

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΕΛΙΞΕΩΝ

1. Γενικά

Η Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων αναπτύχθηκε συγχρόνως με τη μελέτη διαφόρων φυσικών φαινομένων, όπως ο θερμικός θόρυβος στα ηλεκτρικά κυκλώματα, η κίνηση Brown που κάνει ένα σωματίδιο μέσα σ' ένα υγρό ή αέριο κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες και πολλά άλλα. Δηλαδή, ο πρώτος επιστημονικός κλάδος που συνετέλεσε στην ανάπτυξη της θεωρίας των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι η **Φυσική**.

Πολύ γρήγορα έγινε κατανοητό ότι μοντέλα Στοχαστικών Ανελίξεων περιγράφουν βιολογικά φαινόμενα όπως: Η συμπεριφορά ενός πληθυσμού που υπόκειται σε γέννηση, θάνατο και (ή) σε πολυπλοκότερες συνθήκες. Η κατανομή των φυτών και των ζώων. Ο αγώνας για την επικράτηση ενός πληθυσμού. Η εξαφάνιση ενός είδους. Το φαινόμενο της καρκινογέννησης. Η συνεισφορά των Στοχαστικών Ανελίξεων στα εντυπωσιακά αποτελέσματα που αφορούν την ανάγνωση του DNA είναι ιδιαίτερα σημαντική. Γενικά, στη **Βιολογία** οι εφαρμογές των Στοχαστικών Ανελίξεων είναι εξαιρετικά χρήσιμες και λόγω της φύσης των εφαρμογών αυτών ελκυστικές για τους ερευνητές. Τέλος, ανάλογα προβλήματα που αφορούν στο περιβάλλον και στην αλλαγή του κλίματος χρησιμοποιούν μαθηματικά μοντέλα Στοχαστικών Ανελίξεων και βρίσκονται στο προσκήνιο της ερευνητικής δραστηριότητας.

Η **Οικονομία** είναι ένας άλλος κλάδος στον οποίο οι Στοχαστικές Ανελίξεις εφαρμόζονται με ιδιαίτερη επιτυχία. Για παράδειγμα, οι διακυμάνσεις των τιμών των προϊόντων, των χρηματιστηριακών μονάδων, καθώς και άλλων οικονομικών προβλημάτων, όπως τα Ασφαλιστικά, περιγράφονται από στοχαστικά μοντέλα που αναπτύσσονται στη Θεωρία των Στοχαστικών Ανελίξεων και παρέχουν χρήσιμες προβλέψεις για τη συμπεριφορά των σχετικών μεγεθών.

Δεν θα ήταν υπερβολή να διατυπώσουμε την άποψη ότι οι Στοχαστικές Ανελίξεις έχουν εφαρμογές σ' όλες τις επιστήμες, αφού περιγράφουν φαινόμενα που εξαρτώνται από χρόνο ή χώρο όπως θα δούμε αργότερα.

Στην **Επιχειρησιακή Έρευνα**, σε ό,τι αφορά Στοχαστικά Μοντέλα, οι στοχαστικές ανελίξεις αποτελούν την κυρίαρχη μαθηματική θεωρία.

Ενδεικτικά αναφέρουμε δύο τομείς της επιχειρησιακής έρευνας:

1) Έλεγχος Αποθεμάτων

Στον τομέα αυτό υπάρχουν δύο σημαντικά προβλήματα:

- α) Να αποφασίσεις **πότε** θα παραγγείλεις καινούργια αποθέματα και
- β) **πόσα** θα παραγγείλεις.

Τα μεγέθη αυτά υπόκεινται σε δύο είδη αβεβαιότητας

- α) **πόσα** είδη μπορεί να ζητηθούν
- β) **πόσος χρόνος** παρεμβάλλεται ανάμεσα στην παραγγελία και την παραλαβή.

2) Θεωρία Ουρών Αναμονής

Οι Ουρές Αναμονής κατατάσσονται σύμφωνα με τα εξής χαρακτηριστικά::

- 1) Την κατανομή του χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων.
- 2) Την κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης.
- 3) Τον αριθμό των καναλιών εξυπηρέτησης (αριθμός υπηρετών).
- 4) Την πειθαρχία της ουράς.
- 5) Χωρητικότητα του συστήματος.

Για παράδειγμα, μία ουρά $|M|M|k|$ FIFO σημαίνει ότι οι κατανομές των 1), 2) είναι Εκθετικές, ο αριθμός των καναλιών εξυπηρέτησης k και η πειθαρχία είναι: πρώτος έρχομαι, πρώτος εξυπηρετούμαι (FIFO=First In, First Out) και άπειρη χωρητικότητα.

