lagrange	299
3. Ελαχιστοποίηση κόστους σε συνθήκες πλήρους ανταγωνισμού και γενική συνάρτηση παραγωγής	305
4. Ελαχιστοποίηση κόστους με περιορισμό μια γενική συνάρτηση Παραγωγής $n > 2$ συντελεστών	314
5. Μεγιστοποίηση χρησιμότητας με ένα εισοδηματικό περιορισμό	319
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ</b>	
<b>Δεσμευμένη Βελτιστοποίηση με περιορισμούς ανισοεξισώσεις</b>	327
1. Εισαγωγή	327
2. Ταξινόμηση και γραφική παράσταση των προβλημάτων μαθηματικού προγραμματισμού	330
3. Συνθήκες Βελτιστότητας Kuhn – Tucker	332
4. Απλές οικονομικές εφαρμογές των συνθηκών Kuhn – Tucker	348
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΒΛΗΜΑΤΟΣ</b>	357
1. Εισαγωγή	357
2. Συναρτήσεις βέλτιστης τιμής προβλημάτων μη δεσμευμένης βελτιστοποίησης	359
3. Το θεώρημα του περιβλήματος για ένα πρόβλημα μη δεσμευμένης βελτιστοποίησης	360
4. Συναρτήσεις Βέλτιστης Τιμής για Ένα Πρόβλημα Δεσμευμένης Βελτιστοποίησης	366
5. Το θεώρημα του Περιβλήματος σε ένα Πρόβλημα Δεσμευμένης Βελτιστοποίησης	367
<b>ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ</b>	
<b>ΟΜΟΓΕΝΕΙΑ – ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ</b>	373
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13: ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΑΙ ΟΜΟΘΕΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</b>	375
1. Εισαγωγή	375
2. Ορισμός και ιδιότητες	378
3. Ιδιότητες ομογενών συναρτήσεων	381
4. Το θεώρημα του Euler και οι οικονομικές του εφαρμογές	388
5. Ομογενοποίηση συνάρτησης	392
6. Συναρτήσεις Cobb – Douglas	394
7. Συναρτήσεις Σταθερής Ελαστικότητας Υποκατάστασης – Συναρτήσεις C.E.S.	400
8. Συναρτήσεις μεταβλητής ελαστικότητας υποκατάστασης ή συναρτήσεις V.E.S.	403
9. Ομοθετικές συναρτήσεις	405
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14: ΚΥΡΤΕΣ (ΚΟΙΛΕΣ) ΚΑΙ ΟΙΟΝΕΙ ΚΥΡΤΕΣ (ΟΙΟΝΕΙ ΚΟΙΛΕΣ) ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ</b>	409

1.	Εισαγωγή	409
2.	Βασικές έννοιες της θεωρίας των κυρτών συνόλων	410
3.	Κυρτά πολύεδρα – πολύτοπα	415
4.	Υποστηρίζοντα και διαχωρίζοντα Υπερεπίπεδα	416
5.	Κυρτοί κώνοι	418
6.	Κοίλες και κυρτές συναρτήσεις μιας μεταβλητής	425
7.	Εναλλακτικοί χαρακτηρισμοί κοίλων συναρτήσεων	428
8.	Κοίλες (κυρτές) συναρτήσεις $n \geq 2$ μεταβλητών	431
9.	Ιδιότητες κοίλων (κυρτών) συναρτήσεων	437
10.	Οιονεί κοίλες και οιονεί κυρτές συναρτήσεις	443

**ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ  
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II**

451

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15: ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ**

453

1.	Εισαγωγή	453
2.	Ορισμοί και Παραδείγματα	455
3.	Επίλυση της εξίσωσης $Ax=\lambda x$	457
4.	Αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής	467
5.	Διαγωνιοποίηση μητρών	469
6.	Μιγαδικές Ιδιοτιμές και Μιγαδικά Ιδιοδιανύσματα	477
7.	Χαρακτηριστικά μεγέθη της δύναμης $A^k$ και του γινομένου $AB$	480
8.	Χαρακτηριστικές τιμές μητρών ειδικής μορφής	484
9.	Η κανονική μορφή Jordan	491

