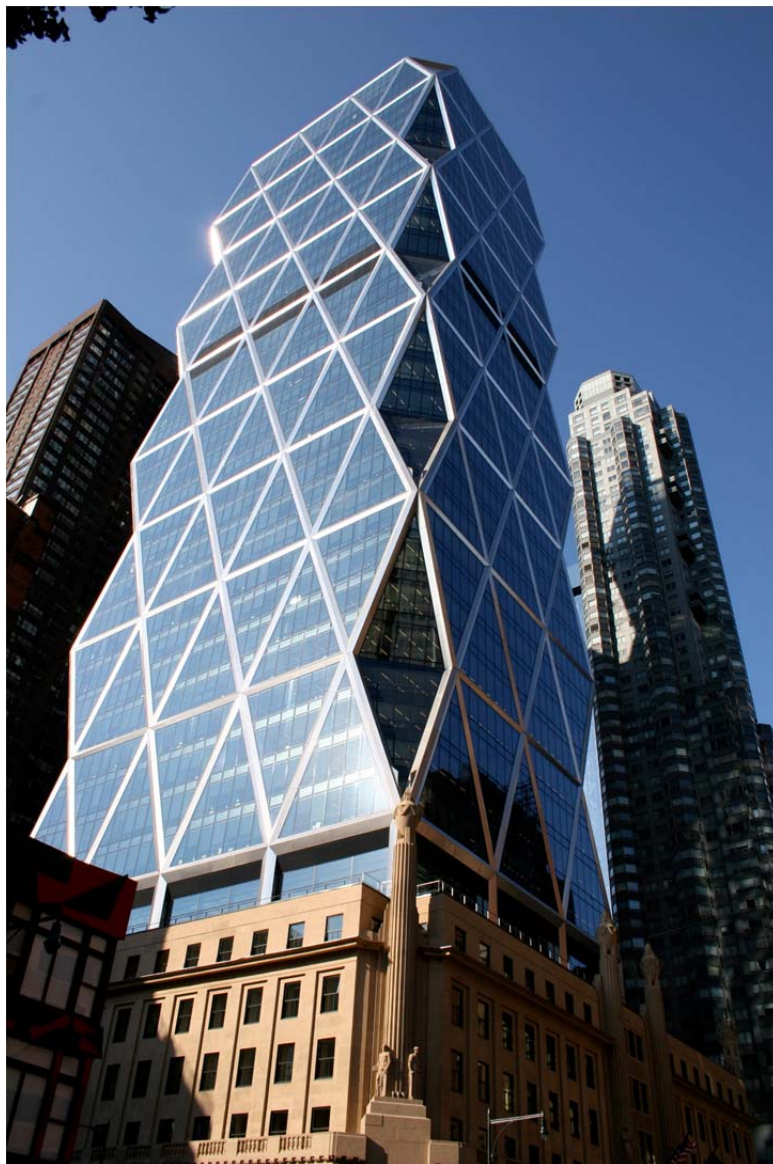




2

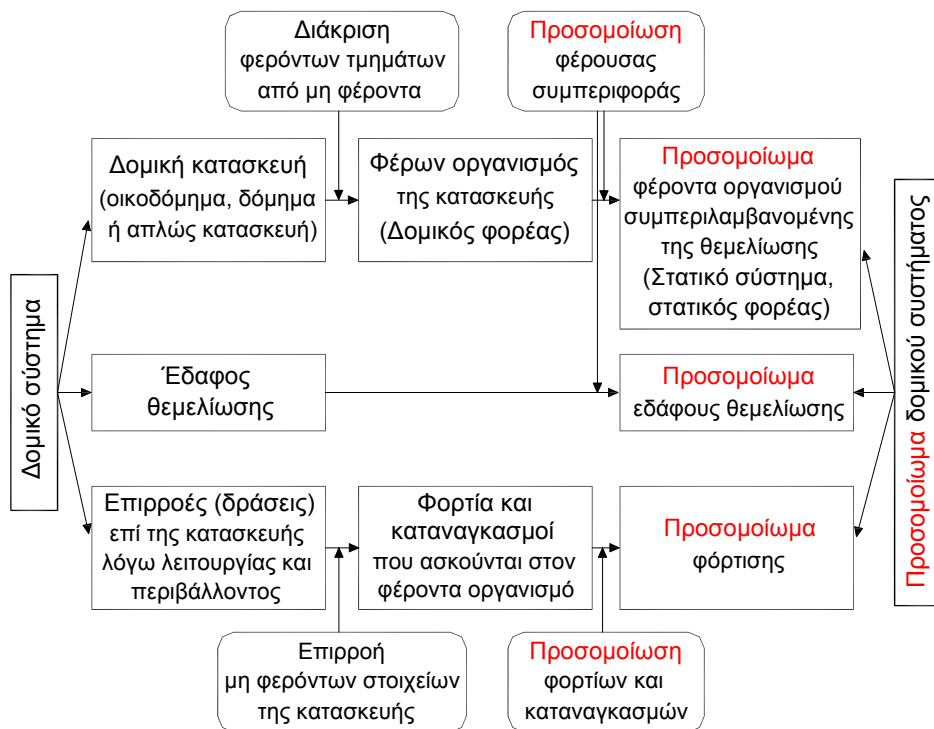
ΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

2. ΟΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ ΚΑΙ ΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥΣ

2.1 Το δομικό σύστημα και το υπολογιστικό του προσομοίωμα

2.1.1 Ορισμός του δομικού συστήματος

Οι *δομικές κατασκευές* είναι σύνθετα μηχανικά συστήματα αποτελούμενα από διαφόρων τύπων φέροντα *δομικά στοιχεία* συζευγμένα μεταξύ τους μέσω *συνδέσμων*, καθώς και από άλλα στοιχεία και τμήματα που δεν συμμετέχουν στον *φέροντα οργανισμό* (*δομικό φορέα*). Προορισμός του φέροντα οργανισμού είναι να παραλάβει όλες τις επιρροές (*δράσεις*) που δέχεται η κατασκευή λόγω της χρήσης της και λόγω του περιβάλλοντος στο οποίο είναι εκτεθειμένη (π.χ ωφέλιμα φορτία, θερμοκρασιακούς καταναγκασμούς, σεισμικές διεγέρσεις κ.ά.) και να τις μεταβιβάσει με ασφάλεια στο στερεό *έδαφος θεμελίωσης*, με το οποίο συνδέεται μέσω *στηρίξεων* (εφεδράνων και θεμελίων διαφόρων μορφών). Είναι προφανές ότι το υπό μελέτη συνολικό *δομικό σύστημα* συμπεριλαμβάνει, εκτός από την ίδια την κατασκευή, το έδαφος θεμελίωσης και τις φορτίσεις (Σχ. 2.1.1-1).



Σχ. 2.1.1-1 Τα συστατικά του δομικού συστήματος και η προσομοίωσή του

2.1.2 Μηχανικό και υπολογιστικό προσομοίωμα

Η πολυπλοκότητα της πραγματικής μηχανικής συμπεριφοράς των δομικών συστημάτων μας αναγκάζει να χρησιμοποιούμε λιγότερο ή περισσότερο απλοποιημένα *μηχανικά προσομοιώματα* προκειμένου να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός των εντάσεων και των παραμορφώσεών τους. Με τον όρο 'μηχανικό προσομοίωμα' χαρακτηρίζουμε ένα *μοντέλο* της κατασκευής, το οποίο προκύπτει μέσα από μια ολόκληρη σειρά εξιδανικεύσεων της πραγματικής κατασκευής, οι οποίες ισοδυναμούν με μικρότερες ή μεγαλύτερες απλοποιήσεις

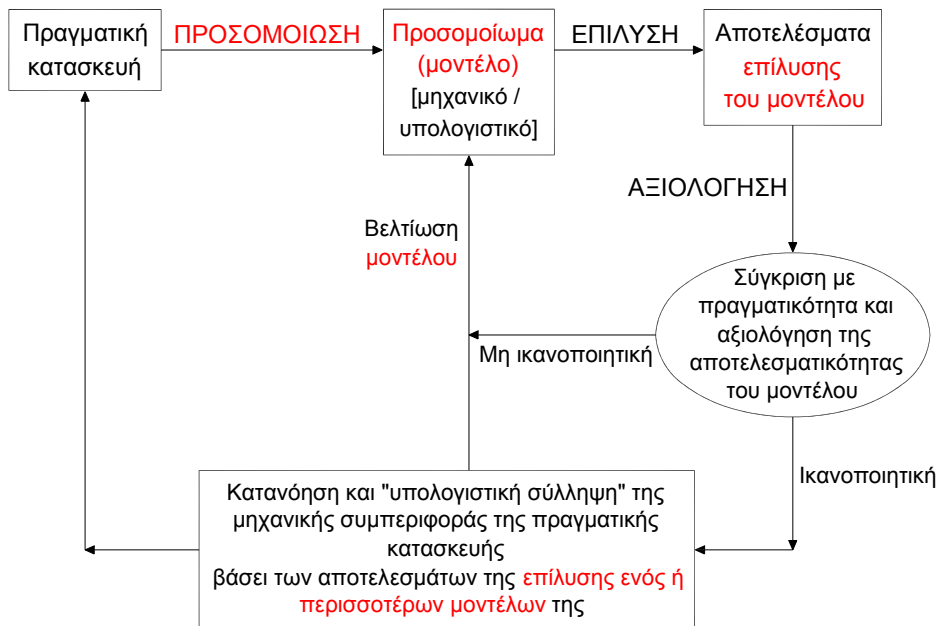
- (α) των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής (ανωδομής και θεμελίωσης) και των μηχανικών ιδιοτήτων των δομικών υλικών από τα οποία κατασκευάζεται ο φέρων οργανισμός της (→ προσομοίωμα φέροντα οργανισμού ή στατικό σύστημα ή στατικός φορέας),
- (β) των ιδιοτήτων του εδάφους πάνω στο οποίο θεμελιώνεται η κατασκευή (→ Προσομοίωμα του εδάφους θεμελίωσης) και
- (γ) των χαρακτηριστικών των διαφόρων φορτίσεων στις οποίες αναμένεται να υποβληθεί η κατασκευή (→ Προσομοίωμα της φόρτισης).