Εδώ είναι εύκολο να πούμε συγκεκριμένα ποια είναι η στοχαστική ανέλιξη: Έστω $X(t)$ ο αριθμός των πελατών στην ουρά κατά τη χρονική στιγμή t . Η $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο t έχουμε την τυχαία μεταβλητή $X(t)$, ενώ η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ αποτελεί οικογένεια τυχαίων μεταβλητών.

Από τις Πιθανότητες γνωρίζουμε μια πολύ σημαντική στοχαστική ανέλιξη κι' αυτή είναι η Στοχαστική Ανέλιξη Poisson που θα μελετηθεί αναλυτικά. Προς

το παρόν δίνουμε τον ορισμό της, για τον οποίο χρειαζόμαστε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

Ιδιότητα 1: Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσανυζήσεις αν για κάθε $\nu > 2$ και για όλα τα $t_1 < t_2 < \dots < t_\nu$ οι προσανυζήσεις (που είναι τυχαίες μεταβλητές) $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_\nu) - X(t_{\nu-1})$ είναι ανεξάρτητες.

Ιδιότητα 2: Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ έχει στάσιμες ή χρονικά ομογενείς προσανυζήσεις αν οι προσανυζήσεις $X(t) - X(s)$ και $X(t+h) - X(s+h)$, $\forall h > 0$ και $0 \leq s < t$ είναι ισόνομες.

Ορισμός της στοχαστικής ανέλιξης Poisson

Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι Poisson αν

- 1) $X(0) = 0$.
- 2) Έχει ανεξάρτητες και χρονικά ομογενείς προσανυζήσεις.
- 3) $P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$, για $h \downarrow 0$, όπου $o(h)$ είναι συνάρτηση του h : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Η συνθήκη (3) είναι ισοδύναμη με την

$$3') P(X(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0, 1, \dots, \lambda > 0.$$

Σημείωση: Όπως γνωρίζουμε από τις Πιθανότητες η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι ένα πολύ καλό πιθανοθεωρητικό μοντέλο για τυχαία φαινόμενα που συμβαίνουν σ' ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα, δυστυχήματα, τηλεφωνήματα που φθάνουν σε συγκεκριμένο τηλεφωνικό κέντρο, πελάτες που φθάνουν σε κέντρο εξυπηρέτησης (τράπεζες, εφορίες, στάσεις λεωφορείων, γραμματείες ...), σωματίδια που εκπέμπονται από ραδιενεργό πηγή. Ο αριθμός φυτών ή ζώων σε συγκεκριμένη επιφάνεια. Ο αριθμός των αστεριών σε συγκεκριμένο χώρο του διαστήματος. Τονίζουμε πάλι ότι όταν ο χρόνος ή ο χώρος είναι συγκεκριμένος έχουμε να μελετήσουμε μια τυχαία μεταβλητή, ενώ παρακολουθώντας τα φαινόμενα στο χρόνο και στο χώρο έχουμε να μελετήσουμε (να στοχαστούμε) την εξέλιξή τους (την ανέλιξή τους) και αυτή η διαδικασία παράγει ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Η στοχαστική ανέλιξη Poisson απαριθμεί γεγονότα που συμβαίνουν με κάποια τυχαιότητα στο χρόνο ή χώρο, γι' αυτό και καλείται **απαριθμητρία στοχαστική ανέλιξη**.

Κίνηση Brown ή Wiener

Το 1827 ο Άγγλος βοτανολόγος Brown παρατήρησε ότι ένα μόριο (διαμέτρου της τάξης 10^{-4} cm) όταν βυθιστεί σ' ένα υγρό ή αέριο κινείται άτακτα.

Αυτήν την κίνηση προσπάθησαν να περιγράψουν με ένα μαθηματικό μοντέλο, και αυτή ήταν η αρχή της ανάπτυξης ενός από τους πολύ σημαντικούς κλάδους της Θεωρίας Πιθανοτήτων και Στοχαστικών Ανελίζων, που ονομάζεται **Κίνηση Brown ή Wiener**.

