ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Εισαγωγικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε και θα αναπτύξουμε διεξοδικά την έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Θα παρουσιάσουμε τα δύο είδη επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων (α΄ και β΄ είδους) και θα παρουσιάσουμε μερικές από τις εφαρμογές τους στη Γεωμετρία και στη Φυσική. Έτσι θα δείξουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους είναι μία γενίκευση του υπολογισμού του μήκους τόξου μιας καμπύλης ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους συνδέεται με τον υπολογισμό του έργου μιας δύναμης κατά μήκος του τόξου μιας καμπύλης. Ιδιαίτερη έμφαση θα δωθεί στο θεώρημα Green ενώ θα γίνει εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος σε απλά συνεκτικούς και πολλαπλά συνεκτικούς τόπους. Θα παρουσιαστούν εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος στη Φυσική ενώ θα αναπτυχθεί εκτεταμένα η περίπτωση εκείνη της ανεξαρτησίας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β΄ είδους από την καμπύλη ολοκλήρωσης.

6.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους

Θεωρούμε μια καμπύλη c η οποία είναι ομαλή ή τμηματικά ομαλή και προσανατολισμένη και η οποία περιγράφεται από την παραμετρική παράσταση

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \qquad t \in [t_1, t_2]. \tag{6.1}$$

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. *Αν το όριο της ακολουθίας (6.4) υπάρχει όταν $||D_n|| \to 0$ και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο διαμέρισης του τόξου και από την εκλογή του σημείου P_k τότε το όριο αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους της βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c. Το ολοκλήρωμα αυτό συμβολίζεται ως εξής*

$$I = \lim_{||D_n|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = \int_c f(x, y, z)\mathrm{d}s. \tag{6.5}$$

Ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους από τον ορισμό του, δηλαδή από τη σχέση (6.5), είναι στις περισσότερες περιπτώσεις αρκετά δύσκολος. Όπως θα δείξουμε παρακάτω ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος. Έτσι, ο υπολογισμός του γίνεται εφαρμόζοντας τις γνωστές μεθόδους υπολογισμού ενός απλού ολοκληρώματος.

6.2 Υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους

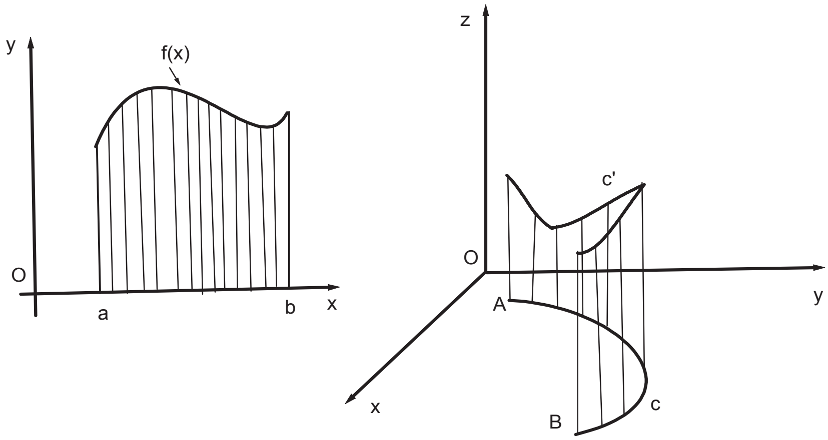
Έστω ότι η διανυσματική παράσταση της καμπύλης c, κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το ολοκλήρωμα, δίνεται στη φυσική της αναπαράσταση, δηλαδή

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}, \qquad s \in [0, s]. \tag{6.6}$$

Εφόσον ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται κατά μήκος της παραπάνω καμπύλης οι μεταβλητές x, y, z της συνάρτησης $f(x, y, z)$ δεν είναι πλέον ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού είναι συνάρτηση της φυσικής παραμέτρου s και το ολοκλήρωμα (6.5) μπορεί να γραφεί

$$I = \int_0^s f(x(s), y(s), z(s))\mathrm{d}s. \tag{6.7}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος. Όπως θα δείξουμε όμως παρακάτω η γεωμετρική σημασία των δύο ολοκληρωμάτων (απλού και επικαμπύλιου α′ είδους) είναι εν γένει διαφορετική.



Σχήμα 6.2: Η γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους και η σχέση του με ένα απλό ολοκλήρωμα.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους και μήκος τόξου

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους συνδέεται με το μήκος ενός τόξου καμπύλης . Έτσι από τη σχέση (6.5) (ή τη σχέση (6.9)) αν θέσουμε $f(x,y,z) = 1$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ δηλαδή θα έχουμε

$$s = \int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ \mathrm{d}t. \tag{6.11}$$

Γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α' είδους

Παρότι υπολογιστικά, ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους ταυτίζεται με ένα απλό ολοκλήρωμα, η γεωμετρική τους σημασία είναι διαφορετική. Είναι γνωστό ότι αν θεωρήσουμε μία θετική συνάρτηση $f(x) > 0,\ x \in [a,b]$ τότε το απλό ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ ταυτίζεται με τον εμβαδόν ενός τραπεζοειδούς όπως φαίνεται στο σχήμα (6.2).

Θεωρούμε τώρα μία επίπεδη καμπύλη στο επίπεδο xy με παραμετρική παράσταση $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{i}$ και έστω η θετική συνάρτηση $z = f(x,y)$ (βλέπε σχήμα (6.2)). Είναι προφανές ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους $I_a =$

3. *Αν ισχύει $f(x,y,z) \geq 0$ και η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου c, τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s \geq 0. \tag{6.14}$$

4. *Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος του τόξου c, τότε και η συνάρτηση $|f(x,y,z)|$ είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου c και ισχύει*

$$\left|\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s\right| \leq \int_c |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}s. \tag{6.15}$$

5. Θεώρημα μέσης τιμής. *Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου c και l είναι το μήκος του παραπάνω τόξου, τότε υπάρχει ένα σημείο $P(x_P, y_P, z_P)$ του τόξου c τέτοιο ώστε να είναι*

$$f(x_P, y_P, z_P) = \frac{1}{l}\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.16}$$

6. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό του τόξου $\widehat{AB}$ της ολοκλήρωσης, δηλαδή ισχύει*

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.17}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος από τη σχέση (6.5). Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} f(x_k, y_k, z_k)\tilde{\Delta} s_k \\ &= \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k = \int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.18}$$

όπου στην παραπάνω απόδειξη λάβαμε υπόψη την προφανή ισότητα $\tilde{\Delta} s_k = |\widehat{A_{k+1}A_k}| = |\widehat{A_k A_{k+1}}| = \Delta s_k$.

διαμέριση του τόξου σε διαδοχικά τόξα ως D_1 και επίσης ονομάζουμε μέτρο της διαμέρισης αυτής την ποσότητα $||D_1||$ όπου

$$||D_1|| = \max|\widehat{A_kA_{k+1}}|, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.21}$$

Θεωρούμε επίσης τη διανυσματική συνάρτηση $\vec{F}(x, y, z)$, η οποία ορίζεται κατά μήκος της καμπύλης c και έχει τη μορφή

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}. \tag{6.22}$$

Κατασκευάζουμε το παρακάτω άθροισμα

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(M_k)\overrightarrow{A_kA}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(M_k)\Delta\vec{r}_{k,k+1} \qquad (6.23) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(P(M_k)\Delta x_{k,k+1} + Q(M_k)\Delta y_{k,k+1} + R(M_k)\Delta z_{k,k+1}\Big), \end{aligned}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι

$$\Delta\vec{r}_{k,k+1} = \Delta x_{k,k+1}\vec{i} + \Delta y_{k,k+1}\vec{j} + \Delta z_{k,k+1}\vec{k}, \tag{6.24}$$

και ότι $M_k(x_k, y_k, z_k)$ είναι τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{A_kA_{k+1}}$. Θεωρούμε τώρα επιπλέον μία διαδοχική ακολουθία διαμερίσεων $\{D_n\}$ του τόξου $\widehat{AB}$ που να έχει την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} ||D_n|| = 0,$$

και έστω η ακολουθία των αντίστοιχων αθροισμάτων

$$I_1, I_2, \cdots, I_n. \tag{6.25}$$

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2. *Αν το όριο της ακολουθίας (6.25) υπάρχει όταν $||D_n|| \to 0$ και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο διαμέρισης του τόξου και από την εκλογή του σημείου M_k τότε το όριο αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c. Το ολοκλήρωμα αυτό συμβολίζεται ως εξής*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(P(M_k)\Delta x_{k,k+1} + Q(M_k)\Delta y_{k,k+1} + R(M_k)\Delta z_{k,k+1}\Big) \\ &= \int_{\widehat{AB}} P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z. \qquad (6.26) \end{aligned}$$

όπου $\cos\tilde{\alpha}$, $\cos\tilde{\beta}$, $\cos\tilde{\gamma}$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\vec{t}$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} I &= \int_{s=0}^{s=l} \Big(P(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\alpha} + Q(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\beta} \\ &+ R(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\gamma} \Big)\,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Ο παραπάνω τύπος για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους είναι ο λιγότερο εύχρηστος. Συνήθως, για την επίλυση ασκήσεων χρησιμοποιείται μία από τις δύο εκδοχές της σχέσης (6.29).

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους κατά μήκος κλειστής καμπύλης

Όπως στην περίπτωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους έτσι και στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους μία ειδική περίπτωση είναι αυτή όπου το αρχικό και τελικό σημείο του τόξου ολοκλήρωσης ταυτίζονται δηλαδή όταν η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης c. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως εξής

$$I = \oint_c \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}. \tag{6.33}$$

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα β′ είδους κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης, αποτελούν μία σημαντική κατηγορία ολοκληρωμάτων με πολλές εφαρμογές κυρίως στη Φυσική. Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος χαρακτηρίζει και το είδος του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$. Έτσι έχουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

1. $I = \oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$, **Αστρόβιλο** διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$.

2. $I = \oint \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} \neq 0$, **Στροβιλό** διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$.