Το μηχανικό αυτό προσομοίωμα του όλου δομικού συστήματος (Σχ. 2.1.1-1[δεξιά]) επιλύεται στη συνέχεια είτε με ακριβείς είτε με προσεγγιστικές υπολογιστικές μεθόδους. Στη δεύτερη περίπτωση υπεισέρχεται επομένως και μία ακόμη σειρά απλουστεύσεων και παραδοχών που αφορούν στις ίδιες τις μεθόδους υπολογισμού, οπότε μπορεί να μιλήσει κανείς για το *υπολογιστικό προσομοίωμα* της κατασκευής προς διάκριση από το μηχανικό. Έτσι, ως μηχανικό προσομοίωμα μιας ορθογωνικής πλάκας επί δοκών μπορεί π.χ. να θεωρηθεί η πλάκα επί ακλόνητων αρθρωτών στηρίξεων, δηλαδή να θεωρηθεί αμελητέα η παραμορφωσιμότητα των δοκών επί των οποίων εδράζεται η πλάκα. Η επίλυση μιας τέτοιας απλά εδραζόμενης πλάκας μπορεί να γίνει π.χ. με τη μέθοδο των λωρίδων κατά Marcus ή, αν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το υπολογιστικό προσομοίωμα είναι επομένως διαφορετικό για τις δύο αυτές περιπτώσεις. Πολύ συχνά δεν γίνεται διάκριση των δύο εννοιών και με τον όρο 'προσομοίωμα' εννοούνται κατά συγχώνευση και τα δύο μαζί (Σχ. 2.1.2-1[άνω]).

2.1.3 Η αρχή της αρμονικής ακρίβειας

Είναι πρόδηλο ότι μόνο μέσα από μία ώριμη επιλογή προσομοιωμάτων θα προκύψουν ρεαλιστικά αποτελέσματα, δηλαδή αποτελέσματα που θα αποδίδουν με επαρκή για την εκάστοτε περίπτωση ακρίβεια τη μηχανική συμπεριφορά της πραγματικής κατασκευής. Για τον λόγο αυτόν δίνεται σε όλη την έκταση του παρόντος συγγράμματος ιδιαίτερη σημασία στην επισήμανση των παραδοχών και απλοποιήσεων που εμπεριέχονται στις παρουσιαζόμενες μεθόδους υπολογισμού των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης στατικών φορέων. Είναι επίσης

αυτονόητο ότι κανένα προσομοίωμα δεν αποδίδει πλήρως την πραγματικότητα και ότι ως εκ τούτου οποιοδήποτε προσομοίωμα είναι πάντοτε επιδεκτικό βελτιώσεων (Σχ. 2.1.2-1). Εντούτοις, προσομοίωση και υπολογισμός θα πρέπει να διέπονται από την *"αρχή της αρμονικής ακρίβειας"*, η οποία επιβάλλει την προσαρμογή των δυνατοτήτων του μοντέλου στις απαιτήσεις του εκάστοτε προς επίλυση προβλήματος: Δεν έχει νόημα, π.χ., να κάνουμε χονδροειδείς απλοποιήσεις σχετικά με το μηχανικό προσομοίωμα και στη συνέχεια να το επιλύουμε με τις πλέον ακριβείς μεθόδους υπολογισμού (*"αναρμονική ακρίβεια"*!).



Σχ. 2.1.2-1 Ο κύκλος της ανάλυσης: Προσομοίωση-Επίλυση-Αξιολόγηση

Για το τρίπτυχο "προσομοίωση-επίλυση-αξιολόγηση" χρησιμοποιείται και ο όρος *"ανάλυση"* της κατασκευής. Περισσότερες διευκρινήσεις σχετικά με τον καθορισμό και την επακόλουθη επίλυση του μηχανικού/υπολογιστικού μοντέλου μιας κατασκευής θα δοθούν στην παράγραφο 1.3 του τόμου II.

2.1.4 Απλοποιημένο παράδειγμα μηχανικού προσομοιώματος

Στο παρακάτω σχήμα 2.1.4-1 παρουσιάζεται σε αδρές γραμμές ένα απλοποιημένο παράδειγμα προσομοίωσης μιας δικτυωτής γέφυρας. Στο παράδειγμα αυτό ο δομικός φορέας της γέφυρας απλοποιείται με τρόπο που επιτρέπει τον ανεξάρτητο και διαδοχικό υπολογισμό περισσότερων επί μέρους στατικών φορέων:

(α) Πρώτα υπολογίζεται η ένταση και παραμόρφωση των διαμήκων δοκών λόγω των διαφόρων φορτίων που δέχονται (π.χ. από τα διερχόμενα οχήματα). Ο

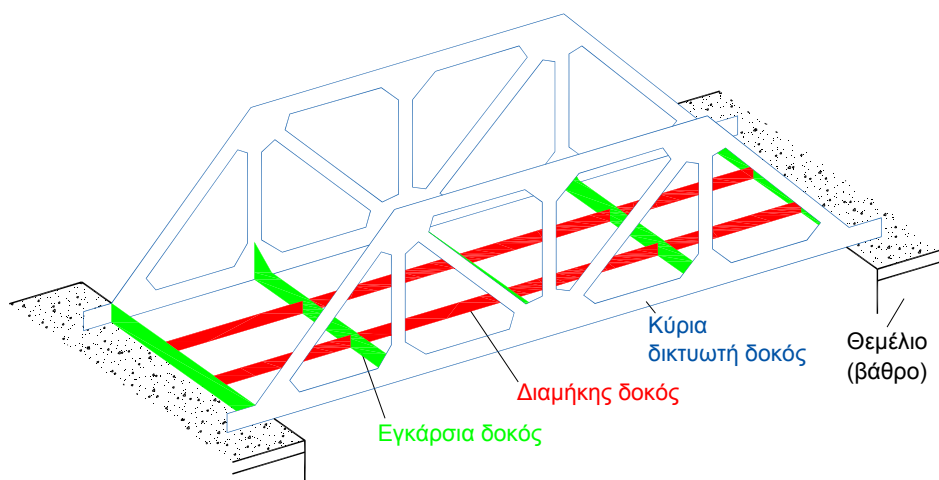
- υπολογισμός γίνεται θεωρώντας ότι οι διαμήκεις δοκοί στηρίζονται ακλόνητα επί των εγκάρσιων δοκών.
- (β) Κατόπιν υπολογίζεται η ένταση και παραμόρφωση των εγκάρσιων δοκών. Ως φορτία τους λαμβάνονται οι προηγουμένως υπολογισθείσες αντιδράσεις στήριξης των διαμήκων δοκών. Ο υπολογισμός γίνεται θεωρώντας ότι οι εγκάρσιες δοκοί στηρίζονται ακλόνητα επί των κύριων δικτυωτών δοκών της γέφυρας.
- (γ) Τέλος υπολογίζεται η ένταση και παραμόρφωση των κύριων δικτυωτών δοκών. Ως φορτία τους λαμβάνονται οι προηγουμένως υπολογισθείσες αντιδράσεις στήριξης των εγκάρσιων δοκών. Ο υπολογισμός γίνεται θεωρώντας ότι οι κύριες δικτυωτές δοκοί στηρίζονται ακλόνητα μέσω κατάλληλων θεμελίων επί του εδάφους θεμελίωσης.



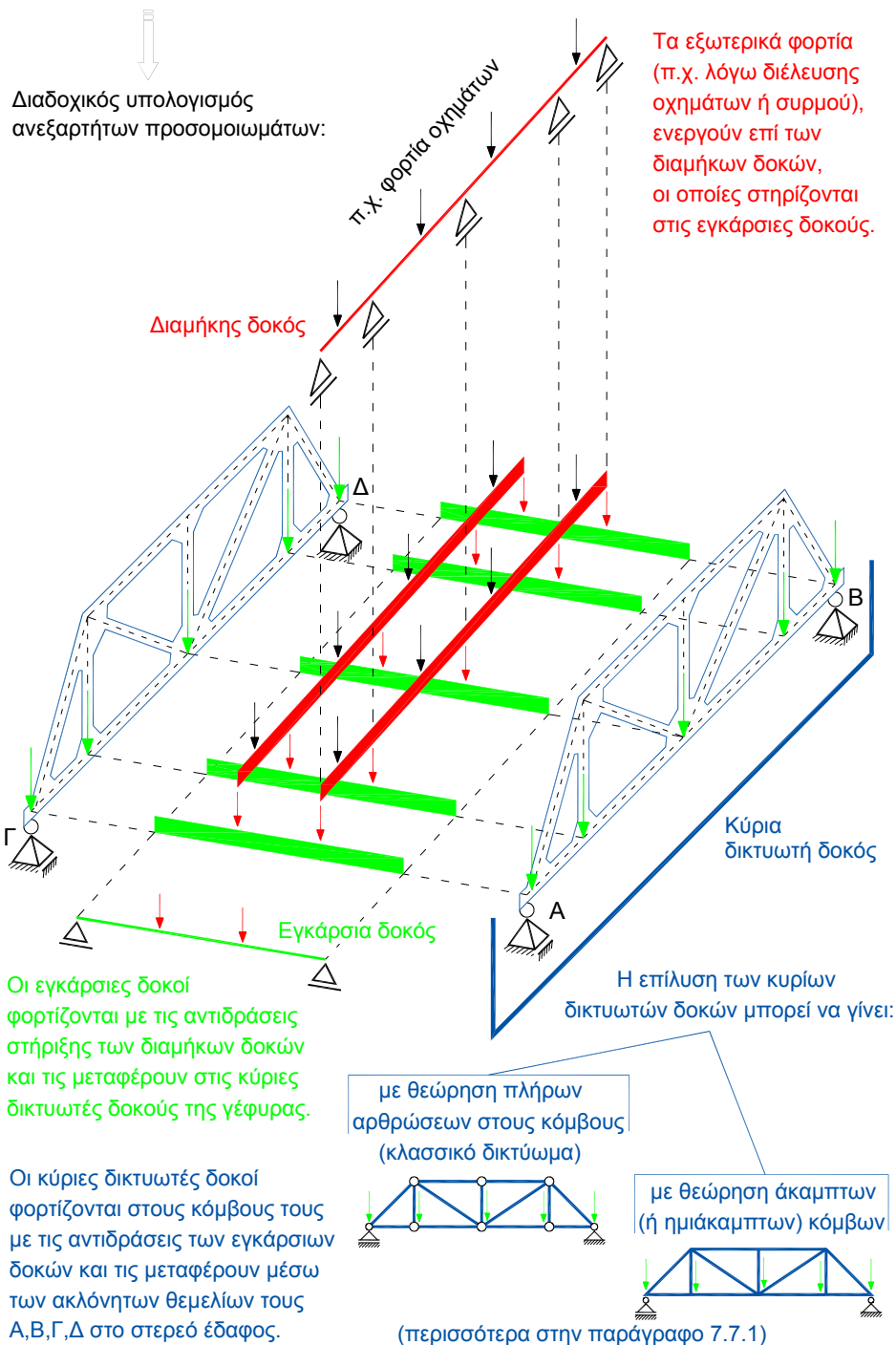
Πραγματικές γέφυρες - Πραγματικός δομικός φορέας



Απλοποιημένη σχηματική παράσταση



Σχ. 2.1.4-1 Απλοποιημένο παράδειγμα προσομοίωσης μιας δικτυωτής γέφυρας



Σχ. 2.1.4-1 (συνέχ.) Απλοποιημένο παράδειγμα προσομοίωσης μιας δικτυωτής γέφυρας

Περαιτέρω διευκρινήσεις σχετικά με την προσομοίωση δικτυωτών φορέων θα δοθούν στο κεφάλαιο 7, παράγρ. 7.7.1.