Το 1905 ο Einstein απέδειξε ότι το παραπάνω φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί υποθέτοντας ότι το μόριο βομβαρδίζεται συνεχώς από τα μόρια του μέσου (υγρού ή αερίου) προκαλώντας του μετατοπίσεις. Έτσι η μετατόπισή του σ' ένα χρονικό διάστημα (s, t) , $0 \leq s < t < \infty$, ως άθροισμα πολλών μετατοπίσεων, μπορεί να θεωρηθεί ότι κατανέμεται Κανονικά σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Το 1923 ο Wiener γενικεύοντας την εργασία του Einstein κατέληξε στο πλήρες μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει την κίνηση Brown και έχει συνοπτικά ως εξής:

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$, είναι στοχαστική ανέλιξη Brown ή Wiener αν

- 1) Η στοχαστική ανέλιξη έχει ανεξάρτητες και ομογενείς προσαυξήσεις,
- 2) $\forall t > 0$ η $X(t)$ κατανέμεται Κανονικά δηλ.

$$f(x, t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \sigma > 0,$$

- 3) $E(X(t)) = 0 \quad \forall t > 0$,
- 4) $X(0) = 0$ και η $X(t)$ είναι συνεχής στο μηδέν.

Η παράμετρος σ υπολογίζεται από τις παρατηρήσεις και όταν το μαθηματικό μοντέλο αναφέρεται στην κίνηση Brown ο Einstein απέδειξε ότι

$$\sigma^2 = \frac{4RT}{Nf},$$

όπου R η σταθερά του μέσου, N ο αριθμός του Avogadro, T η απόλυτη θερμοκρασία, f ο συντελεστής τριβής του μέσου.

Η παραπάνω σχέση συνετέλεσε στον προσδιορισμό του N από τον Perrin το 1926, για το οποίο τιμήθηκε με το βραβείο Νόμπελ Χημείας.

2. Ορισμοί και Παραδείγματα

Η θεωρία των Στοχαστικών Ανελίζων ασχολείται με τη μελέτη της δομής Οικογενειών τυχαίων μεταβλητών X_t , όπου $t \in T$. Το σύνολο T καλείται **δεικτοσύνολο** και συνήθως παριστά χρόνο. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες, που αφορούν τα μοντέλα τα οποία θα εξετάσουμε:

- 1) Αν $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, τότε η στοχαστική ανέλιξη X_t ή $\{X(t), t \geq 0\}$ θα καλείται διακριτού χρόνου και
- 2) Αν $T = [0, \infty)$, τότε η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ θα καλείται συνεχούς χρόνου.

Στην πραγματικότητα μία στοχαστική ανέλιξη είναι συνάρτηση της παραμέτρου $t \in T$ και του δειγματικού σημείου $\omega \in \Omega$, όπου Ω ο δειγματικός χώρος για κάθε X_t (όλες οι δυνατές τιμές κάθε X_t). Είναι δηλ. $X(t) = X(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$. Για κάθε t σταθερό η $X(\cdot, t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, ενώ για κάθε ω σταθερό η $X(\omega, \cdot)$ είναι μια συνάρτηση του t , που καλείται πραγματοποίηση ή **δειγματοσυνάρτηση** της στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t), t \geq 0\}$.

Για το δειγματικό χώρο Ω διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

- 1) $\Omega = \{0, 1, \dots\}$ και η στοχαστική ανέλιξη καλείται διακριτού χώρου καταστάσεων και
- 2) $\Omega = \{-\infty, \infty\}$ και η στοχαστική ανέλιξη καλείται συνεχούς χώρου καταστάσεων.

Με βάση τα παραπάνω η στοχαστική ανέλιξη Poisson είναι διακριτού χώρου καταστάσεων σε συνεχή χρόνο, ενώ η στοχαστική ανέλιξη Brown είναι συνεχούς χώρου καταστάσεων σε συνεχή χρόνο.

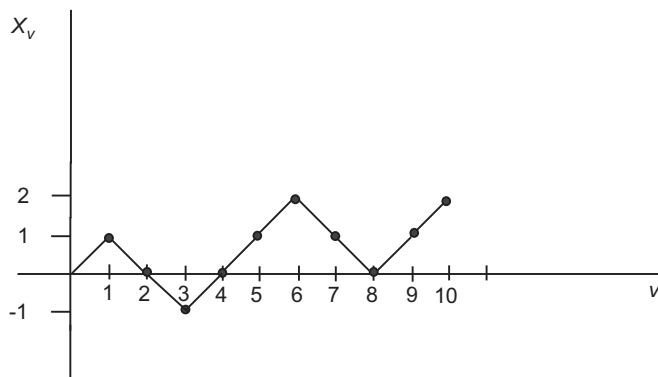
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια στοχαστική ανέλιξη που είναι διακριτού χώρου καταστάσεων σε διακριτό χρόνο.