Φορά διαγραφής επίπεδης καμπύλης

Σε μία επίπεδη καμπύλη c (χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα θεωρούμε ότι βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy) η οποία περιβάλλει έναν τόπο D ορίζουμε ως **θετική φορά διαγραφής** της καμπύλης εκείνη κατά την οποία ένας άνθρωπος βαδίζοντας πάνω στην καμπύλη με το κεφάλι προς την θετική κατεύθυνση του άξονα z αφήνει τον τόπο προς τα αριστερά του (σχήμα (6.4)). Με ανάλογο επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους $\int_{c:y(x)} P(x, y(x))\mathrm{d}x$ συμπίπτει με αυτήν του απλού ολοκλήρωμα $\int P(x, y(x))\mathrm{d}x$ αν και έχουν διαφορετική γεωμετρική σημασία. Έτσι το ολοκλήρωμα $\int_{c:y(x)} P(x, y(x))\mathrm{d}x$ αποτελεί τμήμα ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους που υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης $c : y(x)$, ενώ το ολοκλήρωμα $\int P(x, y(x))\mathrm{d}x$ είναι ένα απλό ολοκλήρωμα με ολοκληρωτέα συνάρτηση την $P(x, y(x))$ και όρια που καθορίζονται από τη συνάρτηση $y(x)$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση εκείνη όπου το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος τυχαίας καμπύλης στο χώρο και θεωρώντας τη μεταβλητή x ως παράμετρο, δηλαδή θα είναι $y = y(x)$ και $z = x(x)$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_c P(x, y(x), z(x))\mathrm{d}x + Q(x, y(x), z(x))\mathrm{d}y + R(x, y(x), z(x))\mathrm{d}z \qquad (6.35) \\ &= \int_c \left(P(x, y(x), z(x)) + Q(x, y(x), z(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + R(x, y(x), z(x))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Έργο δύναμης και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους

Μία βασική εφαρμογή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους στη Φυσική είναι αυτή του υπολογισμού του έργου μιας δύναμης. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι ένα υλικό σημείο κινείται στον χώρο, και κατά μήκος μιας καμπύλης c, με την επίδραση της δύναμης $\vec{F}(x, y, z)$ τότε το έργο W που παράγει η παραπάνω δύναμη, όταν το σώμα μετατοπίζεται κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ (το οποίο είναι τμήμα της καμπύλης c), υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}. \qquad (6.36)$$

6.5 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ και β′ είδους

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα α′ και β′ είδους αποτελούν εξ′ ορισμού δύο διαφορετικά είδη ολοκληρωμάτων. Όπως δείξαμε η γεωμετρική σημασία του

6.6 Ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους

Αναφέρουμε παρακάτω, χωρίς απόδειξη, μερικές βασικές ιδιότητες των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων β′ είδους:

1. *Αν* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *είναι σταθερές και οι συναρτήσεις* $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \cdots, \vec{F}_n$ *είναι ολοκληρώσιμες κατά μήκος του τόξου* c *τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{F}_i(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_c \vec{F}_i(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{6.37}$$

2. *Αν το τόξο* c *είναι η ένωση των διαδοχικών τόξων* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *και η συνάρτηση* $\vec{F}$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξων αυτών, τότε ισχύει η σχέση*

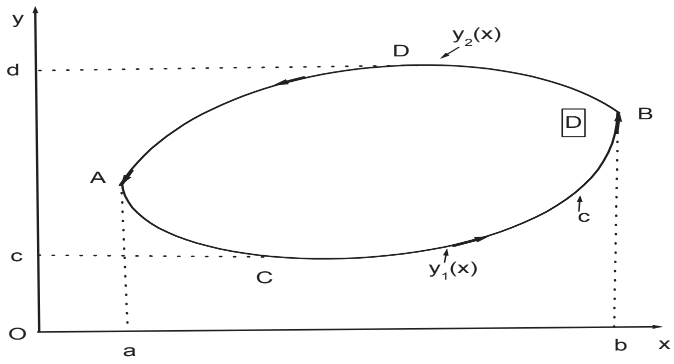
$$\int_c \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{6.38}$$

3. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους εξαρτάται από τον προσανατολισμό του τόξου* $\widehat{AB}$ *της ολοκλήρωσης, δηλαδή*

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{\widehat{BA}} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \tag{6.39}$$

Απόδειξη: *Θα αποδείξουμε την παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.26). Έτσι θα έχουμε*

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \int_{\widehat{BA}} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} \vec{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\vec{r}_{k+1,k} \\ &= -\lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} \vec{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\vec{r}_{k,k+1} \\ &= -\lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \vec{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\vec{r}_{k,k+1} \\ &= -\int_{\widehat{AB}} \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{r}. \end{aligned} \tag{6.40}$$



Σχήμα 6.6: Το θεώρημα του Green σε απλά συνεκτικό τόπο.

Ορισμός 3. *Ένας επίπεδος τόπος D ονομάζεται* **απλά συνεκτικός** *αν κάθε κλειστή καμπύλη η οποία ανήκει στον τόπο D, μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει σημείο χωρίς να εγκαταλείψει τον τόπο αυτόν. Αν ο τόπος D δεν είναι απλά συνεκτικός ονομάζεται* **πολλαπλά συνεκτικός**. *Πολλαπλά συνεκτικός είναι για παράδειγμα ένας τόπος ο οποίος περιέχει τρύπες. Παραδείγματα απλά συνεκτικών και πολλαπλά συνεκτικών φαίνονται στο σχήμα (6.5).*

Παρακάτω θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα του Green σε *απλά και πολλαπλά συνεκτικό τόπο* καθώς επίσης και σε *μη κανονικό τόπο.*

6.7.1 Το θεώρημα του Green σε απλά συνεκτικό τόπο

Θεώρημα 1. *Δίνεται ο απλά συνεκτικός τόπος D και οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ οι οποίες ορίζονται είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές πρώτες παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ στον τόπο D. Επίσης στον τόπο D θεωρούμε την ομαλή ή τμηματικά ομαλή κλειστή καμπύλη c η οποία περιβάλλει τον κανονικό τόπο D. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:*

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.43}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον τόπο D του σχήματος (6.6) ο οποίος μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$D = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y(x) \le y_2(x)\},$$

Δηλαδή έχουμε

$$\int_D\int \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c Q(x,y)\mathrm{d}y. \tag{6.48}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (6.45) και (6.48) λαμβάνουμε τελικά

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.49}$$

Θεώρημα του Green και εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, με τη βοήθεια του θεωρήματος Green μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας. Συνήθως θεωρούμε ότι αυτή η επιφάνεια βρίσκεται σε ένα από τα συντεταγμένα επίπεδα xy, xz ή yz αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε επίπεδη.

Θεώρημα 2. *Αν θεωρήσουμε ότι ο απλά συνεκτικός τόπος D είναι μία επίπεδη επιφάνεια του επιπέδου xy η οποία περιβάλεται από την κλειστή καμπύλη c τότε αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν S της παραπάνω επιφάνειας δίνεται από τον τύπο*

$$S = \frac{1}{2}\oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y) = P\vec{i} + Q\vec{j} = -y\vec{i} + x\vec{j}, \tag{6.50}$$

ορισμένο κατά μήκος της καμπύλης c η οποία περιβάλλει τον απλά συνεκτικό τόπο D και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green στον τόπο αυτό θα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \Rightarrow\\
&\int_D\int (1-(-1))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \Rightarrow\\
&S = \int_D\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επίπεδης επιφάνειας μπορεί να αναχθεί στον υπολογισμό ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους.

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας μπορεί να γίνει επίσης με έ-να απλούστερο τρόπο αν επιλέξουμε για παράδειγμα το διανυσματικό πεδίο να

6.7.2 Το θεώρημα του Green σε μη κανονικό τόπο

Το θεώρημα του Green μπορεί να επεκταθεί και σε τόπους οι οποίοι είναι μη κανονικοί, όπως για παράδειγμα ο τόπος του σχήματος (6.7). Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3. *Το θεώρημα του Green ισχύει και στην περίπτωση όπου ο τόπος ολοκλήρωσης είναι μη κανονικός.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα στο μη κανονικό τόπο του σχήματος (6.7). Στην περίπτωση αυτή διαμερίζουμε τον τόπο D σε δύο κανονικούς τόπους D_1 και D_2 με τη βοήθεια της γραμμής AB και εφαρμόζουμε σε καθέναν από αυτούς το θεώρημα του Green. Έτσι θα έχουμε διαδοχικά για τους τόπους D_1 και D_2

$$\int_{ABCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{D_1}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.52}$$

$$\int_{ADBA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{D_2}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.53}$$

Αν προσθέσουμε τα αριστερά μέλη των παραπάνω σχέσεων θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_L &= \int_{ABCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{ADBA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BCA} P\mathrm{d}x \\ &+ Q\mathrm{d}y + \int_{ADB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{BCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{ADB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{ADBCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.54}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \tag{6.55}$$

Επιπλέον, προσθέτοντας τα δεξιά μέλη θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{D_1}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{D_2}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{D}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.56}$$

ομαλή κλειστή καμπύλη c_1 και έστω c_2 η ομαλή καμπύλη η οποία περιβάλλει τον τόπο $\bar{D}$. Ο τύπος του Green δεν ισχύει στον τόπο $\bar{D}$ αλλά ισχύει στη λουρίδα η οποία περιβάλλεται από τις καμπύλες c_1 και c_2, δηλαδή στον τόπο D. Φέρνουμε τώρα τις γραμμές AB και DC και με αυτό τον τρόπο χωρίζουμε τον τόπο D στους δύο απλά συνεκτικούς τόπους D_1 και D_2. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{D_1}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{D_2}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.58}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green στους τόπους D_1 και D_2 οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_1}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{AECDFBA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AEC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{CD}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &+ \int_{DFB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.59}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{D_2}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{ABGDCIA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BGD}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &+ \int_{DC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{CIA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.58) θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{AECIA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{BGDFB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \oint_{c_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\oint_{c_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.61}$$

Στη σχέση (6.61) οι καμπύλες διαγράφονται κατά την συμβατικά θετική φορά. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί εύκολα να γενικευτεί στην περίπτωση όπου ο όπου η καμπύλη $\bar{c}_1$ ταυτίζεται με την c_1 αλλά έχει αντίθετη φορά διαγραφής και συνεπώς την ίδια με την καμπύλη c_2. Μπορούμε να διατυπώσουμε τώρα το σχετικό θεώρημα:

Θεώρημα 6. *Έστω ο διπλά συνεκτικός τόπος D ο οποίος περιέχει μία τρύπα και έστω ότι στον παραπάνω τόπο ισχύει η σχέση $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος κλειστής καμπύλης που περιβάλλει την τρύπα, είναι ίση με την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης που περιβάλλει την ίδια τρύπα.*

Το παραπάνω θεώρημα διευκολύνει σημαντικά υπολογισμούς επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων κατά μήκος πολύπλοκων καμπυλών οι οποίες περιβάλλουν μία ή και περισσότερες τρύπες. Και αυτό γιατί επιτρέπει την ελευθερία επιλογής καμπύλης για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις δυνατές εκείνες περιπτώσεις οι οποίες εμφαν΄ίζονται στον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων κατά μήκος κλειστών καμπυλών ως εξής:

α) *Αν ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι* **απλά συνεκτικός** *τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε απλά τον τύπο του Green.*