2.1.5 Προσομοιώσεις υλικών σωμάτων

Μία σειρά εξιδανικεύσεων αφορά στα ίδια τα υλικά σώματα και στη μηχανική συμπεριφορά τους. Έτσι, ενώ μας είναι γνωστό ότι η ύλη αποτελείται από μόρια, άτομα και διάφορα υποατομικά σωματίδια που κινούνται το ένα ως προς το άλλο σε μεγάλες αποστάσεις σε σχέση με το ίδιο τους το μέγεθος, απλοποιούμε την πραγματικότητα αγνοώντας την ασυνεχή αυτή δομή των υλικών σωμάτων και θεωρώντας τα ως *συνεχή μέσα*, δηλαδή ως αποτελούμενα από συνεχώς κατανεμημένη ύλη. Η απλουστευτική αυτή παραδοχή αποδεικνύεται από την εμπειρία μας ως πλήρως ικανοποιητική, εφόσον τα υλικά σώματα που εξετάζουμε (δηλαδή τα δομικά στοιχεία και οι δομικές κατασκευές) έχουν διαστάσεις πάρα πολύ μεγαλύτερες από εκείνες των ατομικών σωματιδίων, αποτελούνται δηλαδή από πρακτικώς άπειρα άτομα.

Επίσης, υπό την επενέργεια εξωτερικών αιτίων (διάφορα φορτία, θερμοκρασιακές μεταβολές κτλ.) τα συνεχή σώματα μεταβάλλουν κατά κανόνα τη μορφή τους, είναι δηλαδή γενικώς *παραμορφώσιμα*. Εντούτοις, σε πολλές περιπτώσεις προβλημάτων η παραμόρφωση ενός σώματος μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα (π.χ. η παραμόρφωση ενός ογκώδους πεδίου θεμελίωσης σε σχέση με την παραμόρφωση του επ' αυτού υποστυλώματος), οπότε είναι θεμιτή η παραδοχή του *απολύτως στερεού σώματος*, στο οποίο οι αποστάσεις μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του παραμένουν αναλλοίωτες.

Ακόμη, όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, χάριν συστηματικότερης μελέτης διαφόρων προβλημάτων εισάγεται και η έννοια του *υλικού σημείου*, δηλαδή ενός υλικού σώματος μηδενικών διαστάσεων, αλλά πεπερασμένης μάζας, το οποίο σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή κατέχει ορισμένη θέση στον χώρο.

Τέλος, η υλική συμπεριφορά των παραμορφώσιμων σωμάτων προσομοιώνεται περαιτέρω με πολλούς και διάφορους τρόπους, π.χ. ως γραμμικά ελαστική, ελαστοπλαστική κτλ., ανάλογα με το εκάστοτε προς επίλυση πρόβλημα.

Βάσει των παραπάνω εξιδανικεύσεων και άλλων συναφών παραδοχών και απλοποιήσεων μπορεί - χάριν συστηματικότερης μελέτης - να υποδιαιρεθεί τόσο η Μηχανική όσο και η Στατική σε επί μέρους τομείς, όπως ήδη είδαμε στις παραγράφους 1.2 και 1.3 του προηγούμενου κεφαλαίου.

Στο παρόν βιβλίο η συμπεριφορά των υλικών θεωρείται γραμμικά ελαστική και επομένως όλες οι παρουσιαζόμενες εδώ μέθοδοι κινούνται μέσα στα όρια της θεωρίας της ελαστικότητας και ειδικότερα της Ελαστοστατικής.

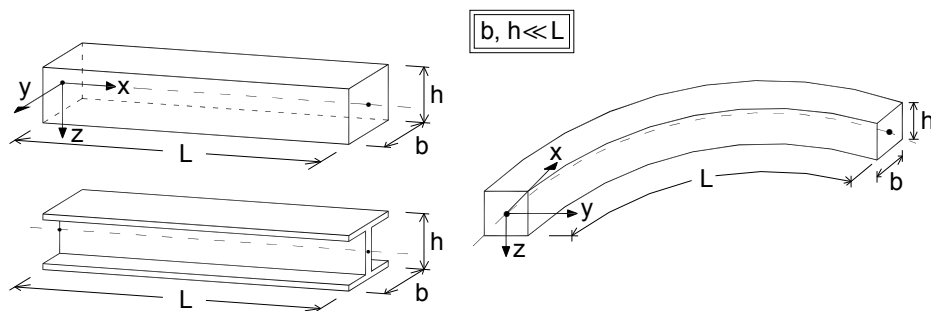
2.2 Τα είδη των δομικών στοιχείων και η γεωμετρική εξιδανίκευσή τους

Ο φέρων οργανισμός (δομικός φορέας) των κατασκευών συντίθεται από επί μέρους φέροντα δομικά στοιχεία, τα οποία είναι γενικώς τρισδιάστατα υλικά σώματα. Λόγω όμως της πολυπλοκότητας και των δυσκολιών που παρουσιάζει η επίλυση τρισδιάστατων δομικών φορέων, αναζητούνται τρόποι απλοποίησής τους και αναγωγής τους σε φορείς μόνο μίας ή δύο διαστάσεων. Προς τούτο ταξινομούνται τα επί μέρους δομικά στοιχεία από τα οποία συντίθενται οι κατασκευές

- (α) με βάση τη γεωμετρική μορφή τους σε *γραμμικά στοιχεία*, *επιφανειακά στοιχεία* και *στοιχεία όγκου* (βλ. παρακάτω υποπαραγρ. 2.2.1, 2.2.2 και 2.2.3), και
- (β) για κάθε γεωμετρική μορφή με βάση τη μηχανική τους συμπεριφορά, τον τρόπο δηλαδή που καταπονούνται κατά τη μεταβίβαση των φορτίων και καταναγκασμών που δέχονται (βλ. επόμενη παράγραφο 2.3).

2.2.1 Μονοδιάστατα ή ραβδόμορφα ή γραμμικά στοιχεία

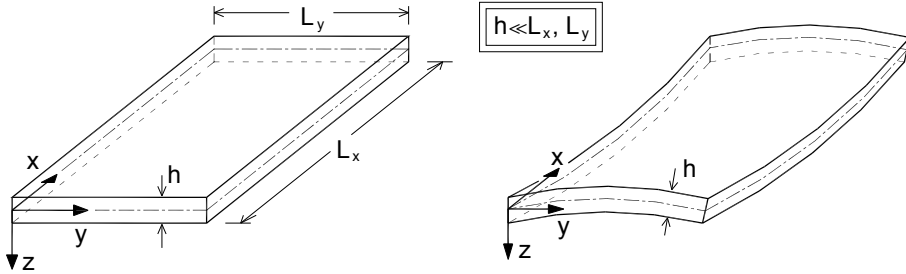
Στα γραμμικά δομικά στοιχεία (Σχ. 2.2.1-1) οι δύο διαστάσεις (διαστάσεις b και h της διατομής τους) είναι πολύ μικρότερες από την τρίτη (το αξονικό τους μήκος L_x). Προκειμένου να επικεντρωθεί η μελέτη στα ουσιώδη και να απλοποιηθούν οι αναγκαίοι υπολογισμοί, τα τρισδιάστατα στην πραγματικότητα δομικά αυτά στοιχεία αντικαθίστανται από μία γραμμή που αντιπροσωπεύει τον *κεντροβαρικό τους άξονα* και από ένα (άπειρο) σύνολο διατομών κάθετων στον άξονα αυτόν. Στο μηχανικό προσομοίωμα (στατικό μοντέλο) τα γραμμικά στοιχεία απεικονίζονται μόνο μέσω του άξονά τους. Το μήκος τους L υπεισέρχεται άμεσα στους υπολογισμούς, ενώ οι διαστάσεις της διατομής τους υπεισέρχονται στους υπολογισμούς εμμέσως μέσω των συνολικών γεωμετρικών μεγεθών της διατομής (π.χ. για ορθογωνική διατομή διαστάσεων b και h : Εμβαδόν διατομής $A=b \cdot h$, ροπή αδράνειας $I=b \cdot h^3/12$, κτλ.). Σημειώνεται ότι ένα γραμμικό στοιχείο μπορεί να είναι ευθύγραμμο ή καμπύλο και ότι ο άξονας ενός καμπύλου γραμμικού στοιχείου μπορεί να βρίσκεται είτε μέσα στο ίδιο επίπεδο είτε να αποτελεί μια καμπύλη στον τρισδιάστατο χώρο. Στα μονοδιάστατα δομικά στοιχεία συγκαταλέγεται και το καλώδιο ή σχοινί (βλ. παρακάτω σχήματα 2.3.1-4 και 2.3.1-5).



Σχ. 2.2.1-1 Γραμμικά στοιχεία (ευθύγραμμο, καμπύλο)

2.2.2 Δισδιάστατα ή επιφανειακά στοιχεία

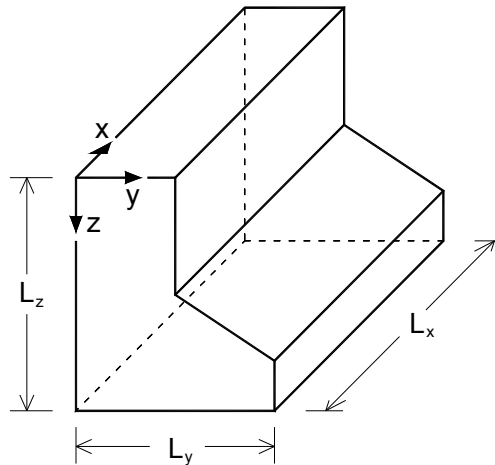
Στα επιφανειακά δομικά στοιχεία η μία τους διάσταση (πάχος h) είναι μικρή έναντι των άλλων δύο L_x και L_y (Σχ. 2.2.2-1). Στο μηχανικό προσομοίωμα (στατικό μοντέλο) αρκεί η απεικόνιση μόνο των δύο αυτών διαστάσεων, ενώ το πάχος υπεισέρχεται στους υπολογισμούς ως απλή παράμετρος.