Τυχαίος Περίπατος

Έστω ένα σωματίδιο που κινείται πάνω στους ακέραιους. Ξεκινάει από το μηδέν και κάνει ένα βήμα δεξιά με πιθανότητα p ή ένα βήμα αριστερά με πιθανότητα $q = 1 - p$ σε κάθε χρονική μονάδα δηλ., αν Y_ν , $\nu = 1, 2, \dots$ είναι η μετατόπισή του τη χρονική στιγμή ν , τότε

$$P(Y_\nu = 1) = p, \quad P(Y_\nu = -1) = 1 - p = q.$$

Έστω X_ν η τετμημένη (θέση) του σωματιδίου αμέσως μετά τη χρονική στιγμή ν . Τα σημεία (ν, X_ν) , $\nu = 1, 2, \dots$ παριστάνουν τον τυχαίο περίπατο του σωματιδίου. Μία τέτοια πραγματοποίηση για 10 βήματα θα μπορούσε να είναι η εξής:



Αφού $X_0 = 0$ είναι φανερό ότι

$$X_n = Y_1 + \dots + Y_n,$$

όπου οι μετατοπίσεις Y_i , $i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές.

Αν θεωρήσουμε το n σταθερό, τότε η X_n είναι μία **τυχαία μεταβλητή** για την οποία εύκολα προσδιορίζουμε την κατανομή της. Για παράδειγμα, αν μέχρι και τη n -οστή χρονική στιγμή το σωματίδιο έκανε j αρνητικές μετατοπίσεις $j = 0, 1, \dots, n$, τότε η τετμημένη ή θέση του είναι $n - 2j$ και αυτό το ενδεχόμενο έχει πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(X_n = n - 2j) &= P(j \text{ από τις } n \text{ μετατοπίσεις είναι αρνητικές}) \\ &= \binom{n}{j} p^{n-j} q^j, \end{aligned}$$

δηλ. η X_n ακολουθεί τη Διωνυμική κατανομή.

Αλλά, η ακολουθία $\{X_n, n = 1, \dots\}$ αποτελεί **στοχαστική ανάλιξη** διακριτού χώρου καταστάσεων σε διακριτό χρόνο και καλείται **Τυχαίος Περιπάτος**. Υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις τυχαίων περιπάτων, όπως θα δούμε αργότερα, και αποτελούν μία κατηγορία στοχαστικών ανελίξεων πολύ ενδιαφέρουσα από θεωρητική άποψη, αλλά και για το πλήθος των εφαρμογών της.

Κατανομή Στοχαστικής Ανελίξης

Έστω μία στοχαστική ανάλιξη $\{X(t), t \in T\}$. Γενικά, οι τυχαίες μεταβλητές $X(t), t \in T$ είναι συσχετισμένες. Είναι δυνατό να προσδιορισθεί η κατανομή

της με βάση την από κοινού συνάρτηση κατανομής των $X(t_1), \dots, X(t_\nu)$, για $\nu \geq 1$ και οποιαδήποτε $t_1, \dots, t_\nu \in T$, δηλ. τη συνάρτηση

$$F(x_1, \dots, x_\nu : t_1, \dots, t_\nu) \equiv P(X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_\nu) \leq x_\nu).$$

Αυτό συμβαίνει αν η συνάρτηση κατανομής F πληρεί τις ακόλουθες συνθήκες:

1) *Συμμετρία*: Για κάθε μετάθεση $(j_1, \dots, j_\nu)$ των δεικτών $(1, \dots, \nu)$ ισχύει

$$F(x_{j_1}, \dots, x_{j_\nu} : t_{j_1}, \dots, t_{j_\nu}) = F(x_1, \dots, x_\nu : t_1, \dots, t_\nu)$$

και

2) *Συμβιβαστότητα*: Για κάθε $m < \nu$

$$F(x_1, \dots, x_m : t_1, \dots, t_m) = \lim_{x_r \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_r, \dots, x_\nu : t_1, \dots, t_\nu),$$

για $r = m + 1, \dots, \nu$.

Θεμελιώδες Θεώρημα του Kolmogorov

Έστω οικογένεια κατανομών F που ικανοποιούν τις συνθήκες 1) και 2) $\forall \nu \geq 1$ και $\forall t_1, \dots, t_\nu \in T$. Τότε υπάρχει στοχαστικός χώρος $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ και οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X(t) = X(t, \omega)$, $t \in T$ που ορίζονται στο δειγματικό χώρο Ω ώστε η F να προσδιορίζει τη συνάρτηση κατανομής των $X(t_1), \dots, X(t_\nu)$.