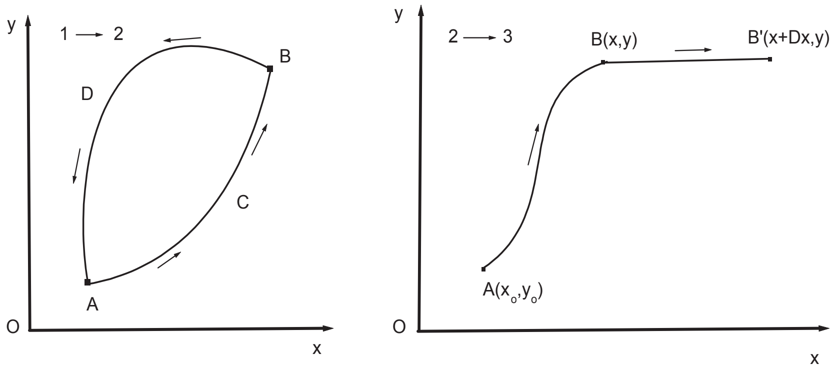
β$_1$) *Αν ο τόπος ολοκλήρωσης είναι* **πολλαπλά συνεκτικός (με μία τρύπα) και ισχύει** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα επιλέγοντας οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιβάλλει την τρύπα.*

β$_2$) *Αν ο τόπος ολοκλήρωσης είναι* **πολλαπλά συνεκτικός (με μία τρύπα) και ισχύει** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$ *τότε το ολοκλήρωμα πρέπει αναγκαστικά να υπολογιστεί κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης.*

6.8 Αστρόβιλο πεδίο και δυναμική συνάρτηση

Μία ιδιαίτερη εφαρμογή των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων β΄ είδους είναι αυτή όπου η τιμή που λαμβάνει το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητη της καμπύλης ολοκλήρωσης και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο της ολοκλήρωσης. Τέτειες περιπτώσεις ολοκληρωμάτων εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα Φυσικής. Θα μελετήσουμε αναλυτικά την παραπάνω περίπτωση ξεκινώντας με την διατύπωση του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 7. *Αν οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ οι οποίες είναι συνεχείς*



Σχήμα 6.10: Ανεξαρτησία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος από την καμπύλη ολοκλήρωσης.

$ACBDA$ όπως φαίνεται στο σχήμα (6.10). Το ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστή διαδρομής είναι μηδέν συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} &\oint P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \int_{ACBDA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \\ &\int_{ACB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BDA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \\ &\int_{ACB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{ABD} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow \\ &\int_{ACB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{ABD} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.67}$$

Η τελευταία σχέση αποδεικνύει ότι η τιμή του ολοκληρώματος από το σημείο A στο B είναι ανεξάρτητη της διαδρομής.

(β) $2 \longrightarrow 3$: Θεωρούμε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ είναι ανεξάρτητη της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο. Έστω τώρα τα σημεία $A(x_o, y_o)$, $B(x, y)$ και $B'(x + \Delta x, y)$. Η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται, για σταθερό σημείο A από τις μεταβλητές x, y και θα έχουμε συνεπώς

$$U(x, y) = \int_{AB} P(\bar{x}, \bar{y})\mathrm{d}\bar{x} + Q(\bar{x}, \bar{y})\mathrm{d}\bar{y}. \tag{6.68}$$

(γ) $3 \longrightarrow 4$: Θεωρούμε ότι το ολικό διαφορικό της συνάρτησης $U(x,y)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{d}U = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι σε κάθε περίπτωση το ολικό διαφορκό της συνάρτησης $U(x,y)$ δίνεται επίσης από τη σχέση

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε άμεσα ότι

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \tag{6.74}$$

και επίσης

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \tag{6.75}$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (6.74) και (6.75) θα έχουμε τελικά

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

(δ) $4 \longrightarrow 1$: Θεωρούμε ότι ισχύει $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Έστω τώρα η κλειστή καμπύλη c η οποία περικλείει τον τόπο D. Επειδή ισχύουν οι κατάλληλες προυποθέσεις εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης c και θα έχουμε

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

όπου κάναμε χρήση της ισότητας $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

6.8.1 Κατασκευή της δυναμικής συνάρτησης $U(x,y)$

Στην περίπτωση που έχουμε αναπτύξει, δηλαδή όταν η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητο της διαδρομής, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ολοκληρώνοντας ως προς x λαμβάνουμε

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \Rightarrow U(x,y) = \int P(x,y)\mathrm{d}x + f(y). \tag{6.78}$$

Παραγωγίζοντας μερικώς την παραπάνω σχέση ως προς y και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$ θα έχουμε

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\mathrm{d}x + f(y)\right) = Q(x,y). \tag{6.79}$$

Από τις σχέσεις (6.78) και (6.79) προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $U(x,y)$.

6.8.2 Πολλαπλά συνεκτικοί τόποι και πλειονότιμη δυναμική συνάρτηση

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την θεωρία της προηγούμενης παραγράφου έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε την περίπτωση εκείνη όπου ο τόπος D είναι πολλαπλά συνεκτικός. Όπως θα δείξουμε, η διαφοροποίηση από την προηγούμενη περίπτωση όπου ο τόπος D ήταν απλά συνεκτικός, εμφανίζεται όταν έχουμε να αντιμετωπίσουμε ολοκληρώματα κατά μήκος κλειστών καμπυλών οι οποίες περιβάλουν μία ή περισσότερες τρύπες. Στην περίπτωση εκείνη κατά την οποία τα ολοκληρώματα υπολογίζονται κατά μήκος ανοικτών καμπυλών ή κλειστών που δεν περιέχουν τρύπες η θεωρία είναι ίδια με αυτήν που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Έστω τώρα ο πολλαπλά συνεκτικός τόπος του σχήματος (6.12), όπου στο κέντρο των συντεταγμένων υπάρχει μία τρύπα και έστω τα σημεία A και B. Έστω επίση c η καμπύλη που συνδέει απευθείας τα σημεία A και B, χωρίς να περικλείει την τρύπα. Προφανώς ισχύει

$$\int_{c(A\to B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B \mathrm{d}U = U_B - U_A = \omega. \tag{6.80}$$

Αν υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος της καμπύλης c' :

μία πλειονότιμη συνάρτηση αφού κάθε φορά η τιμή της εξαρτάται από τον δρόμο πάνω στον οποίο υπολογίζεται το ολοκλήρωμα $\int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$. Πιο συγκεκριμένα η τιμή του ολοκληρώματος εξαρτάται από τον αριθμό των περιστροφών που θα κάνουμε γύρω από την τρύπα. Έτσι εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι αν κάνουμε δύο περιστροφές γύρω από την τρύπα θα έχουμε

$$\int_{c'':AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 2C + \omega, \tag{6.82}$$

και γενικότερα για n περιστροφές είναι

$$\int_{c^{n-\mathrm{times}}:AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = nC + \omega. \tag{6.83}$$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση $U(x, y)$ στο σημείο B (αλλά και σε οποιαδήποτε άλλο σημείο) μπορεί να πάρει τιμές οι οποίες θα διαφέρουν μεταξύ τους κατά nC όπου ο ακέραιος αριθμός n θα είναι ίσος με το διαφορά του αριθμού των περιστροφών γύρω από την τρύπα.

Στην ειδική περίπτωση όπου ισχύει $\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = C = 0$, τότε η συνάρτηση $U(x, y)$ είναι μονότιμη.

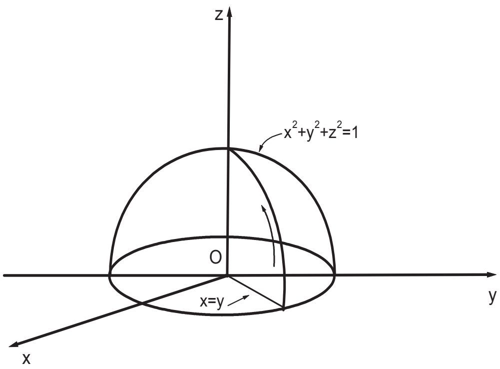
Αν θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου ο τόπος D είναι πολλαπλά συνεκτικός και περιέχει μία τρύπα τότε, και σύμφωνα με την σχέση (6.83), αν κάνουμε n περιστροφές γύρα από την τρύπα θα έχουμε συνολικά (εφόσον για κλειστή διαδρομή $\omega = 0$)

$$\oint_{c^{n-\mathrm{times}}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = nC. \tag{6.84}$$

Στη γενικότερη περίπτωση όπου ο τόπος έχει περισσότερες από μία τρύπες (για παράδειγμα k) θα ισχύει

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = n_1 C_1 + n_2 C_2 + \cdots + n_k C_k, \tag{6.85}$$

όπου οι ακέραιοι αριθμοί $n_1, n_2, \ldots, n_k$ μετρούν τον αριθμό των περιστροφών (αλγεβρικό άθροισμα των περιστροφών με φορά αντίθετης αυτής των δεικτών του ρολογιού και αυτών με φορά όμοιας των δεικτών) γύρω από κάθε τρύπα αντίστοιχα καθώς διαγράφεται η κλειστή καμπύλη c. Συνολικά μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:



Σχήμα 6.13: Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στην άσκηση 1.

6.9 Λυμένες ασκήσεις 6ου κεφαλαίου

Α. Επικαμπύλια ολοκληρώματα α΄ είδους

Άσκηση 1.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_c (x+y)\mathrm{d}s$ όπου c είναι το τόξο του κύκλου $x^2+y^2+z^2=1$ και όπου ισχύει $x=y$, $x,y,z \geq 0$ το οποίο διαγράφεται κατά την θετική φορά των z.

Λύση

Η καμπύλη c είναι το τόξο της σφαίρας που ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο και μπορεί να παραμετροποιηθεί, θέτοντας $z=t$, ως εξής

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-t^2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-t^2}, \qquad z = t,$$

όπου

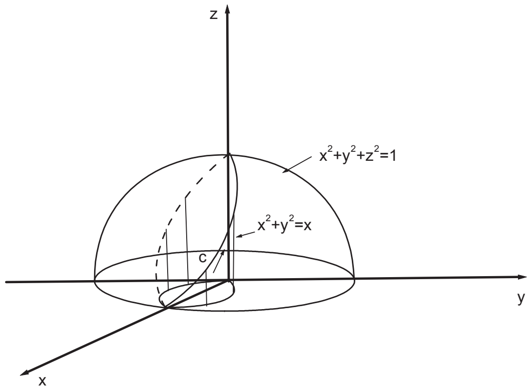
$$\dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \dot{y} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \dot{z} = 1,$$

με όρια ολοκλήρωσης $t: 0 \longrightarrow 1$. Επίσης θα έχουμε $(x+y) = \sqrt{2}\sqrt{1-t^2}$ και

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται συνεπώς ως εξής

$$I = \int_c (x+y)\mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_0^1 \mathrm{d}t = 1.$$



Σχήμα 6.15: Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στην άσκηση 3.

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$I = \int_c \frac{y+z}{x} \mathrm{d}s = 2\int_{t=0}^{\pi/4} \tan t \ \mathrm{d}t = 2\Big[\ \ln(\cos t)\Big]_{t=0}^{\pi/4} = \ln 2.$$

Άσκηση 3.

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_c y \mathrm{d}s$ όπου c είναι το τόξο της καμπύλης του πρώτου ογδόου των αξόνων που προκύπτει ως τομή των επιφανειών $x^2+y^2+z^2 = 1$ και $x^2+y^2 = x$.