Σχ. 2.2.2-1 Επιφανειακά στοιχεία (επίπεδα, καμπύλα)

2.2.3 Τρισδιάστατα στοιχεία ή στοιχεία όγκου

Στα στοιχεία όγκου καμία από τις τρεις διαστάσεις δεν υστερεί έναντι των άλλων δύο και συνεπώς δεν μπορεί να γίνει καμία απλοποίηση γεωμετρικού τύπου (Σχ. 2.2.3-1). Όλες οι διαστάσεις οφείλουν να λαμβάνονται εξίσου υπόψη. Τα στοιχεία αυτά χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση ογκωδών φορέων (π.χ. φράγματα όγκου), για την προσομοίωση περιοχών του εδάφους θεμελίωσης και σε ορισμένες άλλες ειδικές περιπτώσεις, κυρίως μέσα στο γενικότερο πλαίσιο της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.



Σχ. 2.2.3-1 Στοιχείο όγκου

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2.5 Στατικά συστήματα δομικών φορέων - Εισαγωγική παρουσίαση

Οι δομικοί φορείς συντίθενται από δομικά στοιχεία σε πολλούς διαφορετικούς συνδυασμούς ανάλογα με τις ανάγκες που καλούνται να καλύψουν. Συνήθως, οι δομικοί φορείς είναι *μικτοί*, αποτελούνται δηλαδή από συζευγμένα μεταξύ τους γραμμικά στοιχεία (π.χ. οριζόντιες δοκούς, κατακόρυφα υποστυλώματα, ράβδους-ελκυστήρες), επιφανειακά στοιχεία (π.χ. δίσκους-τοιχώματα, πλάκες ορόφων, κελύφη στέγης) και στοιχεία όγκου (π.χ. πέλματα θεμελίων). Εντούτοις, υφίστανται και *αμιγείς* φορείς, που κατασκευάζονται από στοιχεία ενός μόνον τύπου. Εξάλλου και σε μικτούς φορείς συναντώνται *αμιγείς υποφορείς*, τμήματα δηλαδή του συνολικού φορέα που αποτελούνται από στοιχεία του ίδιου τύπου.

Στις ακόλουθες παραγράφους παρουσιάζονται και σχολιάζονται με συντομία και σε εισαγωγικό επίπεδο ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα δομικών φορέων, αμιγών και μικτών, προκειμένου ο αναγνώστης να αποκτήσει μία πιο συγκεκριμένη εικόνα του πραγματικού αντικειμένου των στατικών υπολογισμών.

2.5.1 Γραμμικοί δομικοί φορείς και τα προσομοιώματά τους

Οι δομικοί φορείς που συντίθενται αποκλειστικά από γραμμικά δομικά στοιχεία (ράβδους ή/και δοκούς) ονομάζονται *αμιγώς γραμμικοί φορείς* ή απλά *γραμμικοί φορείς*. Η σύνδεση των επί μέρους γραμμικών στοιχείων προκειμένου να σχηματιστεί ο γραμμικός φορέας και η στήριξη του φορέα αυτού στο στερεό έδαφος θεμελίωσης μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, μερικοί από τους οποίους παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη παράγραφο 2.4. Τα γραμμικά στοιχεία ενός γραμμικού φορέα μπορεί να είναι τοποθετημένα είτε αποκλειστικά σε ένα επίπεδο είτε στον χώρο, οπότε ο φορέας χαρακτηρίζεται ως *επίπεδος φορέας* ή *χωρικός φορέας* αντίστοιχα. Συχνά, κατά τη διαδικασία προσομοίωσης, οι συμμετρίες που εμφανίζει ένας χωρικός φορέας *επιτρέπουν την αναγωγή του σε μία σειρά επίπεδων υποφορέων* που επιδέχονται ανεξάρτητο υπολογισμό. Γι' αυτό - μεταξύ άλλων - έχει ιδιαίτερη αξία η μελέτη ορισμένων τύπων επίπεδων φορέων, όπως π.χ. του επίπεδου δικτύωματος, του επίπεδου πλαισίου, του επίπεδου τόξου και της εσχάρας δοκών.

A. Δοκοί ενός ή περισσότερων ανοιγμάτων

Ένα από τα αρχαιότερα, απλούστερα και - ακόμη και σήμερα - πλέον συνήθη και διαδεδομένα δομικά συστήματα αποτελείται από ένα και μόνο, οριζόντιο τοποθετημένο, γραμμικό στοιχείο που στηρίζεται σε δύο μόνο σημεία του, συνήθως στα δύο του άκρα (Σχ. 2.5.1-1). Αν και η μηχανική συμπεριφορά μιας τέτοιας απλής *αμφιέριστης δοκού* μας φαίνεται σήμερα προφανής και ο υπολογισμός της φέρουσας ικανότητάς της τετριμμένος, απαιτήθηκαν αρκετοί αιώνες εντατικής διερεύνησης από σημαντικούς επιστήμονες (όπως ο Leonardo da Vinci, ο Γαλιλαίος, ο Coulomb κ.ά) για να λυθεί οριστικά το πρόβλημα της καμπτόμενης δοκού (βλ. παράγρ. 1.2.1).

Κεφάλαιο 2. Οι κατασκευές και τα προσομοιώμά τους



Σχ. 2.5.1-1 Απλές (αμφιέριστες) δοκοί: Άνω: Stonehedge, νεολιθικό μεγαλιθικό μνημείο (2500-2000 π.Χ.) στο Amesbury της Αγγλίας. Μέση: Γέφυρα από κορμούς δένδρων. Κάτω: Σύγχρονη αμφιέριστη οδογέφυρα οπλισμένου σκυροδέματος με προένταση.

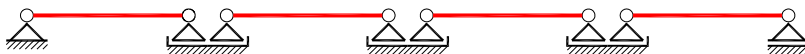
Βεβαίως, μια αμφιέρειστη δοκός δεν είναι οπωσδήποτε ευθύγραμμη, αλλά μπορεί να είναι καμπυλωτή σε οριζόντιο επίπεδο (Σχ. 2.5.1-2, άνω), σε κατακόρυφο επίπεδο (οπότε συνήθως χαρακτηρίζεται ως τόξο - βλ. παρακάτω υποπαράγραφο Ε) ή και στον χώρο (Σχ. 2.5.1-2, κάτω).



Σχ. 2.5.1-2 Οριζοντίως καμπυλομένες μεταλλικές δοκοί (άνω) και καμπύλες δοκοί στον

χώρο (κάτω)

Από τα παλαιότερα επίσης χρόνια χρησιμοποιήθηκαν περισσότερες απλές δοκοί εν σειρά, προκειμένου να γεφυρωθούν μεγαλύτερες αποστάσεις (Σχ. 2.5.1-3).



Σχ. 2.5.1-3 Απλές δοκοί εν σειρά για γεφύρωση μεγαλύτερων αποστάσεων

Το κατά κάποιο τρόπο αμέσως συνθετότερο δομικό σύστημα είναι η στήριξη μιας δοκού σε περισσότερα από δύο σημεία. Δημιουργείται έτσι ένας από τους πλέον βασικούς φορείς ή υποφορείς των σύγχρονων κατασκευών: η *συνεχής δοκός* (Σχ. 2.5.1-4).



Σχ. 2.5.1-4 Συνεχής δοκός δύο ανοιγμάτων από επεξεργασμένο κορμό δένδρου

Γενικά, μία συνεχής δοκός αποτελείται από δύο ή περισσότερα ευθύγραμμα ή και καμπύλα γραμμικά στοιχεία μονολιθικά συνδεδεμένα μεταξύ τους (Σημ.: Τα στοιχεία μπορεί να έχουν διαφορετικές διατομές) και στηρίζεται σε τρία ή περισσότερα σημεία της. Παραδείγματα συνεχών δοκών συναντώνται σε όλους σχεδόν τους τομείς της δομικής πράξης. Έτσι, π.χ. στη μεταλλική δικτυωτή γέφυρα του σχήματος 2.1.4-1 κάθε μία από τις δύο διαμήκεις δοκούς του καταστρώματος είναι μία συνεχής δοκός επί πέντε στηρίξεων. Συνεχείς δοκοί πολλαπλών ανοιγμάτων είναι και οι κύριες δοκοί της μεταλλικής γέφυρας του σχήματος 2.5.1-5.



Σχ. 2.5.1-5 Γέφυρα με μεταλλικές συνεχείς κύριες δοκούς πολλαπλών ανοιγμάτων

Ένας άλλος πολύ συχνά συναντώμενος τύπος συνεχούς δοκού με συμπαγή διατομή είναι τα ζυγώματα πολύστυλων πλαισίων από οπλισμένο σκυρόδεμα (βλ. παρακάτω Σχ. 2.5.1-18). Τα πλαίσια αυτά υπολογίζονται σήμερα ως ενιαίοι επίπεδοι ή και χωρικοί φορείς, αλλά παλαιότερα τα ζυγώματά τους υπολογίζονταν προσεγγιστικά ως ανεξάρτητες συνεχείς δοκοί επί ακλόνητων στηρίξεων/κυλίσεων στις θέσεις των υποστυλωμάτων.

Σημειώνεται ότι η διατομή μιας συνεχούς δοκού δεν είναι απαραίτητως συμπαγής, αλλά μπορεί - ιδίως στη γεφυροποιία - να είναι κοίλη (κιβωτιοειδής), όπως αυτή του σχήματος 2.5.1-6.



Σχ. 2.5.1-6 Γέφυρα οπλισμένου σκυροδέματος με κιβωτιοειδή διατομή: Συνεχής δοκός επί πολλαπλών στηρίξεων (βάθρων)

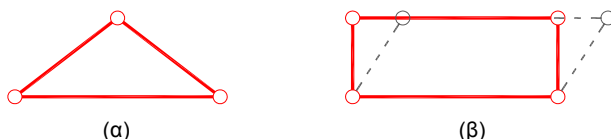
Τέλος, μία συνεχής δοκός δεν είναι οπωσδήποτε ευθύγραμμη, αλλά μπορεί βέβαια να έχει καμπύλη γεωμετρία (Σχ. 2.5.1-7).