Παράμετροι στοχαστικής Ανέλιξης - Στασιμότητα

Επειδή ο προσδιορισμός της κατανομής μιας στοχαστικής ανέλιξης παρουσιάζει αρκετή δυσκολία και πολυπλοκότητα γι' αυτό σε αρκετές περιπτώσεις περιοριζόμαστε στον υπολογισμό της Μεσοσυνάρτησης και Συσκέδασης δηλ. τυπικών χαρακτηριστικών με βάση τα οποία συνάγουμε κάποια συμπεράσματα για τη στοχαστική ανέλιξη.

Ορισμός 2.1. Έστω $\{X(t), t \in T\}$ στοχαστική ανέλιξη με πεπερασμένες ροπές 2ας τάξης.

Μεσοσυνάρτηση της $X(t)$ είναι η

$$\mu(t) = E(X(t)), t \in T.$$

Συσκέδαση ή Πυρήνας συνδιακύμανσης της $X(t)$ είναι η

$$R(\tau, t) \equiv \text{Cov}(X(\tau), X(t)) = E[(X(\tau) - \mu(\tau))(X(t) - \mu(t))] \quad \forall \tau, t \in T.$$

Διασπορά της $X(t)$ είναι η

$$V(X(t)) \equiv \sigma^2(t) = E[(X(t) - \mu(t))^2] = R(t, t), t \in T. \quad \blacklozenge$$

Πρόταση 2.1. Αν η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε

$$\text{Cov}(X(\tau), X(t)) = V(X(\min(\tau, t))), \quad \forall \tau, t \in T. \quad \blacklozenge$$

Απόδειξη. Έστω $\tau < t$, τότε

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(\tau), X(t)) &= \text{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau) + X(\tau)) \\ &= \text{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau)) + \text{Cov}(X(\tau), X(\tau)) \\ &= 0 + V(X(\tau)), \end{aligned}$$

λόγω γνωστής ιδιότητας της συνδιακύμανσης και αφού $\text{Cov}(X(\tau), X(t) - X(\tau)) = 0$ λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων.

Ορισμός 2.2. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ καλείται **Στάσιμη κατά συσκέδαση** ή **ασθενώς στάσιμη** αν έχει πεπερασμένες ροπές 2ας τάξης και η $R(t, \tau)$ είναι συνάρτηση της απόλυτης διαφοράς $|\tau - t|$.

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$V(X(t)) = R(t, t) = \sigma^2$$

δηλ. η διασπορά είναι ανεξάρτητη του t .

Ορισμός 2.3. Μια στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ καλείται **Ισχυρά Στάσιμη** αν η κατανομή των τυχαίων διανυσμάτων

$$(X(t_1), \dots, X(t_\nu)) \text{ και } (X(t_1 + h), \dots, X(t_\nu + h))$$

είναι ίδια για κάθε επιλογή των $t_1, \dots, t_\nu \in T$, $\nu \geq 1$ και $h \in T$.

(Το σύνολο-δείκτης T είναι : αν $t, h \in T \Rightarrow t + h \in T$).

Παρατηρήσεις

- 1) Αν η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ είναι ισχυρά στάσιμη, τότε πιο απλά εννοούμε ότι οι τ.μ. $X(t)$, $X(t+h)$, έχουν την ίδια κατανομή. Αυτό σημαίνει ότι οι παράμετροι της στοχαστικής ανέλιξης είναι

$$E(X(t)) = \mu \text{ και } V(X(t)) = \sigma^2,$$

ανεξάρτητες δηλ. του t . Όσο για τη συσκέδαση έχουμε για $s < t$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(s), X(t)) &= E[(X(s) - \mu)(X(t) - \mu)] \\ &= E[(X(t-s) - \mu)(X(0) - \mu)] = R(t-s), \end{aligned}$$

δηλ. γενικά η συσχέδαση είναι συνάρτηση της $|t - s|$, άρα μια ισχυρά στάσιμη είναι και ασθενώς στάσιμη.

Το αντίστροφο δεν ισχύει με εξαίρεση τη στοχαστική ανέλιξη Gauss που ορίζεται ως εξής: Η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \in T\}$ που είναι τέτοια ώστε $\forall k \geq 1$ και πεπερασμένο σύνολο $\{t_1, \dots, t_k\}$, $t_i \in T$, $i = 1, \dots, k$ το τυχαίο διάνυσμα

$$(X(t_1), \dots, X(t_k))$$

ακολουθεί την k -διάστατη Κανονική κατανομή καλείται **στοχαστική ανέλιξη Gauss**.