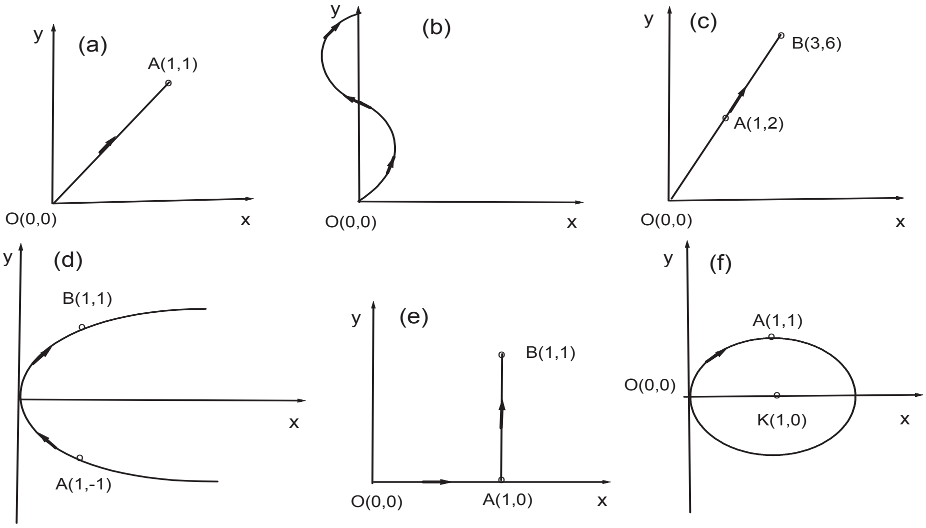
Λύση

Το τόξο είναι η τομή της σφαιρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και της κυλινδρικής επιφάνειας

$$x^2 + y^2 = x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Εφόσον η προβολή του παραπάνω τόξου στο επίπεδο xy είναι μέρος της περιφέρειας του κύκλου $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ όπου $x, y \geq 0$ μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \qquad y = \frac{1}{2}\sin t, \qquad z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}},$$



Σχήμα 6.16: Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στην άσκηση 4.

Λύση

Όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα υπολογίζονται στο επίπεδο xy και ο τύπος ολοκλήρωσης σύμφωνα με τη σχέση (6.28) είναι

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \, \mathrm{d}t.$$

a) Αρχικά παραμετροποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα OA πάνω στο οποίο υπολογίζεται το ολοκλήρωμα. Η παραμετροποίηση του είναι προφανώς $y = x$. Έτσι αν θέσουμε $x = t$, θα έχουμε συνολικά

$$y = t, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{y} = 1, \quad 0 \le t \le 1,$$

και επίσης

$$P(x,y) = 2x = 2t, \qquad Q(x,y) = 6(x-y) = 0.$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \, \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{1} (2t \cdot 1 + 0 \cdot 1) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1} 2t\mathrm{d}t = 1. \end{aligned}$$

και επίσης είναι

$$P(x,y) = 2x = 2t^2, \qquad Q(x,y) = 6(x-y) = 6(t^2 - t).$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πλέον ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \mathrm{d}t = \int_{t=-1}^{1} \Big[2t^2 \cdot 2t + 6(t^2 - t) \cdot 1 \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=-1}^{1} 4t^3 \mathrm{d}t + \int_{t=-1}^{1} 6t^2 \mathrm{d}t + \int_{t=-1}^{1} (-6t) \mathrm{d}t = 0 + 4 + 0 = 4. \end{aligned}$$

e) Η καμπύλη ολοκλήρωσης διαιρείται στις διαδρομές $O \to A$ και $A \to B$ οι οποίες έχουν διαφορετική παραμετροποίηση. Έτσι σε κάθε μία περίπτωση θα έχουμε:

$$O \to A: \; x = t, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0, \quad 0 \le t \le 1,$$

όπου

$$P(x,y) = 2x = 2t, \qquad Q(x,y) = 6(x-y) = 6(t-0) = 6t,$$

και επίσης

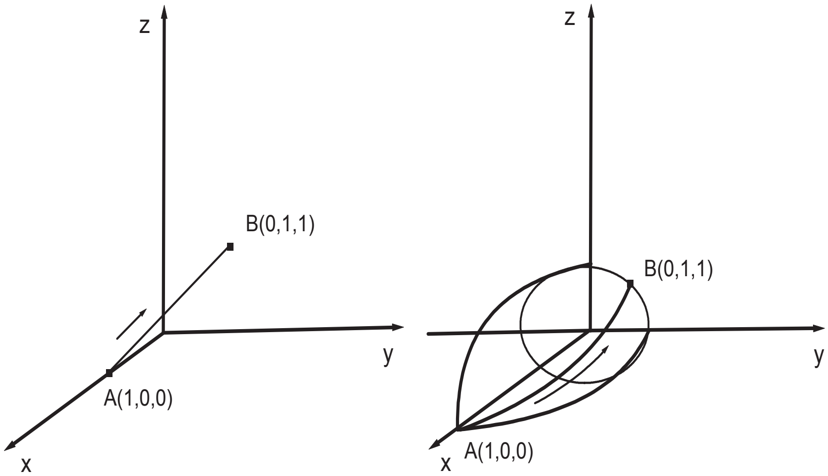
$$A \to B: \; x = 1, \quad y = t, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = 1, \quad 0 \le t \le 1,$$

όπου

$$P(x,y) = 2x = 2, \qquad Q(x,y) = 6(x-y) = 6(1-t).$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως άθροισμα δύο ολοκληρωμάτων και είναι

$$\begin{aligned} I &= \int_{c} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{O \to A} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \mathrm{d}t + \int_{A \to B} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1} \Big[2t \cdot 1 + 6t \cdot 0 \Big] \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1} \Big[2 \cdot 0 + 6(1-t) \cdot 1 \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1} 2t \mathrm{d}t + \int_{t=0}^{1} 6(1-t) \mathrm{d}t = 1 + 3 = 4. \end{aligned}$$



Σχήμα 6.17: Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στην άσκηση 6.

Εφαρμόζοντας τον τύπο ολοκλήρωσης (6.28) θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) + R(t)\dot{z}(t) \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{\pi} \Big[(\cos t \sin t) \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t + 8t^3 \cdot 2 \Big] \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{\pi} 16t^3 \mathrm{d}t = 4\pi^4. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.
Να υπολογιστεί το έργο που παράγει η δύναμη

$$\bar{F} = \mathrm{e}^x \vec{i} + \mathrm{e}^z \vec{j} + xyz\vec{k},$$

η οποία μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της από το σημείο $A(1,0,0)$ στο σημείο $B(0,1,1)$,
(α) κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB,
(β) κατά μήκος της καμπύλης $2x + y^2 + z^2 = 2$, $y = z$, $x \geq 0$.

Λύση
α) Η παραμετροποίηση του ευθύγραμμου τμήματος AB είναι

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} = \vec{i} + t\left(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right) = (1-t)\,\vec{i} + t\vec{j} + t\vec{k},$$

Γ. Θεώρημα του Green και διάφορες εφαρμογές του

Άσκηση 7.

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \oint -x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y$ **όπου** c **είναι η περιφέρεια του κύκλου** $x^2+y^2=a^2$**,**
α) ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα,
β) εφαρμόζοντας τον τύπο του Green.

Λύση

α) Η περιφέρεια του κύκλου μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad \dot{x} = -a\sin t, \qquad \dot{y} = a\cos t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

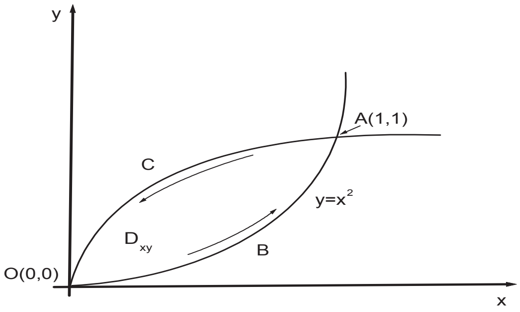
$$\begin{aligned} I &= \oint -x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y \\ &= \int_{t=0}^{t=2\pi} \Big(-(a\cos t)^2(a\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(a\sin t)^2(a\cos t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= 2a^4\int_{t=0}^{t=2\pi} \cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^4}{2}\int_{t=0}^{t=2\pi}\sin^2(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{a^4}{4}\int_{x=0}^{4\pi}\sin^2(x)\mathrm{d}x = \frac{a^4}{4}2\pi = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

β) Οι συναρτήσεις $P(x,y) = -x^2y$ και $Q(x,y) = xy^2$ είναι συνεχείς με συνεχείς μερικές παραγώγους στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου και επίσης είναι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -x^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Green στην κλειστή καμπύλη c που περιβάλει την επιφάνεια κυκλικού δίσκου με ακτίνα a θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \oint -x^2y\mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}y = \int_{D_{xy}}\int\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-x^2y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{D_{xy}}\int (y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{2\pi}\int_{\rho=0}^{a}\rho^2\mathrm{d}\rho\mathrm{d}t \\ &= \int_{\rho=0}^{a}\rho^3\mathrm{d}\rho\int_{t=0}^{2\pi}\mathrm{d}t = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$



Σχήμα 6.18: Το παραπάνω σχήμα αναφέρεται στην άσκηση 8.

σχήμα (6.18).
Κατά μήκος του τόξου OBA επιλέγουμε την παραμετροποίηση

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I_{OBA} &= \int_{OBA} (2xy - x^2)\mathrm{d}x + (x + y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{t=0}^{1} \Big((2tt^2 - t^2) \cdot 1 + (t + t^4) \cdot (2t) \Big) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1} (2t^5 + 2t^3 + t^2)\mathrm{d}t = \frac{7}{6}. \end{aligned}$$

Κατά μήκος του τόξου ACO επιλέγουμε την παραμετροποίηση

$$x = t^2, \qquad y = t, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I_{ACO} &= \int_{ACO} (2xy - x^2)\mathrm{d}x + (x + y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{t=0}^{1} \Big((2t^2t - t^4) \cdot (2t) + (t^2 + t^2) \cdot 1 \Big) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{1} (-2t^5 + 4t^4 + 2t^2)\mathrm{d}t = -\frac{17}{15}. \end{aligned}$$

Συνολικά θα έχουμε

$$I = I_{OBA} + I_{ACO} = \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

κατά μήκος του άξονα (ή παράλληλα) $x'x$ η μεταβλητή y παραμένει σταθερή και μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή x ενώ κατά μήκος του άξονα (ή παράλληλα) $y'y$ η μεταβλητή y παραμένει σταθερή και μεταβάλλεται μόνο η μεταβλητή y . Έτσι θα έχουμε συνολικά

$$\begin{aligned}
I &= \int_{c:O\to A}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+\int_{c:A\to B}(y^2-2xy)\mathrm{d}y \\
&+ \int_{c:B\to C}(x^2-xy^3)\mathrm{d}x+\int_{c:C\to O}(y^2-2xy)\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=0}^{2}(x^2-x(0)^3)\mathrm{d}x+\int_{y=0}^{2}(y^2-2(2)y)\mathrm{d}y \\
&+ \int_{x=2}^{0}(x^2-x(2)^3)\mathrm{d}x+\int_{y=2}^{0}(y^2-2(0)y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{3}-\frac{16}{3}+\frac{40}{3}-\frac{8}{3}=8.
\end{aligned}$$

β) Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$P(x,y)=x^2-xy^3,\quad Q(x,y)=y^2-2xy,$$

και επίσης ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-3xy^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=-2y,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-2y+3xy^2,$$

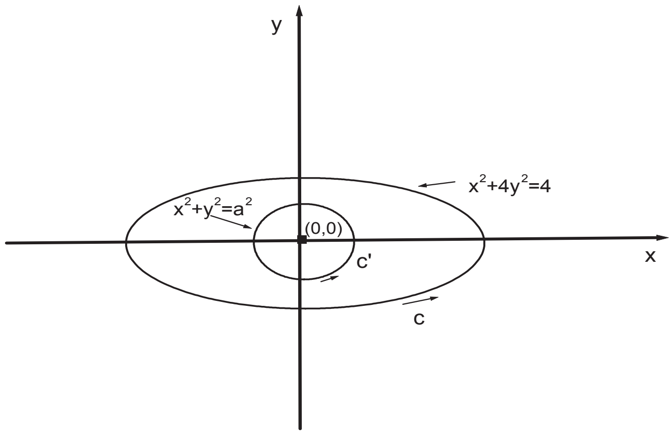
το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται σύμφωνα με το θεώρημα Green

$$\begin{aligned}
I &= \oint (x^2-xy^3)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int\int_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{2}(-2y+3xy^2)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{x=0}^{2}(-4+8x)\mathrm{d}x=8.
\end{aligned}$$

Άσκηση 10.

Δίνεται η παραβολή $y=x^2$ και η ευθεία $y=x+2$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τόπου που ορίζεται από την τομή τους με τη χρήση του θεωρήματος Green.

Λύση



Σχήμα 6.21: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 11.

2) Η καμπύλη c_2 παραμετροποιείται ως εξής

$$c_2: \qquad x=t, \qquad y=t+2, \qquad t:2\longrightarrow -1,$$

και συνεπώς θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_{c_2} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{t=2}^{-1}\left(-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{t=2}^{t=-1}\left(-(t+2)(1)+t(1)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{t=2}^{-1} -2\mathrm{d}t = 3. \end{aligned}$$

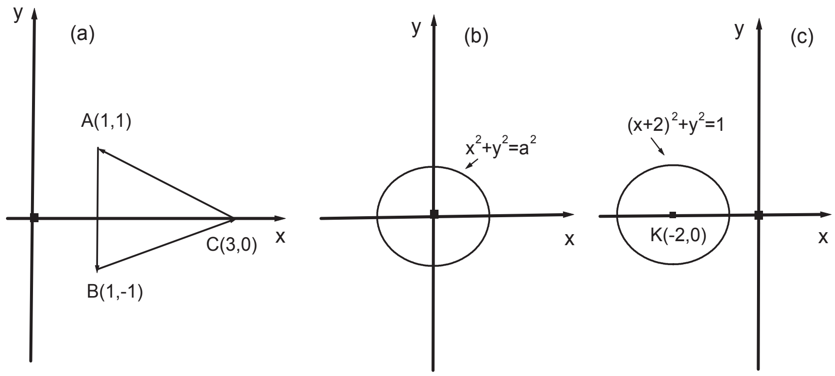
Συνολικά συνεπώς θα έχουμε

$$S = I_1 + I_2 = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}.$$

Υπόδειξη: Να υπολογιστεί το ζητούμενο εμβαδόν με τη βοήθεια διπλού ολοκληρώματος.

Άσκηση 11.
Να υπολογιστεί με εφαρμογή του θεωρήματος του Green το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$



Σχήμα 6.22: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 12.

τα σημεία $A(1,1)$, $B(1,-1)$ και $C(3,0)$,
b) κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου $x^2+y^2=a^2$,
c) κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου $x^2+y^2+4x+3=0$.

Λύση

a) Οι συναρτήσεις

$$P=\frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2},$$

ορίζονται παντού στο εσωτερικό του τριγώνου ABC όπως φαίνεται στο σχήμα (6.22)(a). Μπορούμε συνεπώς να εφαρμόσουμε το θεώρημα Green. Επιπλέον έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται τώρα ως εξής

$$I=\oint\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{D_{xy}}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{D_{xy}}\int 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

b) Στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.22)(b), υπάρχει το σημείο $(0,0)$ στο οποίο οι συναρτήσεις P και Q δεν ορίζονται. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green. Επειδή όμως όπως δείξαμε ισχύει $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-a^2x^2 + b^2y^2}{(a^2x^2 + b^2y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Σύμφωνα με τη θεωρία το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης που περιέχει το σημείο $(0, 0)$. Μία τέτοια είναι η περιφέρεια της έλλειψης $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$. Η επιλογή αυτή όπως θα δείξουμε παρακάτω απλοποιεί σημαντικά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Η παραμετροποίηση της περιφέρειας της έλλειψης είναι

$$x = \frac{1}{a}\cos t, \quad y = \frac{1}{b}\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πλέον ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \oint_{c:x^2+y^2=r^2} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{a^2x^2 + b^2y^2} = \oint_{c:a^2x^2+b^2y^2=1} \left(\frac{-y\dot{x} + x\dot{y}}{a^2x^2 + b^2y^2}\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \left((-\frac{1}{b}\sin t)(-\frac{1}{a}\sin t) + (\frac{1}{a}\cos t)(\frac{1}{b}\cos t) \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{t=0}^{2\pi} \frac{1}{ab}\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}. \end{aligned}$$

Άσκηση 14.
Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

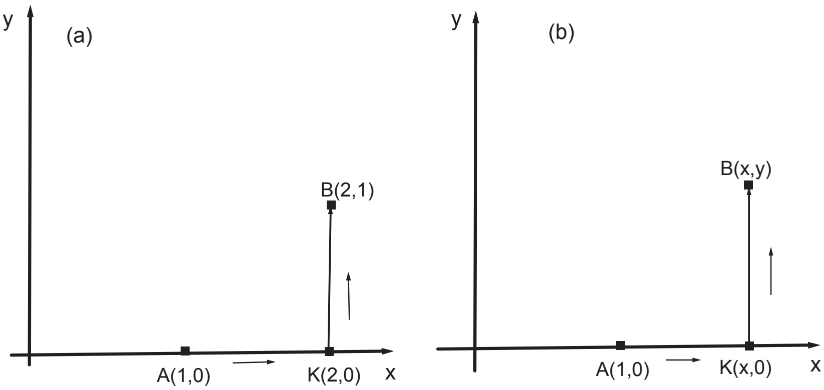
$$I = \oint \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}\mathrm{d}y,$$

κατά μήκος τυχαίας κλειστής καμπύλης η οποία περιβάλει τον κυκλικό δίσκο $x^2 + y^2 = a^2$.

Λύση

Ο τόπος D ο οποίος περιβάλλεται από την τυχαία κλειστή καμπύλη c περιέχει μία τρύπα η οποία ταυτίζεται με τον κυκλικό δίσκο $x^2 + y^2 = a^2$ όπως φαίνεται στο σχήμα (6.23). Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει από την απαίτηση η ποσότητα μέσα στη ρίζα του παρανομαστή της ολοκληρωτέας συνάρτησης να είναι θετική ποσότητα, δηλαδή πρέπει $x^2 + y^2 - a^2 > 0$. Παρατηρούμε επίσης ότι ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 - a^2)^{3/2}}.$$



Σχήμα 6.24: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 15.

όπου $A(1,0)$ **και** $B(2,1)$.
α) Να δειχθεί ότι η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη ολοκλήρωσης η οποία ενώνει τα σημεία A **και** B.
β) Να βρεθεί μία συνάρτηση $U = U(x,y)$ **τέτοια ώστε**

$$\mathrm{d}U = (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y.$$

γ) Να υπολογισθεί η τιμή του ολοκληρώματος I.

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Πράγματι εφόσον είναι

$$P(x,y) = 2xy - y^4 + 3, \quad Q(x,y) = x^2 - 4xy^3,$$

θα έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 4y^3.$$

β) Εφόσον η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του δρόμου ολοκλήρωσης θα υπάρχει συνάρτηση $U(x,y)$ τέτοια ώστε $\mathrm{d}U = (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y$. Τώρα εφόσον είναι

$$\mathrm{d}U(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί εναλλακτικά θεωρώντας το ενδιάμεσο σημείο $K(2,0)$ (βλέπε σχήμα (6.24)). Έτσι το ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος της τεθλασμένης καπύλης AKB ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \int_A^B (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y \\ &= \int_{A\to K} (2xy - y^4 + 3)\mathrm{d}x + \int_{K\to B} (x^2 - 4xy^3)\mathrm{d}y \\ &= \int_{x=1}^{2} (2x(0) - (0)^4 + 3)\mathrm{d}x + \int_{y=0}^{1} ((2)^2 - 4(2)y^3)\mathrm{d}y = 3 + 2 = 5. \end{aligned}$$

Άσκηση 16.
Έστω το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}.$$

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$ πάνω σε τυχαία κλειστή καμπύλη η οποία περικλείει το σημείο $O(0,0)$ και να υπολογιστεί η μορφή της δυναμικής συνάρτησης $U(x,y)$.