Σχ. 2.5.1-7 Καμπύλη συνεχής δοκός κιβωτιοειδούς διατομής

Β. Δικτυωτοί φορείς

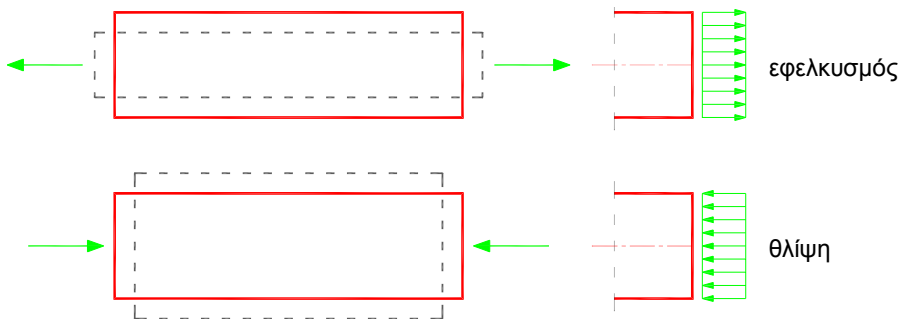
Φορείς συντιθέμενοι αποκλειστικά από ράβδους που καταπονούνται (είτε πραγματικά είτε κατά παραδοχή κατόπιν εξιδανικεύσεως της συμπεριφοράς τους) μόνο αξονικά (σε εφελκυσμό ή/και θλίψη) ονομάζονται *δικτυωτοί φορείς* ή απλώς *δικτυώματα*. Βασική μονάδα σύνθεσης των δικτυωμάτων είναι ο αποτελούμενος από τρεις ράβδους *τριγωνικός ραβδοδίσκος* (Σχ. 2.5.1-8(α)). Ο τριγωνικός ραβδοδίσκος αποτελεί έναν *εσωτερικά στερεό* φορέα, σε αντίθεση π.χ. με τον σχηματισμό τεσσάρων ράβδων του σχήματος 2.5.1-8(β), ο οποίος μπορεί να αλλάζει μορφή χωρίς να ενεργούν επάνω του δυνάμεις, όπως διαισθητικά εύκολα γίνεται αντιληπτό.



Σχ. 2.5.1-8 Στερεός τριγωνικός ραβδοδίσκος (α) και κινηματικός σχηματισμός ράβδων (β)

Δεδομένου ότι οι τριγωνικοί ραβδοδίσκοι μπορούν να συνδυαστούν όχι μόνο στο επίπεδο, αλλά και στον χώρο σχηματίζοντας επίπεδα ή και καμπύλα μορφώματα, η ποικιλία των πιθανών συνδυασμών τους προς δημιουργία επιπέδων και χωρικών δικτυωμάτων είναι πολύ μεγάλη, όπως φαίνεται και από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

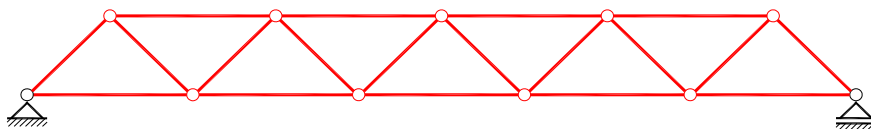
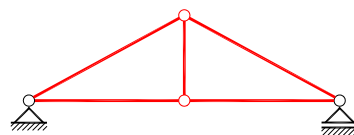
Σχετικά με τη μεταφορά των φορτίων στα δικτυώματα θεωρούμε ότι αυτή γίνεται αποκλειστικά μέσω της αξονικής καταπόνησης των ράβδων, δεχόμεστε δηλαδή ότι οι ράβδοι συνδέονται μεταξύ τους με πλήρεις αρθρώσεις. Έτσι, υπό τον πρόσθετο όρο ότι οι ράβδοι ενός δικτυώματος δεν φορτίζονται μεταξύ των κόμβων τους με εγκάρσια φορτία (Σημ.: Τα ίδια βάρη τους θεωρείται ότι ενεργούν ως συγκεντρωμένα φορτία στους κόμβους τους), η αξονική δύναμη N κάθε ράβδου είναι σταθερή σε όλο το μήκος της, προκαλώντας μία ομοιόμορφη καταπόνηση της διατομής της (εμβαδού A) με σταθερές ορθές τάσεις $\sigma = N/A$ (εφελκυστικές/θλιπτικές, Σχ. 2.5.1-9).



Σχ. 2.5.1-9 Ομοιόμορφη και σταθερή αξονική τάση στις ράβδους δικτυωμάτων

Λόγω ακριβώς αυτής της πλήρους και ομοιόμορφης εκμετάλλευσης της διατομής των ράβδων τους, τα δικτυώματα αποτελούν ιδιαίτερα οικονομικούς και αποτελεσματικούς δομικούς φορείς, επιτρέποντας την κάλυψη μεγάλων ανοιγμάτων εξίσου ικανοποιητικά στο επίπεδο όσο και στον χώρο.

Όπως οι δοκοί, έτσι και τα δικτυώματα μπορεί να είναι αμφιέριστα ή συνεχώς εδραζόμενα, ευθύγραμμα ή καμπύλα, επίπεδα ή χωρικά. Στα ακόλουθα σχήματα δίνονται ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα δικτυωμάτων.



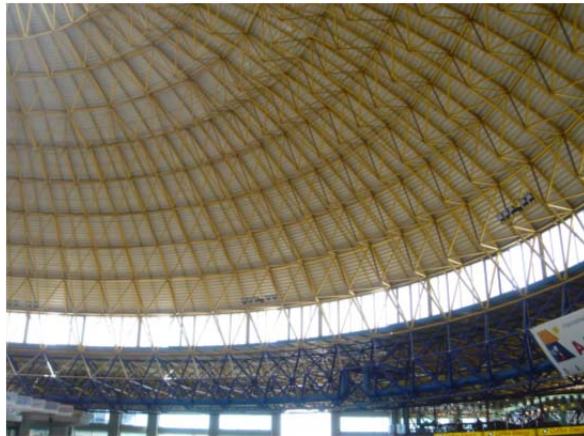
Σχ. 2.5.1-10 Παλαιά ξύλινη δικτυωτή οδογέφυρα (άνω) και στοιχειώδης δικτυωτή μεταλλική πεζογέφυρα (κάτω)



Σχ. 2.5.1-11 Αμφιέριστη δικτυωτή γέφυρα (άνω), αμφιέριστα δικτυώματα εν σειρά (μέση) και δικτυωτή συνεχής δοκός πολλών ανοιγμάτων (κάτω)



Σχ. 2.5.1-12 Στέγαστρο βιομηχανικής αίθουσας αποτελούμενο από διαμήκη και εγκάρσια επίπεδα δικτυώματα



Σχ. 2.5.1-13 Θολωτό στέγαστρο με χωροδικτύωμα ως φέροντα οργανισμό.



Σχ. 2.5.1-14 Δικτυωτοί πύργοι (αριστ.: ηλεκτρικών καλωδίων, δεξ.: ψύξης)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



6

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ
ΕΝΤΑΣΙΑΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ
ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

6. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΝΤΑΣΙΑΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΙΣΟΣΤΑΤΙΚΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

6.1 Οι μέθοδοι υπολογισμού εντασιακών μεγεθών

Ο υπολογισμός των άγνωστων εξωτερικών και εσωτερικών εντασιακών μεγεθών (βλ. πίν. 3.1.4-1), τα οποία προκαλούνται από σταθερές ή μεταβαλλόμενες δράσεις (φορτία και καταναγκασμούς) που δρουν επάνω στον δομικό φορέα, αποτελεί το "πρώτο βασικό πρόβλημα" της Στατικής των Κατασκευών (Σημ.: Το "δεύτερο βασικό πρόβλημα" συνίσταται στον υπολογισμό των αναπτυσσόμενων παραμορφωσιακών μεγεθών). Όπως γνωρίζουμε, τα άγνωστα *εξωτερικά* μεγέθη έντασης δεν είναι παρά οι αντιδράσεις στις στηρίξεις του φορέα (βλ. παράγρ. 3.2.5), ενώ τα άγνωστα *εσωτερικά* μεγέθη έντασης είναι τα φορτία διατομής των δομικών του στοιχείων (βλ. παράγρ. 3.2.6). Εφόσον πρόκειται για ισοστατικούς φορείς, αρκούν για τον μονοσήμαντο υπολογισμό όλων των εντασιακών μεγεθών οι συνθήκες ισορροπίας (Υπενθύμιση: Ο υπολογισμός των εντασιακών μεγεθών υπερστατικών φορέων απαιτεί την παράλληλη ικανοποίηση των συνθηκών συμβιβαστού σε συνδυασμό με τον νόμο υλικής συμπεριφοράς και αποτελεί αντικείμενο του δεύτερου τόμου του παρόντος συγγράμματος [Αβρ-II]). Ανάλογα με τον τρόπο ικανοποίησης των συνθηκών ισορροπίας προκύπτουν οι ακόλουθοι τρεις τρόποι υπολογισμού εντασιακών μεγεθών ισοστατικών φορέων:

1. Η μέθοδος των διαχωριστικών τομών σε συνδυασμό με τις συνθήκες ισορροπίας.
2. Η αναλυτική επίλυση (ολοκλήρωση) των διαφορικών εξισώσεων ισορροπίας.
3. Η κινηματική μέθοδος που βασίζεται στην αρχή των δυνατών έργων.

Με τις δύο πρώτες μεθόδους μπορούμε να υπολογίσουμε: (α) τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται σε συγκεκριμένα σημεία του φορέα, όπως π.χ. σε μια στήριξη ή σε μια ορισμένη διατομή του, και (β) τη μεταβολή των φορτίων διατομής κατά μήκος του άξονα των γραμμικών δομικών στοιχείων, δηλαδή τα διαγράμματα $M(x)$, $Q(x)$, $N(x)$ κτλ. Η τρίτη μέθοδος, η οποία στηρίζεται στην αρχή των δυνατών έργων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον στοχευμένο υπολογισμό ενός σημειακού εντασιακού μεγέθους, π.χ. μιας αντίδρασης στήριξης ή μιας καμπτικής ροπής σε μια συγκεκριμένη διατομή. Αργότερα θα δούμε ότι η κινηματική μέθοδος και η αρχή των δυνατών έργων εφαρμόζονται με ιδιαίτερο πλεονέκτημα και για τον υπολογισμό της γραμμής επιρροής ενός εντασιακού μεγέθους (βλ. κεφ. 10).

Στις παραπάνω τρεις μεθόδους υπολογισμού εντασιακών μεγεθών ισοστατικών φορέων αναφέρονται οι ακόλουθες παράγραφοι 6.2, 6.3 και 6.4 αντίστοιχα. Χάριν απλουστευσης της παρουσίασης θα χρησιμοποιηθούν εδώ ως παραδείγματα μόνο επίπεδοι φορείς, χωρίς όμως αυτό να περιορίζει επί της ουσίας τη γενικότητα των αναπτυσσόμενων μεθόδων υπολογισμού. Παραδείγματα υπολογισμού χωρικών φορέων περιέχονται στον τόμο των ασκήσεων ([Αβρ-Ia], Ασκήσεις σειρών Z και Θ).