2) Οι Στάσιμες στοχαστικές ανελίξεις μπορούν να περιγράψουν φαινόμενα όπως:

- α) Ηλεκτρικούς παλμούς στη θεωρία επικοινωνιών.
- β) Την κατανομή αστεριών ή γαλαξιών, φυτών και ζώων. Εδώ το σύνολο-δείκτης T μπορεί να είναι ο τρισδιάστατος ή ο διδιάστατος χώρος αντίστοιχα.
- γ) Το ύψος, έστω $X(t)$, του κύματος στο σημείο t της επιφάνειας της γης. Εδώ το σύνολο-δείκτης T είναι δύο διαστάσεων δηλ. είναι το σύνολο των γεωγραφικών μηκών και πλατών.
- δ) Χρονοσειρές οικονομικών μεγεθών, όπως το ακαθάριστο εθνικό προϊόν, το εθνικό εισόδημα, το μέγεθος της ανεργίας κ.λ.π. για χώρες που η οικονομία τους έχει σχετική σταθερότητα.

Παραδείγματα

1) **Στοχαστική Ανέλιξη Poisson:** Γνωρίζουμε ότι $E(X(t)) = V(X(t)) = \lambda t$ και αφού εξ' ορισμού έχει ανεξάρτητες προσauζήσεις έχουμε

$$R(\tau, t) = V(X(\min(\tau, t))) = \lambda \tau \quad \mu\epsilon \quad \tau < t$$

2) **Στοχαστική Ανέλιξη Brown ή Wiener:** Εξ ορισμού έχουμε

$$E(X(t)) = 0 \quad \forall t \in T \quad \text{και} \quad V(X(t)) = \sigma^2 t$$

και επειδή έχει ανεξάρτητες προσauζήσεις

$$R(\tau, t) = V(X(\min(\tau, t))) = \sigma^2 \tau, \quad \mu\epsilon \quad \tau < t.$$

3) Έστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$X(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t$$

όπου ξ, η , ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την Κανονική κατανομή $N(0, \sigma^2)$ και $\omega \in [0, \pi]$ σταθερά.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα καθώς και τις ιδιότητες της μέσης τιμής και της συνδιακύμανσης έχουμε

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E[(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)] \\ &= \cos \omega t E(\xi) + \sin \omega t E(\eta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

αφού $E(\xi) = E(\eta) = 0$, και

$$\begin{aligned} R(\tau, t) &= E(X(\tau)X(t)) = E[(\xi \cos \omega \tau + \eta \sin \omega \tau) \cdot (\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)] \\ &= E(\xi^2 \cos \omega \tau \cos \omega t + \eta^2 \sin \omega \tau \sin \omega t) \\ &= E(\xi^2 \cos \omega \tau \cos \omega t) + E(\eta^2 \sin \omega \tau \sin \omega t) \\ &= (\cos \omega \tau \cos \omega t) \sigma^2 + (\sin \omega \tau \sin \omega t) \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \cos \omega(\tau - t). \end{aligned}$$

αφού $V(\xi) = E(\xi^2) = \sigma^2$ και $V(\eta) = E(\eta^2) = \sigma^2$.

Παρατήρηση: Η συσχέτιση είναι συνάρτηση της διαφοράς $\tau - t$ και επειδή $R(\tau, t) = R(t, \tau)$ παρατηρούμε ότι είναι συνάρτηση της $|\tau - t|$.

4) Έστω $X(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2$, όπου A_0, A_1, A_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $E(A_i) = V(A_i) = 1, i = 0, 1, 2$.

Για τις παραμέτρους της στοχαστικής ανέλιξης $\{X(t), t \geq 0\}$ έχουμε:

$$E(X(t)) = E(A_0) + tE(A_1) + t^2E(A_2) = 1 + t + t^2,$$

$$V(X(t)) = V(A_0) + t^2V(A_1) + t^4V(A_2) = 1 + t^2 + t^4,$$

αφού οι τυχαίες μεταβλητές A_0, A_1, A_2 είναι ανεξάρτητες.