Λύση
Οι συναρτήσεις P και Q δεν ορίζονται στο σημείο $O(0,0)$. Επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Έτσι, σύμφωνα με την θεωρία των πολλαπλά συνεκτικών τόπων, το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης η οποία περιέχει το σημείο $O(0,0)$. Επιλέγουμε να το υπολογίσουμε κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ η οποία παραμετροποιείται ως εξής

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad \dot{x} = -\sin\theta, \quad \dot{y} = \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

ενώ θα έχουμε επίσης

$$P = -\sin\theta, \qquad Q = \cos\theta.$$

Οι συναρτήσεις $P = -\dfrac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ και $Q = -\dfrac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ δεν ορίζονται στο σημείο $O(0,0)$ ενώ επιπλέον έχουμε ότι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3kxy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Έτσι, σύμφωνα με την θεωρία των πολλαπλά συνεκτικών τόπων, το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης η οποία περιέχει το σημείο $(0,0)$. Επιλέγουμε να το υπολογίσουμε κατά μήκος της περιφέρειας του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ η οποία παραμετροποιήται ως εξής

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad \dot{x} = -\sin\theta, \quad \dot{y} = \cos\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

ενώ θα έχουμε επίσης

$$P = -k\sin\theta, \qquad Q = k\cos\theta.$$

Το ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} I &= \oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint -\frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}y \\ &= \oint -k\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\dot{x} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}\dot{y}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \Big((-k\cos\theta)(-\sin\theta) - k(\sin\theta)(\cos\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta = 0. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $U(x,y)$ θα είναι συνεπώς μονότιμη και προκύπτει ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= P(x,y) = -k\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \Rightarrow \\ U(x,y) &= \int -k\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\mathrm{d}x + C(y) \Rightarrow \\ U(x,y) &= \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}} + C(y). \end{aligned}$$

Επίσης πρέπει

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q \Rightarrow -k\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{\mathrm{d}C(y)}{\mathrm{d}y} = -k\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

εφαρμόζοντας το θεώρημα Green βρίσκουμε ότι λαμβάνουν την τιμή 0. Θα δείξουμε παρακάτω τι συμβαίνει με τα ολοκληρώματα πάνω σε κλειστή καμπύλη που περικλείει το σημείο $(0,0)$. Για την διερεύνηση συνεπώς όλων των παραπάνω μπορούμε να επικεντρωθούμε στις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:
a) Το ολοκλήρωμα από το σημείο $A(1,0)$ στο $B(2,2)$ γίνεται ακολουθώντας την καμπύλη σχήματος (6.25a). Επειδή, σύμφωνα με τα παραπάνω, η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη του δρόμου επιλέγουμε τη διαδρομή $A(1,0) \to C(2,0) \to B(2,2)$ και το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_c -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_{A(1,0)}^{C(2,0)} -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \int_{C(2,0)}^{B(2,2)} \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=0}^{2} \frac{2}{2^2+y^2}\mathrm{d}y = \left[\arctan(\frac{y}{2})\right]_{y=0}^{y=2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

b) Επιλέγουμε την καμπύλη c του σχήματος (6.25b) η οποία περικλείει το σημείο $(0,0)$. Το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε γράφεται συνοπτικά

$$I = \int_c = \int_{ADCB} = \oint_{ADCA} + \int_{ACB}.$$

Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_{ACB}$ έχει υπολογιστεί στην προηγούμενη περίπτωση και είναι $\int_{ACB} = \frac{\pi}{4}$. Το ολοκλήρωμα $\oint_{ADCA}$ είναι ένα ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη η οποία περικλείει το σημείο $(0,0)$ ενώ επιπλέον ισχύει

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Συνεπώς μπορούμε σύμφωνα με τη θεωρία να επιλέξουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα επιλέγοντας οποιοδήποτε κλειστό δρόμο που περικλείει το σημείο $(0,0)$ και ένας τέτειος είναι η περιφέρεια του κύκλου $x^2+y^2=1$ η οποία παραμετροποιείται ως εξής:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad \dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -2a\sin t + 2a\sin 2t.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το εμβαδόν του τόπου δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_c \left(-y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi}\Big(-(2a\sin t - a\sin 2t)(-2a\sin t + 2a\sin 2t) \\ &+ (2a\cos t - a\cos 2t)(2a\cos t - 2a\cos 2t)\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi}\big(6a^2 - 6a^2\sin t\sin 2t - 6a^2\cos t\cos 2t\big)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t, \qquad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

και μετά από λίγες πράξεις θα έχουμε

$$S = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{2\pi}\big(6a^2 - 6a^2\cos t\big)\,\mathrm{d}t = 6a^2\pi.$$

Υπόδειξη: Σχεδιάστε τον τόπο, έστω D, ο οποίος περιβάλλεται από την παραπάνω καμπύλη και υπολογίστε το εμβαδόν του χρησιμοποιώντας το διπλό ολοκλήρωμα $S = \int_D\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Άσκηση 20

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων το εμβαδόν του τόπου

$$D_{xy} = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5^2, \quad \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} \geq 1\}.$$

Λύση

Το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε δίνεται από τη σχέση $S = S_1 - S_2$ όπου S_1 το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και S_2 το εμβαδόν της έλλειψης όπως φαίνεται στο σχήμα (6.26).

Εμβαδόν S_1: Από τον τύπο του Green γνωρίζουμε ότι

$$S_1 = \frac{1}{2}\oint -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Συνεπώς συνολικά θα έχουμε: $S = S_1 - S_2 = 25\pi - 12\pi = 13\pi$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το εμβαδόν του παραπάνω τόπου χρησιμοποιώντας α) ένα από τους τύπος $S = -\oint_c y\mathrm{d}x$ *και* $S = \oint_c x\mathrm{d}y$ *και β) το διπλό ολοκλήρωμα* $S = \int_D\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Άσκηση 21

Να υπολογισθεί με δύο τρόπους το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \oint_c y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y$ όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου $\mid x \mid + \mid y \mid = 1$.

Λύση

Η καμπύλη ολοκλήρωσης όπως φαίνεται στο σχήμα (6.27) είναι περίμετρος του τετραγώνου $ABCD$.

α′ τρόπος: Το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αποτελείται από τα παρακάτω τέσσερα επιμέρους ολοκληρώματα:

1) $A \longrightarrow B$. Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι η $x + y = 1$ με παραμετροποίηση $(x = t,\ y = 1 - t, \quad t : 1 \longrightarrow 0)$ και συνεπώς είναι

$$I_1 = \int_{t=1}^{0} \Big((1-t)^3(1) - (t^3)(-1) \Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

2) $B \longrightarrow C$. Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι η $-x + y = 1$ με παραμετροποίηση $(x = t,\ y = 1 + t, \quad t : 0 \longrightarrow -1)$ και συνεπώς είναι

$$I_2 = \int_{t=0}^{-1} \Big((1+t)^3(1) - (t^3)(1) \Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

3) $C \longrightarrow D$. Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι η $-x - y = 1$ με παραμετροποίηση $(x = t,\ y = -1 - t, \quad t : -1 \longrightarrow 0)$ και συνεπώς είναι

$$I_3 = \int_{t=-1}^{0} \Big((-1-t)^3(1) - (t^3)(-1) \Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

4) $D \longrightarrow A$. Η καμπύλη ολοκλήρωσης είναι η $x - y = 1$ με παραμετροποίηση $(x = t,\ y = -1 + t, \quad t : 0 \longrightarrow 1)$ και συνεπώς είναι

$$I_4 = \int_{t=0}^{1} \Big((-1+t)^3(1) - (t^3)(1) \Big)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}.$$

$x\mathrm{d}z$, **κατά μήκος της καμπύλης** c, **η οποία είναι η τομή των επιφανειών** $x^2+y^2+z^2=1$ **και** $x+z=1$.

Λύση

Αρχικά πρέπει να προσδιοριστεί η παραμετρική παράσταση της καμπύλης c. Αυτή προκύπτει αν βρούμε πρώτα την προβολή της στο επίπεδο xy και αυτό γίνεται απαλείφοντας από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών την μεταβλητή z. Έτσι θα έχουμε

$$x^2+y^2+(1-x)^2=1^2 \Rightarrow \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1.$$

Η παραπάνω σχέση είναι εξίσωση έλλειψης και μπορεί να παραμετροποιηθεί ως εξής

$$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t, \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \quad 0\le t\le 2\pi.$$

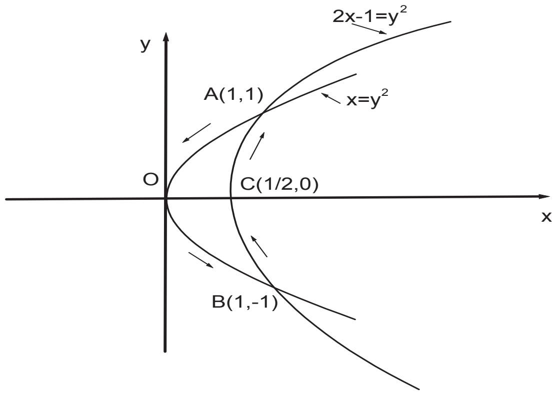
Η παραμετρική παράσταση της καμπύλης c θα είναι συνεπώς

$$x=\frac{1}{2}(1+\cos t), \quad y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t, \quad z=1-x=\frac{1}{2}(1-\cos t), \quad 0\le t\le 2\pi.$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται τώρα ως εξής

$$\begin{aligned}
I &= \oint_c y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\oint_c\left(y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+z\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{2\pi}\left((\frac{\sqrt{2}}{2}\sin t)(-\frac{1}{2}\sin t)+(\frac{1}{2}(1-\cos t))(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t)\right.\\
&+ \left.(\frac{1}{2}(1+\cos t))(\frac{1}{2}\sin t)\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cos t+\frac{1}{4}\sin t+\frac{1}{4}\cos t\sin t\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{2\pi}(-\frac{\sqrt{2}}{4})\mathrm{d}t=-\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε το παραπάνω κλειστό ολοκλήρωμα εφαρμόζοντας τον τύπο του Stokes και επαληθεύστε το αποτέλεσμα .



Σχήμα 6.28: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 23.

Υπόδειξη : Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί επίσης με εφαρμογή του τύπου Green με τον παρακάτω τρόπο

$$\begin{aligned} I &= \int_c xy^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y = \int_D\int \left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_D\int \Big(-2x - 2xy\Big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{y=-1}^{1}\left(\int_{x=y^2}^{1/2(y^2+1)}\Big(-2x - 2xy\Big)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = -\frac{8}{15}. \end{aligned}$$

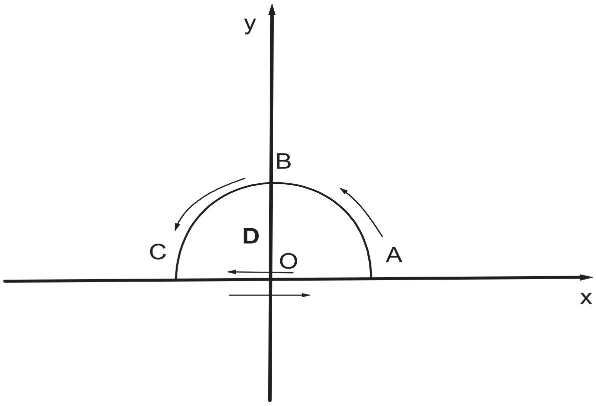
Το εμβαδόν του τόπου D υπολογίζεται εύκολα από το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$S = \int_D\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=-1}^{1}\left(\int_{x=y^2}^{1/2(y^2+1)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \frac{2}{3}.$$

Υπόδειξη: Υπολογίστε το παραπάνω εμβαδόν χρησιμοποιώντας επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

Άσκηση 24

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_c |x-y|\mathrm{d}y$**, όπου** c **είναι η καμπύλη** $x = a\cos t$**,** $y = a|\sin t|$ $(a > 0)$**,** $-\pi/4 \le t \le \pi/2$**.**



Σχήμα 6.30: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 25.