Ιστορική σημείωση:

Μέχρι και τα μέσα του 20^{ου} αιώνα ήταν ευρύτατα διαδεδομένη η Γραφική Μέθοδος για τον υπολογισμό των εντασιακών μεγεθών ισοστατικών φορέων. Τις βάσεις της λεγόμενης *Γραφοστατικής* έθεσε ο Βαυβαρός *Karl Culmann* (1821-1881), τότε καθηγητής στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης, στο βιβλίο του "Die Graphische Statik" (Zürich 1866), ενώ στην περαιτέρω ανάπτυξη της συνέβαλαν μεταξύ άλλων ο Ιταλός *Luigi Cremona* (1830-1903), που εισήγαγε το ομώνυμο "διάγραμμα Cremona" για τον υπολογισμό των αξονικών δυνάμεων στις ράβδους ισοστατικών δικτυωμάτων, ο Γάλλος *M. Williot*, που εισήγαγε το ομώνυμο "διάγραμμα Williot" για τον προσδιορισμό των μετατοπίσεων των κόμβων, ο Γερμανός *August Ritter* (1847-1906), που εισήγαγε τη "μέθοδο των διαχωριστικών τομών" για τον υπολογισμό δικτυωμάτων, και ο επίσης Γερμανός *Emil Winkler* (1835-1888). Για πολλές δεκαετίες οι μέθοδοι της Γραφοστατικής αποτελούσαν το βασικό υπολογιστικό "εργαλείο" στα χέρια των μηχανικών, μέχρις ότου οι γραφικές μέθοδοι παροπλίστηκαν με την έλευση των αριθμομηχανών. Παρόλο που σήμερα οι μέθοδοι αυτές έχουν περιέλθει σε πλήρη αχρησία, η ενασχόληση μαζί τους έχει περισσότερο από ιστορικό μόνο ενδιαφέρον λόγω του συχνά εξαιρετικά εποπτικού τρόπου με τον οποίο προσδιορίζονταν σχεδιαστικά-διανυσματικά τα εντασιακά μεγέθη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει - πέραν του προαναφερθέντος συγγράμματος του Culmann - στο κλασικό σύγγραμμα του *Müller-Breslau* (1851-1925), καθηγητή της Στατικής των Κατασκευών στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, με τίτλο "Die graphische Statik der Baukonstruktionen" (4. Auflage, 1905, Verlag Alfred Kroener, Stuttgart und Leipzig) ή και σε "νέοτερα" συγγράμματα, όπως π.χ. το βιβλίο του R. Kirchhoff, "Die Statik der Baukonstruktionen" (5. Auflage, 1953, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn). Σημειώνεται επίσης ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ισοστατικών φορέων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η προαναφερθείσα μέθοδος της εναλλαγής ράβδων (βλ. παράγρ. 5.3.2) με πλεονεκτικό τρόπο για τον "χειροκίνητο" υπολογισμό των εντασιακών μεγεθών. Και αυτή η μέθοδος περιγράφεται αναλυτικά σε παλαιότερα συγγράμματα Στατικής, ενώ στο παρόν σύγγραμμα η χρήση της περιορίζεται μόνο στον έλεγχο της κινηματικής ευστάθειας (στερεότητας) δεδομένων φορέων.

6.2 Υπολογισμός εντασιακών μεγεθών με τη μέθοδο των διαχωριστικών τομών και τις συνθήκες ισορροπίας

Η μέθοδος των διαχωριστικών τομών, την οποία έχουμε ήδη εφαρμόσει σε μία σειρά απλών φορέων (βλ. παράγρ. 3.2.5 και 3.2.6), συνίσταται

- α) στη θεώρηση νοητών κλειστών¹ διαχωριστικών τομών,
- β) στην προσαγωγή σε όλα τα σημεία τομής εσωτερικών ή εξωτερικών δεσμικών ράβδων των αντίστοιχων αντιδράσεων ή φορτίων διατομής αντιστοίχως, και
- γ) στην κατάρθρωση για τον ελεύθερο φορέα ή για το αποσπασθέν τμήμα του των συνθηκών ισορροπίας.

¹ Οι κλειστές διαχωριστικές τομές χαρακτηρίζονται επίσης ως 'κυκλικές' τομές όταν πρόκειται για επίπεδους φορείς και ως 'σφαιρικές' όταν πρόκειται για χωρικούς φορείς.

Υπενθυμίζεται ότι στη γενική περίπτωση χωρικών φορέων έχουμε στη διάθεσή μας σύμφωνα με την παράγραφο 3.2.3-Γ (βλ. εξ. (3.2.3-4)) τις έξι στερεοστατικές συνθήκες ισορροπίας:

$$\sum F_{nx} = 0 \quad \sum F_{ny} = 0 \quad \sum F_{nz} = 0 \quad (6.2-1a)$$

$$\sum M_{nx(i)} = 0 \quad \sum M_{ny(i)} = 0 \quad \sum M_{nz(i)} = 0, \quad (6.2-1b)$$

ενώ στην ειδικότερη περίπτωση των επίπεδων φορέων που φορτίζονται μέσα στο επίπεδό τους διαθέτουμε μόνο τρεις. Π.χ., στο επίπεδο X-Z (Σημ.: Κατά κανόνα ο άξονας X επιλέγεται ως ο οριζόντιος και ο άξονας Z ως ο κατακόρυφος άξονας αναφοράς) διαθέτουμε τις εξής τρεις συνθήκες ισορροπίας:

$$\text{Άθροισμα οριζοντίων δυνάμεων ίσο με μηδέν:} \quad \sum F_{nx} = 0 \quad (6.2-2a)$$

$$\text{Άθροισμα κατακορύφων δυνάμεων ίσο με μηδέν:} \quad \sum F_{nz} = 0 \quad (6.2-2b)$$

$$\text{Άθροισμα ροπών ως προς το σημείο i ίσο με μηδέν:} \quad \sum M_{ny(i)} = 0 \quad (6.2-2\gamma)$$

Σημείωση-Υπενθύμιση:

Ο δείκτης n είναι ο δείκτης άθροισης και περιλαμβάνει όλα τα σημεία όπου ενεργούν μεγέθη έντασης που πρέπει να ληφθούν υπόψη. Ο δείκτης άθροισης συνήθως παραλείπεται ως αυτονόητος. Ο δείκτης i μέσα σε παρένθεση είναι το τυχόν σημείο ως προς το οποίο σχηματίζονται οι ροπές όλων των εξωτερικών φορτίων (δυνάμεων) ως προς τον άξονα του συστήματος αναφοράς που σημειώνεται πριν από τον δείκτη (i).

Οι νοητές κλειστές διαχωριστικές τομές (για συντόμευση απλά: διαχωριστικές τομές) μπορούν να είναι δύο ειδών:

- 1-i) *Συνολικές τομές*, με τις οποίες αποσπάται ολόκληρος ο φορέας από τις στηρίξεις του (Αρχή της αποδέσμευσης του Lagrange, βλ. παράγρ. 3.2.5-Γ).

Στην περίπτωση αυτή οι συνθήκες ισορροπίας που καταστρώνονται περιέχουν μόνο τα εξωτερικά φορτία και τις αντιδράσεις στηρίξεων. Αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού των αντιδράσεων στήριξης απλών, ισοστατικά εδραζόμενων φορέων δόθηκαν στην παράγραφο 3.2.5-Δ. Αν ο φορέας είναι μεν συνολικά ισοστατικός, αλλά οι αντιδράσεις των στηρίξεων του είναι περισσότερες από τις διαθέσιμες (3 στο επίπεδο, 6 στον χώρο) συνθήκες ισορροπίας, τότε απαιτείται η θεώρηση και άλλων διαχωριστικών τομών, που περιλαμβάνουν κατάλληλα επιλεγμένα τμήματα του φορέα.

- 1-ii) *Τμηματικές τομές*, με τις οποίες αποσπώνται από τον φορέα μικρότερα ή μεγαλύτερα τμήματά του.

Στην περίπτωση αυτή, οι συνθήκες ισορροπίας που καταστρώνονται περιέχουν γενικώς εξωτερικά φορτία, αντιδράσεις στηρίξεων και φορτία διατομής. Ενδέχεται όμως να περιέχουν μόνο εξωτερικά φορτία και

φορτία διατομής ή μόνο αντιδράσεις και φορτία διατομής ή και μόνο φορτία διατομής. Αριθμητικά παραδείγματα υπολογισμού των φορτίων διατομής απλών ισοστατικών φορέων δόθηκαν στην παράγραφο 3.2.6-Δ.

- 2) *Κομβικές τομές*, με τις οποίες αποσπώνται μεμονωμένοι κόμβοι από τον υπόλοιπο φορέα. Οι κομβικές τομές αποτελούν ειδική περίπτωση των τμηματικών τομών, αφού ένας κόμβος είναι τμήμα (αν και μηδενικών διαστάσεων) του φορέα.

Στην περίπτωση αυτή, οι συνθήκες ισορροπίας που καταστρώνονται περιέχουν τα τυχόν εξωτερικά φορτία που δρουν στον αποσπασθέντα κόμβο, καθώς και τα επικόμβια φορτία των τμηθεισών διατομών.