Λόγω ανεξαρτησίας των A_0, A_1, A_2 και από τη σχέση $V(A_i) = E(A_i^2) -$

$E^2(A_i)$ η οποία μας δίνει $E(A_i^2) = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 R(\tau, t) &= \text{Cov}(X(\tau), X(t)) = E[X(\tau)X(t)] - E(X(\tau))E(X(t)) \\
 &= E[(A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2)(A_0 + A_1t + A_2t^2)] \\
 &\quad - (1 + \tau + \tau^2)(1 + t + t^2) \\
 &= E(A_0^2) + E(A_0A_1t) + E(A_0A_2t^2) + E(A_1A_0\tau) + \\
 &\quad E(A_1^2\tau t) + E(A_1A_2\tau t^2) + E(A_2^2\tau^2t^2) + E(A_1A_2\tau^2t) \\
 &\quad + E(A_2A_0\tau^2) - (1 + \tau + \tau^2)(1 + t + t^2) \\
 &= 2 + t + t^2 + \tau + 2\tau t + \tau t^2 + \tau^2 + \tau^2 t + 2t^2\tau^2 \\
 &\quad - (1 + \tau + \tau^2)(1 + t + t^2) = 1 + \tau t + \tau^2 t^2.
 \end{aligned}$$

- 5) Έστω η στοχαστική ανέλιξη $\mathbf{X}(t) = \cos(\omega t + \theta)$, όπου $\omega > 0$ σταθερά και θ τ. μ. ομοιόμορφη στο $(0, 2\pi)$.

Η μεσοσυνάρτηση είναι

$$\begin{aligned}
 E(X(t)) &= E(\cos(\omega t + \theta)) \\
 &= E(\cos \omega t \cdot \cos \theta - \sin \omega t \cdot \sin \theta) \\
 &= \cos \omega t E(\cos \theta) - \sin \omega t E(\sin \theta).
 \end{aligned}$$

Αλλά,

$$E(\cos \theta) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos \theta d\theta = \left[\frac{1}{2\pi} \sin \theta \right]_0^{2\pi} = 0$$

και όμοια

$$E(\sin \theta) = 0.$$

Άρα

$$E(X(t)) = 0.$$

Η συσχέδαση είναι

$$\begin{aligned}
 R(\tau, t) &= \text{Cov}(X(\tau), X(t)) = E[\cos(\omega\tau + \theta) \cdot \cos(\omega t + \theta)] \\
 &= E \left[\frac{1}{2} [\cos(\omega\tau + \theta + \omega t + \theta) + \cos(\omega\tau + \theta - \omega t - \theta)] \right] \\
 &= E \left[\frac{1}{2} [\cos \omega(\tau + t) \cdot \cos 2\theta - \sin \omega(\tau + t) \sin 2\theta] \right] \\
 &\quad + E \left[\frac{1}{2} \cos \omega(\tau - t) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cos \omega(\tau - t), \quad \tau < t
 \end{aligned}$$

αφού $E(\cos 2\theta) = E(\sin 2\theta) = 0$, όπως εξηγήσαμε προηγούμενα. Άρα η συσχέδαση είναι συνάρτηση της διαφοράς των χρόνων δηλ. η στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι στάσιμη κατά συσχέδαση.

Τέλος, η διασπορά είναι

$$V(X(t)) = R(t, t) = \frac{1}{2}.$$

6) Έστω η στοχαστική ανέλιξη

$$Y(t) = X(t + L) - X(t)$$

όπου $\{X(t), t \geq 0\}$ στ. ανέλ. Poisson με παράμετρο λ και $L > 0$ σταθερά.

Η μεσοσυνάρτηση είναι

$$E(Y(t)) = E(X(t + L) - X(t)) = \lambda(t + L) - \lambda t = \lambda L$$

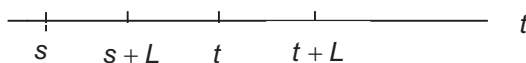
αφού η $X(t)$ είναι Poisson.

Η συσχέδαση είναι

$$R(s, t) = \text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \text{Cov}(X(s+L) - X(s), X(t+L) - X(t)), s < t.$$

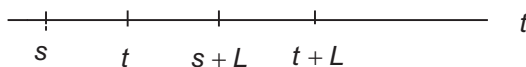
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $s + L < t$



Από τον ορισμό της Poisson έχουμε ότι οι προσαυξήσεις $X(s + L) - X(s)$, $X(t + L) - X(t)$, είναι ανεξάρτητες, άρα $R(s, t) = 0$.

β) $s + L > t$



Τότε προσθέτοντας και αφαιρώντας τη στοχαστική ανελίξη για κατάλληλα χρονικά διαστήματα κατασκευάζουμε ανεξάρτητες προσανυζήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned}
 & \text{Cov}([X(s+L) - X(s) + X(t) - X(t)], [X(t+L) - X(t)]) \\
 &= \text{Cov}(X(t) - X(s), X(t+L) - X(t)) \\
 & \quad + \text{Cov}(X(s+L) - X(t), X(t+L) - X(t)) \\
 &= 0 + \text{Cov}([X(s+L) - X(t)], [X(t+L) - X(t) + X(s+L) - X(s+L)]) \\
 &= \text{Cov}(X(s+L) - X(t), X(t+L) - X(s+L)) \\
 & \quad + \text{Cov}(X(s+L) - X(t), X(s+L) - X(t)) \\
 &= 0 + V(X(s+L) - X(t)) = V(X(s+L-t) - X(0)) \\
 &= V(X(s+L-t)) = \lambda(s+L-t)
 \end{aligned}$$

αφού $X(0) = 0$ εξ' ορισμού.