Το παραπάνω ολοκλήρωμα κατά μήκος του ημικυκλίου ABC, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.30), μπορεί να γραφεί ως εξής

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{ABC} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y e^{xy} \right) \mathrm{d}x + (x + x e^{xy})\,\mathrm{d}y \\
&= \oint_{ABCOA} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y e^{xy} \right) \mathrm{d}x + (x + x e^{xy})\,\mathrm{d}y \\
&- \int_{AOC} \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y e^{xy} \right) \mathrm{d}x + (x + x e^{xy})\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Στο κλειστό ολοκλήρωμα, κατά μήκος του ημικυκλίου, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green. Έτσι θα έχουμε

$$
\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2 + e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - x^2 - y^2.
$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες όπου

$$
x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta,
$$

με όρια ολοκλήρωσης

$$
0 \leq \rho \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi,
$$

όπου c είναι η καμπύλη

$$\vec{r}(t) = \mathrm{e}^t \cos t \vec{i} + \mathrm{e}^t \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση

Το ζητούμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί, σύμφωνα με το σχήμα (6.31) και ως διαφορά δύο ολοκληρωμάτων, δηλαδή

$$I_{ACDEB} = I_{ACDEBA} - I_{AB}.$$

Για τον υπολογισμό του κλειστού ολοκληρώματος I_{ACDEBA} μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Green αφού λάβουμε πρώτα υπόψη ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{1+x^2} - x^2 - y^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_{ACDEBA} &= \oint \left(\frac{2xy}{1+x^2} - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 + \frac{2}{3} \right) \mathrm{d}x + \ln(1+x^2) \mathrm{d}y \\ &= \int_D \int \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Για τον υπολογιμό του παραπάνω ολοκληρώματος θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες όπου

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta, \qquad \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta.$$

Τα όρια της μεταβλητής ρ υπολογίζονται από την παραμετρική μορφή της καμπύλης και για σταθερό $\theta = t$ θα έχουμε

$$0 \le \rho^2 \le x^2 + y^2 = (\mathrm{e}^t \cos t)^2 + (\mathrm{e}^t \sin t)^2 \Rightarrow 0 \le \rho \le \mathrm{e}^t,$$

και φυσικά

$$0 \le \theta \le 2\pi.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I_{ACDEBA} &= \int_D \int \left(x^2 + y^2 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_G \int \rho^2 \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{\rho=0}^{\mathrm{e}^\theta} \rho^3 \mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\theta = \frac{1}{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{4\theta} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \left(\mathrm{e}^{8\pi} - 1 \right) = \frac{1}{16} \left(\mathrm{e}^{8\pi} - 1 \right). \end{aligned}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε

$$P(x,y)=0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Έτσι θα έχουμε

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \to Q(x,y)=\int \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y \to Q(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}+C(y).$$

Η συνάρτηση $C(y)$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής y και μπορούμε να θέσουμε $C(y)=0$. Το ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστής διαδρομής $ABCO$ αποτελείται από τρείς επιμέρους καμπύλες με την παρακάτω παραμετροποίηση

$$A\to B: x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta, \quad \pi/2\le\theta\le\pi.$$

$$B\to O: y=0, \quad \mathrm{d}y=0, \quad -1\le x\le 0.$$

$$O\to A: x=0, \quad \mathrm{d}x=0, \quad 0\le y\le 1.$$

Τα αντίστοιχα ολοκληρώματα θα είναι τώρα

$$I_{AB}=\int_{A\to B}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{\theta=\pi/2}^{\pi}\sin\theta(\cos\theta)\mathrm{d}\theta=-\frac{1}{2}.$$

$$I_{BO}=\int_{B\to O}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=0.$$

$$I_{OA}=\int_{O\to A}Q(x,y)\mathrm{d}y=\int y\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}y=\int_{y=0}^{1}y^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

Συνολικά θα έχουμε

$$I=I_{AB}+I_{BO}+I_{OA}=-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

β′ τρόπος: Για επαλήθευση υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα αφού κάνουμε πρώτα τον κατάλληλο μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta, \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta,$$

αντίστοιχα τεταρτημόρια) όπως φαίνεται στο σχήμα (6.33). Η παραμετροποίηση της περιφέρειας του κύκλου είναι

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta,$$

ενώ τα αντίστοιχα επικαμπύλια ολοκληρώματα στις 3 περιοχές υπολογίζονται ως εξής:
<u>1ο τεταρτημόριο:</u> Ισχύει $|x| = x,\ |y| = y$ και συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_c \frac{1}{x+y}\mathrm{d}x + \frac{1}{x+y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{1}{a(\cos\theta+\sin\theta)}(-a\sin\theta) + \frac{1}{a(\cos\theta+\sin\theta)}(a\cos\theta) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = 0.
\end{aligned}$$

<u>2ο τεταρτημόριο:</u> Ισχύει $|x| = -x,\ |y| = y$ και συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_c \frac{1}{-x+y}\mathrm{d}x + \frac{1}{-x+y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1}{a(-\cos\theta+\sin\theta)}(-a\sin\theta) + \frac{1}{a(-\cos\theta+\sin\theta)}(a\cos\theta) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \left(\frac{\cos\theta-\sin\theta}{-\cos\theta+\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = -\int_{\theta=\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}\theta = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

<u>3ο τεταρτημόριο:</u> Ισχύει $|x| = -x,\ |y| = -y$ και συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_c \frac{1}{-x-y}\mathrm{d}x + \frac{1}{-x-y}\mathrm{d}y \\
&= \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1}{a(-\cos\theta-\sin\theta)}(-a\sin\theta) + \frac{1}{a(-\cos\theta-\sin\theta)}(a\cos\theta) \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{-\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = 0.
\end{aligned}$$

Συνολικά θα έχουμε

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 - \frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

την μορφή

$$I = \frac{1}{9}\oint (x^2 - y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -1,$$

από τον τύπο του Green θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{9}\oint (x^2 - y)\mathrm{d}x + (x - y)\mathrm{d}y = \int_{D_{xy}}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{9}\int_{D_{xy}}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{2}{9}\pi 2^2 = \frac{8\pi}{9}. \end{aligned}$$

Στο παραπάνω υπολογισμό λάβαμε υπόψη ότι το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{D_{xy}}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ δίνει απλά το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου $(x-1)^2 + y^2 = 2^2$ το οποίο είναι προφανώς $\pi 2^2 = 4\pi$.

Άσκηση 30

Να υπολογισθεί με τη βοήθεια του τύπου του Green το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)\mathrm{d}y$$

όπου c **η καμπύλη** $\{x = 1 + \cos t, y = 2 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$**. Μπορεί να εφαρμοστεί ο τύπος του Green για την καμπύλη** c'**,** $\{x = 2\cos t, y = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi\}$;

Λύση

α) Η καμπύλη ολοκλήρωσης, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.35), είναι η περιφέρεια του κύκλου $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο του Green και λάβουμε υπόψη ότι

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2,$$

το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} I &= \oint_c \sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + y\left(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D\int y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης στον ημιχώρο $z > 0$ **και υπολογίστε την τιμή του από το σημείο** $A(0,0,1)$ **μέχρι το** $B(1,1,1)$**.**

Λύση
Για να δείξουμε ότι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$, όπου

$$\vec{F} = \frac{y}{z}\vec{i} + \frac{x}{z}\vec{j} - \frac{xy}{z^2}\vec{k}.$$

Πράγματι έχουμε

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \left(-\frac{x}{z^2} + \frac{x}{z^2}\right)\vec{i} + \left(-\frac{y}{z^2} + \frac{y}{z^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\right)\vec{k} = \vec{0}.$$

Για να υπολογίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος από το σημείο $A(0,0,1)$ μέχρι το σημείο $B(1,1,1)$ μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε δρόμο (εντός του ημιχώρου $z > 0$). Η πιο απλή διαδρομή είναι η ευθεία που ενώνει τα δύο σημεία και έχει την παραμετροποίηση

$$x = t, \quad y = t, \quad z = 1, \quad 0 \le t \le 1.$$

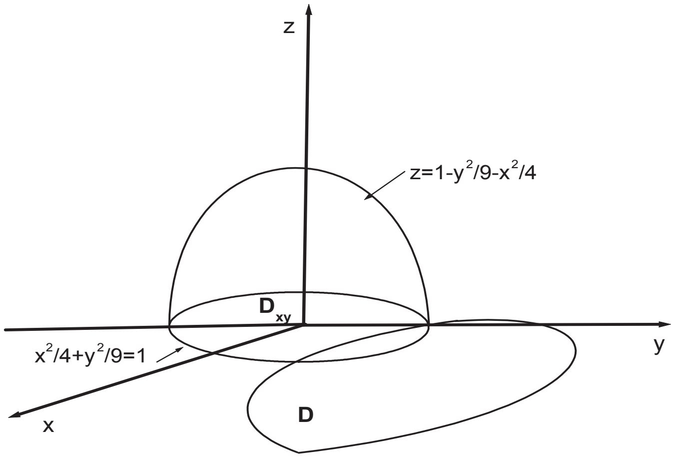
Έτσι θα έχουμε

$$I = \int_c \frac{y}{z}\mathrm{d}x + \frac{x}{z}\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z = \int_{t=0}^{1}\left(\frac{t}{1}\cdot 1 + \frac{t}{1}\cdot 1 - \frac{t^2}{1^2}\cdot 0\right)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{1} 2t\mathrm{d}t = 1.$$

Άσκηση 32
Έστω η επιφάνεια S **με εξίσωση** $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ **και η διανυσματική συνάρτηση** $\vec{F}(x,y,z) = z^2\vec{i} + 3y^2\vec{j} + 2xz\vec{k}$**. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** $I = \displaystyle\int_c \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ **κατά μήκος της καμπύλης** c **που παριστάνει μια πλήρη περιστροφή πάνω στην επιφάνεια** S **με αρχή το σημείο** $A(\sqrt{2\pi},0,0)$ **και πέρας το σημείο** $B(0,0,2\pi)$**.**

Λύση
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης, αφού έχουμε

$$\mathrm{rot}\vec{F} = (0-0)\,\vec{i} + (2z - 2z)\,\vec{j} + (0-0)\,\vec{k} = \vec{0}.$$



Σχήμα 6.36: Το σχήμα αυτό αναφέρεται στην άσκηση 33.

Προφανώς ο όγκος αυτός γίνεται μέγιστος όταν προβολή D_{xy} της επιφάνειας z στο επίπεδο xy, η οποία είναι η έλλειψη $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$ ταυτίζεται με την επιφάνεια D. Αυτό θα συμβαίνει συνεπώς όταν η καμπύλη ολοκλήρωσης ταυτίζεται με την παραπάνω έλλειψη.

β′ τρόπος[1]**:** Υπάρχει ένας ακόμα τρόπος επίλυσης του παραπάνω προβλήματος ο οποίος βασίζεται στο λογισμό των μεταβολών. Ο τρόπος αυτός, αν και βρίσκεται έξω από σκοπό αυτού του βιβλίου, έχει μεγάλο ενδιαφέρον και τον παρουσιάζουμε ως μία διαφορετική προσέγγιση του προβλήματος. Θεωρούμε ότι η ζητούμενη καμπύλη έχει τη μορφή

$$\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j},$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} I &= \oint \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint \frac{x^2 y}{4}\mathrm{d}x + \left(x - \frac{xy^2}{9}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{x=a}^{b} \left[\frac{x^2 y(x)}{4} + \left(x - \frac{xy(x)^2}{9}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

[1] Η παρακάτω λύση μπορεί να παραληφθεί από τον αναγνώστη αφού δεν συνδέεται άμεσα με τη θεωρία του παρόντος βιβλίου. Για μία εισαγωγή στη θεωρία των μεταβολών παραπέμπουμε στο παράρτημα του βιβλίου ενώ για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο βιβλίο *Σημειώσεις Μαθηματικών Μεθόδων Φυσικής* Σ.Ε. Μάσεν, Εκδόσεις ΑΠΘ.