6.2.1 Η μέθοδος των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών

(Κατάσρωση ισορροπίας σε ολόκληρο τον φορέα ή σε τμήματά του)

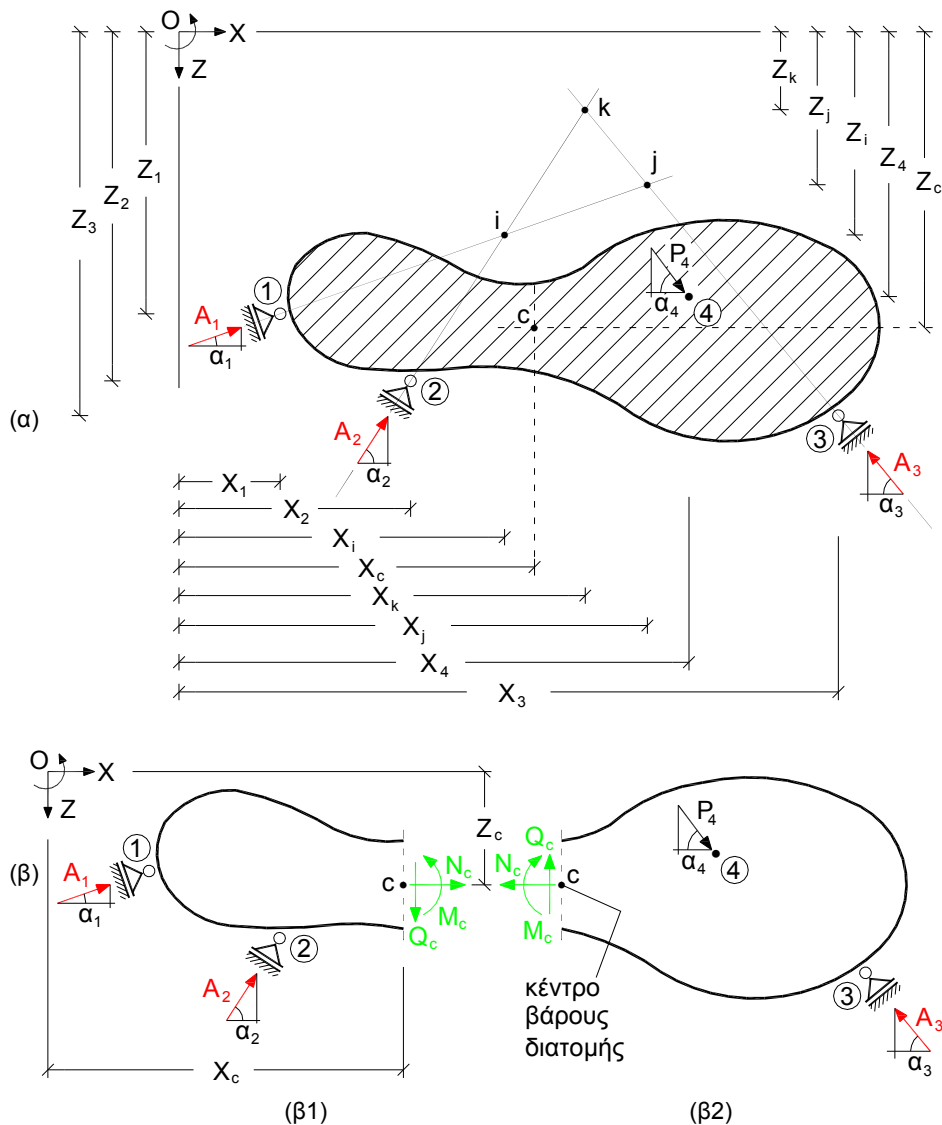
Ο υπολογισμός της εντασιακής κατάστασης ενός φορέα (δηλαδή ο υπολογισμός όλων των εντασιακών του μεγεθών) με τη βοήθεια συνολικών ή/και τμηματικών ή/και κομβικών διαχωριστικών τομών απαιτεί κατά κανόνα την προηγούμενη γνώση των αντιδράσεων στήριξης του φορέα και ενδεχομένως, αν ο φορέας αποτελείται από περισσότερους δίσκους, επιπλέον τη γνώση των *ενδιάμεσων αντιδράσεων* στα σημεία σύνδεσης των δίσκων. Συνεπώς, ο υπολογισμός διεξάγεται σε δύο βήματα:

- I. Πρώτα υπολογίζονται οι αντιδράσεις στις στηρίξεις του φορέα (και ενδεχομένως οι ενδιάμεσες αντιδράσεις στα σημεία σύνδεσης των δίσκων από τους οποίους συντίθεται ο φορέας).
- II. Σε ένα δεύτερο βήμα, με γνωστές πλέον τις αντιδράσεις στήριξης (και ενδεχομένως τις ενδιάμεσες αντιδράσεις), επιλέγονται οι κατάλληλες διαχωριστικές τομές για τον υπολογισμό των ζητούμενων φορτίων διατομής και καταστρώνονται για το εκάστοτε διαχωρισθέν τμήμα του φορέα οι συνθήκες ισορροπίας.

A. Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης ενός φορέα που ως ελεύθερο σώμα αποτελεί έναν στερεό δίσκο

Όπως γνωρίζουμε (βλ. παράγρ. 3.2.4), η ισοστατική στήριξη ενός φορέα, που θεωρούμενος ως ελεύθερο σώμα αποτελεί έναν στερεό δίσκο, απαιτεί (α) τρεις δρομικές δεσμικές ράβδους αν είναι επίπεδος και φορτίζεται μέσα στο επίπεδό του και (β) έξι δρομικές δεσμικές ράβδους αν είναι χωρικός. Προκειμένου η στήριξη να είναι κινηματικά ευσταθής, οι άξονες των δρομικών δεσμικών αυτών ράβδων θα πρέπει στη μεν περίπτωση του επιπέδου φορέα να μην τέμνονται σε ένα σημείο (και κατά συνέπεια: να μην είναι παράλληλες), στη δε περίπτωση του χωρικού φορέα να μην τέμνουν την ίδια ευθεία. (Σημ.: Σε περίπτωση χρήσης όχι μόνο δρομικών, αλλά και στροφικών δεσμικών ράβδων ισχύουν ανάλογοι κανόνες που εξασφαλίζουν την κινηματική ευστάθεια και την ισοστατικότητα).

Για να υπολογίσουμε τώρα αυτές τις (τρεις ή έξι) αντιδράσεις στήριξης αναλύουμε όλα τα δεδομένα εξωτερικά φορτία (δυνάμεις και ροπές) και όλες τις αντιδράσεις στήριξης σε συνιστώσες κατά την έννοια των (δύο ή τριών) αξόνων συντεταγμένων του καθολικού συστήματος αναφοράς και στη συνέχεια καταστρώνουμε τις (τρεις ή έξι) συνθήκες ισορροπίας (εξ. (6.2-2) ή εξ. (6.2-1)). Π.χ., στην περίπτωση του επιπέδου φορέα του σχήματος 6.2.1-1(α) καταστρώνουμε δύο



Σχ. 6.2.1-1 Υπολογισμός (α) αντιδράσεων στήριξης και (β) φορτίων διατομής ενός ισοστατικού εδραζόμενου δίσκου στο επίπεδο

συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων κατά Χ και κατά Ζ, και μία συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο (εδώ ως προς την αρχή Ο του συστήματος αναφοράς):

$$\begin{aligned}
 \sum F_x = 0 & : A_1 \cdot \cos \alpha_1 + A_2 \cdot \cos \alpha_2 - A_3 \cdot \cos \alpha_3 + P_4 \cdot \cos \alpha_4 = 0 \\
 \sum F_z = 0 & : -A_1 \cdot \sin \alpha_1 - A_2 \cdot \sin \alpha_2 - A_3 \cdot \sin \alpha_3 + P_4 \cdot \sin \alpha_4 = 0 \\
 \sum M_{Y(0)} = 0 & : A_1 \cdot (X_1 \cdot \sin \alpha_1 + Z_1 \cdot \cos \alpha_1) + A_2 \cdot (X_2 \cdot \sin \alpha_2 + Z_2 \cdot \cos \alpha_2) + \\
 & + A_3 \cdot (X_3 \cdot \sin \alpha_3 - Z_3 \cdot \cos \alpha_3) - P_4 \cdot (X_4 \cdot \sin \alpha_4 - Z_4 \cdot \cos \alpha_4) = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.1-1}$$

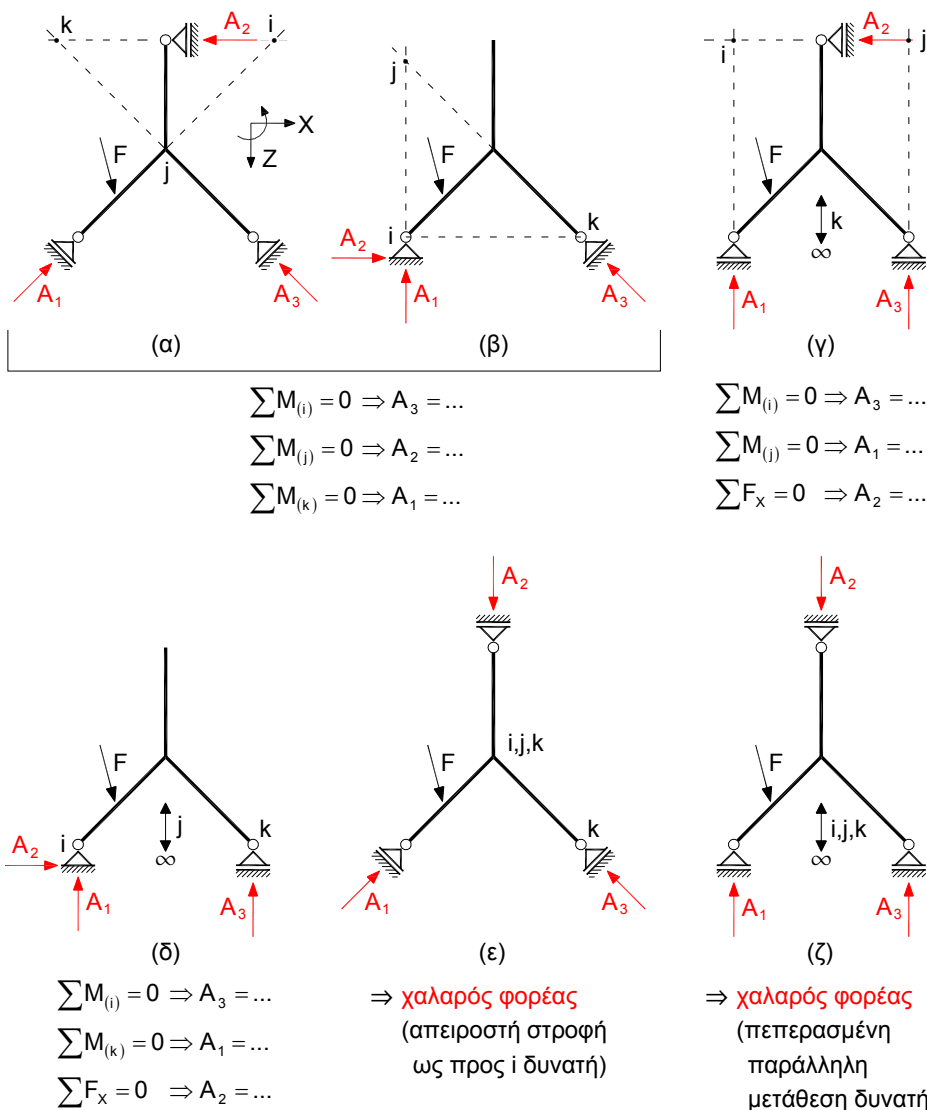
Η επίλυση του συστήματος των τριών αυτών γραμμικών εξισώσεων μας δίνει τις τιμές των ζητούμενων αντιδράσεων στήριξης του επίπεδου φορέα. Σε χωρικούς φορείς ο υπολογισμός των έξι αντιδράσεων στήριξης απαιτεί προφανώς την επίλυση ενός συστήματος έξι γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας.