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ – ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ**

495

1.	Εισαγωγή	495
2.	Η μέθοδος των δυνάμεων	498
3.	Ο αλγόριθμος QR	503

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΕΙΣΡΩΝ – ΕΚΡΩΝ**

509

1.	Εισαγωγή	509
2.	Το ανοικτό μοντέλο Leontief	510
3.	Υπολογισμός της αντίστροφης $(I-A)^{-1}$	517
4.	Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την ύπαρξη μοναδικής μη – αρνητικής λύσης	518
5.	Διαμερισιμότητα μη αρνητικών τετραγωνικών μητρών	523
6.	Προσδιορισμός της διαμερισιμότητας	529
7.	Το κλειστό μοντέλο εισροών – εκροών	533

**ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ  
ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**

535

**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ**

537

1.	Εισαγωγή	537
----	----------	-----

2.	Ορισμοί και παραδείγματα	541
3.	Η γενική λύση και το πρόβλημα αρχικών τιμών	547
4.	Ποιοτική θεωρία των διαφορικών εξισώσεων	554
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>		557
1.	Εισαγωγή	557
2.	Γεωμετρικός προσδιορισμός των λύσεων μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης	559
3.	Χωριζόμενες μεταβλητές	565
4.	Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις	570
5.	Ακριβείς διαφορικές εξισώσεις ή εξισώσεις ολικού διαφορικού	572
6.	Ολοκληρωτικός παράγων ή Πολλαπλασιαστής Euler	578
7.	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης	581
8.	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές	588
9.	Ισορροπία – Ευστάθεια	592
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ</b>		595
1.	Εισαγωγή	595
2.	Ιδιότητες λύσεων των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων	597
3.	Η συμπληρωματική λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	600
4.	Μερικές λύσεις μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές	607
5.	Ισορροπία – Ευστάθεια	613
6.	Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n-ιστής τάξης με σταθερούς συντελεστές	620
7.	Μέθοδοι τελεστών για την εύρεση μερικών λύσεων	624
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 21: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ</b>		629
1.	Εισαγωγή	629
2.	Δυναμικά οικονομικά μοντέλα	630
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 22: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ</b>		641
1.	Εισαγωγή	641
2.	Λογισμός πεπερασμένων διαφορών	642
3.	Αναλογίες μεταξύ Λογισμού Διαφορών και Διαφορικού Λογισμού	649
4.	Εξισώσεις διαφορών: Ορισμοί και ταξινόμηση	651
5.	Λύσεις μιας εξίσωσης διαφορών	655
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 23: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ</b>		659
1.	Εισαγωγή	659
2.	Επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές	660
3.	Συμπεριφορά της ακολουθίας λύσεων της εξίσωσης $y_{x+1}=Ay_xB$	666
4.	Ισορροπία – Ευστάθεια	671

5.	Οικονομικές εφαρμογές των γραμμικών εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης	673
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 24: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ</b>		681
1.	Εισαγωγή	681
2.	Ιδιότητες λύσεων	682
3.	Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης	683
4.	Μερικές λύσεις της πλήρους εξίσωσης διαφορών δεύτερης τάξης	690
5.	Ισορροπία – Ευστάθεια	692
6.	Εφαρμογές των εξισώσεων διαφορών δεύτερης τάξης σε δυναμικά οικονομικά μοντέλα	697
7.	Γραμμικές εξισώσεις διαφορών n-ιστής τάξης με σταθερούς συντελεστές	701
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ</b>		705
1.	Εισαγωγή	705
2.	Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς	708
3.	Μιγαδικός συζυγής, απόλυτος τιμή, διαίρεση	711
4.	Πολική μορφή μιγαδικών αριθμών	714
5.	Μήτρες και διανύσματα με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς	720
6.	Συστήματα γραμμικών εξισώσεων με μιγαδικούς συντελεστές	725
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΠΑΡΑΠΟΜΠΕΣ</b>		729