6.10 Άλυτες ασκήσεις 6ου κεφαλαίου

Α. Επικαμπύλια ολοκληρώματα α′ είδους

1. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_c xy\mathrm{d}s$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου $|x| + |y| = 1$.

2. Να υπολογιστεί το μήκος του τόξου:
   1. της αστεροειδούς καμπύλης $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$,
   2. της κυκλοειδούς καμπύλης $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$
   3. της καμπύλης $\rho = a \sin^3 \dfrac{\theta}{3}$, $0 \le \theta \le 3\pi$, $a > 0$,
   4. της καμπύλης που είναι η τομή της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και της κυλινδρικής επιφάνειας $x^2 + y^2 = x$.

3. α) Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y)$ κατά μήκος της καμπύλης η οποία δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την διανυσματική παράσταση $r = r(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, είναι

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(r\cos t, r\sin t)\sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

   β) Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης όπου είναι $r = 1 + \cos t,\ t \in [0, 2\pi]$.

Β. Επικαμπύλια ολοκληρώματα β′ είδους

4. Δίνεται η διανυσματική συνάρτηση $\vec{F} = ye^z\vec{i} + xe^z\vec{j} + xye^z\vec{k}$ και ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = 1$. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \oint_c \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ πάνω στις εξής καμπύλες:
   α) Στην τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο $z = 1$.
   β) Στην τομή του κυλίνδρου με το επίπεδο $x + y + z = 1$.

5. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_c \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^4 - y^4},$$

   όπου c είναι το άπειρο τόξο της καμπύλης $y = \sqrt{x^2 - 1}$, $x \ge 1$.

12. Να υπολογιστεί το έργο που παράγεται από τη δύναμη $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + 2\vec{k}$ όταν το σημείο εφαρμογής της διαγράφει την κλειστή διαδρομή $\overline{OA} + \widehat{AB} + \overline{BC} + \overline{CO}$, όπου OA, OC είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, AB είναι το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ και $BC//z'z$.

13. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_c y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x + x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$ όπου c είναι το τόξο της καμπύλης $y = \sin^7 x$, με αρχή το σημείο $O(0,0)$ και πέρας το $A(\pi, 0)$.

14. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$I = \int_c \mathrm{e}^x \sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^x \sin\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y,$$
όπου c είναι το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = 1$, $x \geq 0$, που διαγράφεται από το σημείο $(0,1)$ προς το σημείο $(0,-1)$.

15. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$I = \int_c (3x^2 + 2xy - 2x - y + 1)\mathrm{d}x + (x^2 - x)\mathrm{d}y,$$
όπου c είναι το ευθύγραμμο τμήμα AB με αρχή το σημείο $A(0,4)$ και πέρας το $B(1,1)$.

16. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$I = \int_{c:A\to B} \sin(yz)\mathrm{d}x + zx\cos(yz)\mathrm{d}y + xy\cos(yz)\mathrm{d}x,$$
όπου AB είναι το ίχνος μιας κατά τμήματα λείας καμπύλης που συνδέει τα σημεία $A(1,0,0)$ και $B(1,0,2\pi)$.

17. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_c y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y$ όπου c είναι το σύνορο του κλειστού ημιδακτυλίου D το οποίο κατασκευάζεται από τις περιφέρειες $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = 2^2$, με $y \geq 0$.

18. Για κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογιστεί το έργο του πεδίου δυνάμεων $\vec{F}$ κατά μήκος της αντίστοιχης καμπύλης c:

διανύσματα $\vec{r}_1$ και $\vec{r}_2$ τα οποία συνδέουν το τυχαίο σημείο P με τα άκρα του παραπάνω τόξου δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\theta = \vec{k} \cdot \left(\int_c \frac{\vec{r} - \vec{r}_P}{|\vec{r} - \vec{r}_P|^2} \times \mathrm{d}\vec{r} \right).$$

Γ. Θεώρημα του Green και διάφορες εφαρμογές του

24. Αν $\vec{F} = y\vec{i}$ δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ κατά μήκος ενός τόξου $\widehat{AB}$ στο επίπεδο xy είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας που φράσσεται από τον άξονα των x, το τόξο και τους άξονες των x-συντεταγμένων των A και B.

25. Δίνεται το πεδίο δυνάμεων

$$\vec{F} = \frac{x-1-y}{(x-1)^2+y^2}\vec{i} + \frac{x-1+y}{(x-1)^2+y^2}\vec{j},$$

και δύο τετράγωνα πλευράς $a = 1$, το πρώτο με κέντρο το $O(0,0)$ και το δεύτερο με κέντρο το $A(1,0)$. Να βρεθεί το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος της περιμέτρου των δύο τετραγώνων.

26. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint \frac{2-y}{x^2+(y-2)^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+(y-2)^2}\mathrm{d}y,$$

όπου c είναι η περιφέρεια της έλλειψης $\dfrac{9x^2}{25} + \dfrac{9(y-1)^2}{49} = 1$.

27. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c (y-2z)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (2x-y)\mathrm{d}z,$$

όπου c είναι η καμπύλη η οποία προκύπτει ως τομή των επιφανειών $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x - y + z = 0$, $(a > 0)$.

3. $I = \oint_c \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y$ όπου c μια περιφέρεια κύκλου με ακτίνα R στο διάστημα $R \in [1,2]$.

35. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \oint_c y^3\mathrm{d}x - x^3\mathrm{d}y$ όπου η καμπύλη c αποτελείται από τις καμπύλες $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2^2$, με $y \geq 0$ και τα τμήματα AB και CD με $A(-2,0)$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$, $D(2,0)$.

36. Να υπολογισθούν με τη βοήθεια του θεωρήματος του Green τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $I = \oint_c (x-y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$, όπου $c = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : x^2+y^2=2\}$.

β) $I = \oint_c y^2\mathrm{d}x - xy\mathrm{d}y$ όπου c είναι το σύνορο του τόπου

$D_{xy} = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq 1+x^2\}$.

37. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \frac{a^2}{2}\left(\oint_c \frac{-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y\right),$$

όπου c είναι ο κύκλος $x^2+y^2=b^2$, παριστάνει το εμβαδόν του κύκλου $c_1 : x^2+y^2=a^2$ $(0<a<b)$.

38. Με τη βοήθεια του τύπου του Green να δειχθεί ότι $I_1 - I_2 = 1/3$, όπου $I_1 = \int_{\overline{AB}} (x+y)^2\mathrm{d}x - (x-y)^2\mathrm{d}y$, $I_2 = \int_{\widehat{AB}} (x+y)^2\mathrm{d}x - (x-y)^2\mathrm{d}y$. Το $\overline{AB}$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το σημείο $A(0,0)$ και πέρας το $B(1,1)$ και το $\widehat{AB}$ είναι το τόξο της παραβολής $y=x^2$, με αρχή και πέρας τα σημεία A και B, αντίστοιχα.

39. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c \frac{xy}{1+x^2}\mathrm{d}x + \frac{xy}{1+y^2}\mathrm{d}y,$$

όπου c είναι το σύνορο του τόπου

$D_{xy} = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1/x\}$.

45. Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint \frac{-y\mathrm{d}x + (x-2)\mathrm{d}y}{(x-2)^2 + y^2},$$

κατά μήκος μιας καμπύλης που έχει άκρα τα σημεία $A(1,0)$ ως αρχή και $B(3,0)$ ως τέλος, στις περιπτώσεις α) $c = c_1$, β) $c = c_2$ γ) $c = c_3$. Δείξτε ότι όλες οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το I είναι $\pm(2k+1)\pi$, όπου k ακέραιος.

46. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $\{x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in [0, 2\pi]\}$ (ή την καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$).

47. Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του ολοκληρώματος

$$I = \oint \frac{\partial}{\partial y}(\ln r)\mathrm{d}x - \frac{\partial}{\partial x}(\ln r)\mathrm{d}y,$$

όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και c μία οποιαδήποτε κατά τμήματα λεία απλή και κλειστή καμπύλη, που βρίσκεται μέσα στο επίπεδο χωρίο

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5^2\}.$$

48. Δίνεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \oint_c \frac{y}{(x-b)^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{b-x}{(x-b)^2 + y^2}\mathrm{d}y, \quad b \neq 1, 3$$

όπου c είναι η έλλειψη $(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 2^2$. Προσδιορίστε τις τιμές του b έτσι ώστε να είναι $I = 0$ ενώ για τις άλλες τιμές του b υπολογίστε την τιμή του I.

49. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_c x\ln(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + y\ln(x^2 + y^2)\mathrm{d}y,$$

όπου c είναι:
α) η περίμετρος του τριγώνου $ABCDA$, όπου $A(0,-2)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $D(-2,0)$,
β) η τεθλασμένη γραμμή $ABCD$ ή ABC.

α) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους.
β) Εφαρμόζοντας κατάλληλα το θεώρημα του Green.

Δ. Αστρόβιλο πεδίο - Δυναμική συνάρτηση

57. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = (y^2 + 2xz^2 - 1)\vec{i} + (2xy + 3y^2)\vec{j} + (2x^2z - z)\vec{k}.$$

α) Να δειχθεί ότι είναι συντηρητικό και να βρεθεί η δυναμική συνάρτηση του $U(x, y, z)$.
β) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I = \int_c \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, όταν τα άκρα της καμπύλης c είναι τα $A(0, 0, 0)$ και $B(1, 1, 1)$.

58. Έστω το πεδίο δυνάμεων βαρύτητατας (θεωρούμε ότι $G = m = M = 1$) το οποίο ορίζεται (για $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$) από τη σχέση

$$\vec{F} = \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Δείξτε ότι το έργο που παράγει η δύναμη βαρύτητας όταν ένα σωματίδιο μετακινείται από το σημείο (x_1, y_1, z_1) στο (x_2, y_2, z_2) ακολουθώντας οποιαδήποτε καμπύλη, εξαρτάται μόνο από τις ακτίνες $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ και $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

59. Να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{AB} (6xy^2 - y^3)\mathrm{d}x + (6x^2y - 3xy^2)\mathrm{d}y,$$

είναι ανεξάρτητο του δρόμου που ενώνει τα σημεία $A(1, 2)$ και $B(3, 4)$ και στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή του.

60. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = (2xz^3 + 6y)\vec{i} + (6x - 2yz)\vec{j} + (3x^2z^2 - y^2)\vec{k}$. Να δειχθεί ότι είναι αστρόβιλο και στη συνέχεια να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \oint_c \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, όπου c είναι μία τυχαία καμπύλη, με αρχή και πέρας τα σημεία $A(0, 0, 1)$ και $B(1, 1, 1)$ αντίστοιχα.