Γενικά έχουμε

$$\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \begin{cases} \lambda[L - |t-s|], & \text{αν } |t-s| \leq L \\ 0, & \text{αν } |t-s| > L. \end{cases}$$

Προφανώς, η διασπορά είναι $V(Y(t)) = \lambda L$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση $V(Y(t)) = E(Y^2(t)) - [E(Y(t))]^2$ εύκολα καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

- 7) Έστω $Z(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + Y(t)$, όπου $Y(t)$ όπως στο Παράδειγμα 6. Τότε

$$E(Z(t)) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + \lambda L,$$

$$\begin{aligned}
 R(s, t) &= \text{Cov}(Z(s), Z(t)) = \text{Cov}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{L}s\right) + Y(s), \sin\left(\frac{2\pi}{L}t\right) + Y(t)\right) \\
 &= \text{Cov}(Y(s), Y(t)).
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν είναι αναγκαίο μία στοχαστική ανελίξη να έχει σταθερή μεσοσυνάρτηση για να είναι στάσιμη κατά συσκέδαση.

3. Ασκήσεις

Για τις στοχαστικές ανελίξεις $\{X(t), t \geq 0\}$ από 1-5 να προσδιορισθούν

- α) η μεσοσυνάρτηση $m(t) = E(X(t))$ και

β) η συσχέδαση $R(t, s) = \text{Cov}(X(t), X(s))$.

1. $X(t) = A + Bt$, όπου A, B ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$.
2. $X(t) = W(t+1) - W(t)$, όπου $\{W(t), t \geq 0\}$ η ανέλιξη Brown ή Wiener με παράμετρο σ^2 .
3. $X(t) = A + W(t)$, όπου $A > 0$ σταθερά και $\{W(t), t \geq 0\}$ η στοχαστική ανέλιξη Brown.
4. $X(t) = At + W(t)$, όπου A τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ ανεξάρτητη της στοχαστικής ανέλιξης Brown $\{W(t), t \geq 0\}$.
5. $X(t) = \cos(At + \theta)$, όπου θ τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$ ανεξάρτητη της A , που είναι επίσης τυχαία μεταβλητή Cauchy, δηλ. έχει σ.π.π. $f(a) = \frac{1}{\pi(1+a^2)}$.
6. Έστω η στοχαστική ανέλιξη $\{X_n, n \geq 1\}$ που δίνεται από τη σχέση $X_n = \cos(nU)$, όπου U ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Να δειχθεί ότι η X_n είναι ασθενώς στάσιμη, αλλά όχι στάσιμη.
7. Μία στοχαστική ανέλιξη Brown ή Wiener, έστω W , καλείται τυποποιημένη αν έχει διασπορά 1. Έστω η W και α μία θετική σταθερά. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω στοχαστικές ανελίξεις είναι τυποποιημένες Brown ή Wiener
 - α) $\alpha W\left(\frac{t}{\alpha^2}\right)$,
 - β) $W(t + \alpha) - W(\alpha)$,
 - γ) $V = tW\left(\frac{1}{t}\right)$, $t > 0$, $V(0) = 0$.

4. Βιβλιογραφία

- Bhat, N., *Elements of Applied Stochastic Processes*, Wiley, N.Y. 1984.
 Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes*, Prentice-Hall 1975.
 Cox, D. R. And Miller H. D., *The Theory of Stochastic Processes* Chapman

and Hall, London, 1965.

Durrett, R., *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, 1999.

Doob, J., *Stochastic Processes* J. Wiley, N.Y., 1953

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.1, J. Wiley, N.Y., 1968.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol.2, 2nd ed., J. Wiley, N.Y., 1971.

Κάκουλλος, Θ., *Στοχαστικές Ανεξίξεις*, 1978.

Karlin, S., Taylor, H.D., *A first course in Stochastic Processes*, Academic Press, 2nd edition, 1975.

Parzen, E., *Stochastic Processes*, Holden-Day, 1962.

Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes*, Birkhauser, Boston, MA. 1992.

Ross, S., *Stochastic Processes*, 2nd ed., Wiley, 1996.