Η αναγκαιότητα επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων μπορεί εντούτοις σε πολλές περιπτώσεις να παρακαμφθεί. Πράγματι, δεδομένου ότι η συνθήκη ισορροπίας των ροπών μπορεί να καταστρωθεί ως προς έναν οποιονδήποτε άξονα στον χώρο ή ως προς ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου (και όχι αναγκαστικά ως προς την αρχή Ο του καθολικού συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω), μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε ξεχωριστά κάθε αντίδραση στήριξης από μία και μόνο εξίσωση. Έτσι, καταστρώνοντας για το παράδειγμα του σχήματος 6.2.1-1(α) τις συνθήκες ισορροπίας ροπών διαδοχικά ως προς τα τρία σημεία i, j και k, στα οποία τέμνονται ανά δύο οι άξονες των δομικών ράβδων στήριξης, παίρνουμε κάθε φορά μία εξίσωση για την τρίτη αντίδραση στήριξης (της οποίας ο άξονας δεν διέρχεται από το χρησιμοποιηθέν σημείο):

$$\begin{aligned}
 \sum M_{Y(i)} = 0 & : A_3 \cdot [(X_3 - X_i) \cdot \sin \alpha_3 - (Z_3 - Z_i) \cdot \cos \alpha_3] + \\
 & + P_4 \cdot [-(X_4 - X_i) \cdot \sin \alpha_4 + (Z_4 - Z_i) \cdot \cos \alpha_4] = 0 \\
 \sum M_{Y(j)} = 0 & : A_2 \cdot [(X_2 - X_j) \cdot \sin \alpha_2 + (Z_2 - Z_j) \cdot \cos \alpha_2] + \\
 & + P_4 \cdot [-(X_4 - X_j) \cdot \sin \alpha_4 + (Z_4 - Z_j) \cdot \cos \alpha_4] = 0 \\
 \sum M_{Y(k)} = 0 & : A_1 \cdot [(X_1 - X_k) \cdot \sin \alpha_1 + (Z_1 - Z_k) \cdot \cos \alpha_1] + \\
 & + P_4 \cdot [-(X_4 - X_k) \cdot \sin \alpha_4 + (Z_4 - Z_k) \cdot \cos \alpha_4] = 0
 \end{aligned} \tag{6.2.1-2}$$

Είναι σαφές ότι η δυνατότητα υπολογισμού των τριών αντιδράσεων στήριξης ενός επίπεδου φορέα από μεμονωμένες εξισώσεις ισορροπίας ροπών υφίσταται μόνο αν τα σημεία τομής των αξόνων δράσης τους σχηματίζουν ένα τρίγωνο (Στο παραπάνω παράδειγμα είναι το τρίγωνο i-j-k. Επίσης βλ. Σχ. 6.2.1-2(α,β)).

Αν το ένα από τα τρία σημεία τομής βρίσκεται στο άπειρο, τότε οι δύο εκ των τριών αντιδράσεων μπορούν να υπολογιστούν από συνθήκες ισορροπίας ροπών ως προς κατάλληλα σημεία, ενώ για την τρίτη απαιτείται μία εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων (βλ. Σχ. 6.2.1-2(γ,δ)).



Σχ. 6.2.1-2 Διάφορες περιπτώσεις στήριξης και χρησιμοποίησης συνθηκών ισορροπίας ροπών για τον υπολογισμό των αντιδράσεων ενός δίσκου στο επίπεδο

Αν όμως οι άξονες των αντιδράσεων συντρέχουν σε ένα σημείο (όπως π.χ. στον φορέα του σχήματος 6.2.1-2(ε)) ή τέμνονται στο άπειρο (δηλ. είναι παράλληλες

μεταξύ τους, όπως στον φορέα του σχήματος 6.2.1-2(ζ)), τότε ο υπολογισμός των αντιδράσεων δεν είναι δυνατός, αφού δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις κινηματικής ευστάθειας και κατά συνέπεια είναι αδύνατο να ικανοποιηθούν οι συνθήκες ισορροπίας.

Τέλος, σημειώνεται ότι αν για τον υπολογισμό των αντιδράσεων στήριξης χρησιμοποιηθούν συνθήκες ισορροπίας ροπών, οι δύο συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων ($\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_z=0$) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο των υπολογισθισών τιμών των αντιδράσεων, κάτι που συνιστάται σε κάθε περίπτωση.

Η παραπάνω περιγραφείσα διαδικασία άμεσου υπολογισμού (δηλ. χωρίς επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων) των αντιδράσεων στήριξης επίπεδων δίσκων με τη βοήθεια συνθηκών ισορροπίας ροπών αντί των αρχικών εξισώσεων ισορροπίας δυνάμεων μπορεί, όπως αντιλαμβάνεται εύκολα ο αναγνώστης, να επεκταθεί χωρίς δυσκολία και σε χωρικούς φορείς.

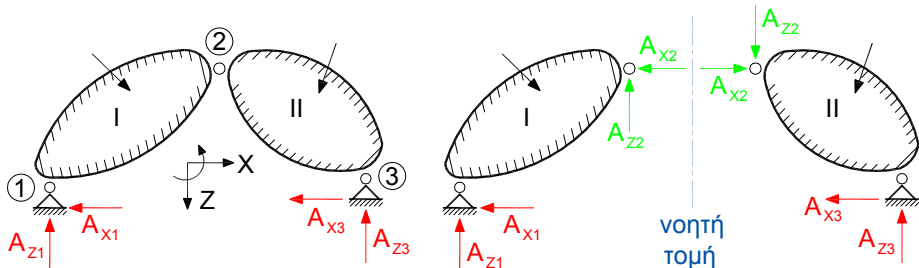
B. Υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης και των ενδιάμεσων αντιδράσεων ενός φορέα που ως ελεύθερο σώμα δεν αποτελεί στερεό δίσκο

Ένας ισοστατικός φορέας δεν είναι βέβαια πάντα ένας ισοστατικά εδραζόμενος δίσκος. Αντίθετα, ο φορέας μπορεί να αποτελείται από περισσότερους δίσκους, αρθρωτά συνδεδεμένους μεταξύ τους, οι οποίοι ως ελεύθερο σύμπλεγμα δεν αποτελούν στερεό δίσκο, αλλά λαμβανομένων υπόψη των στηρίξεων του φορέα συνθέτουν συνολικώς ένα στερεά εδραζόμενο ισοστατικό σύμπλεγμα. Η απλούστερη περίπτωση τέτοιου φορέα είναι το "τριαρθρωτό τόξο" (η λέξη 'τόξο' χρησιμοποιείται εδώ με γενικευμένη σημασία) που αποτελείται από δύο στερεούς δίσκους που συνδέονται μεταξύ τους και με το έδαφος μέσω καμπτικών αρθρώσεων (Σχ. 6.2.1-3). Ο υπολογισμός των αντιδράσεων στήριξης μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

- (α) Ο πρώτος συνίσταται στην κατάστρωση όλων των συνθηκών ισορροπίας για τον συνολικό φορέα, καθώς και όλων των μεταβατικών συνθηκών για τα αντίστοιχα τμήματα του φορέα (Σχ. 6.2.1-3(α)). (Σημ.: Μεταβατική ονομάζουμε μία στατική συνθήκη που περιγράφει μία ενδιάμεση άρθρωση).
- (β) Ο δεύτερος συνίσταται στον διαχωρισμό των επί μέρους δίσκων, από τους οποίους αποτελείται ο δεδομένος φορέας (στον τριαρθρωτό φορέα μας: των δύο δίσκων I και II), με νοητές τομές και στην κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας για κάθε δίσκο ξεχωριστά (Σχ. 6.2.1-3(β)). Στις συνθήκες ισορροπίας των επί μέρους δίσκων υπεισέρχονται βέβαια οι ενδιάμεσες αντιδράσεις που δρουν στα σημεία συνάρθρωσης των δίσκων.

Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις το συνολικό πλήθος των αγνώστων αντιδράσεων είναι ίσο με το πλήθος των διαθέσιμων συνθηκών ισορροπίας, οπότε ο προσδιορισμός των τελευταίων είναι μονοσήμαντος. Όπως και στην περίπτωση

του φορέα που αποτελείται από έναν μόνο δίσκο, έτσι και εδώ είναι δυνατή η αντικατάσταση μιας ή περισσοτέρων συνθηκών ισορροπίας δυνάμεων από συνθήκες ισορροπίας ροπών ως προς κατάλληλα επιλεγμένα σημεία με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγεται η επίλυση συστήματος εξισώσεων.



Συνθήκες ισορροπίας για τον συνολικό φορέα:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$\sum M_{(i)} = 0$$

(i τυχαίο σημείο)

Μεταβατική συνθήκη:

$$\sum M_{(2, \text{αριστερά})} = 0$$

$$\text{ή } \sum M_{(2, \text{δεξιά})} = 0$$

Άγνωστες αντιδράσεις:

$$A_{x1}, A_{z1}, A_{x3}, A_{z3}$$

(α)

Συνθήκες ισορροπίας για κάθε δίσκο (I και II) ξεχωριστά:

$$\sum F_x^I = 0$$

$$\sum F_z^I = 0$$

$$\sum M_{(j)}^I = 0$$

(j, k τυχαία σημεία)

Άγνωστες αντιδράσεις:

$$A_{x1}, A_{z1}, A_{x2}, A_{z2}, A_{x3}, A_{z3}$$

$$\sum F_x^{II} = 0$$

$$\sum F_z^{II} = 0$$

$$\sum M_{(k)}^{II} = 0$$

(β)

Σχ. 6.2.1-3 Υπολογισμός αντιδράσεων στήριξης ενός επίπεδου τριαρθρωτού φορέα

Γ. Υπολογισμός των φορτίων διατομής

Μετά τον υπολογισμό όλων των αντιδράσεων στις στήριξεις του φορέα (και ενδεχομένως των ενδιάμεσων αντιδράσεων στα σημεία σύνδεσης των δίσκων από τους οποίους συντίθεται ο φορέας) προχωρούμε στον υπολογισμό των φορτίων διατομής. Όπως ήδη γνωρίζουμε από την παράγραφο 3.2.6, ο υπολογισμός των φορτίων διατομής ακολουθεί τα εξής βήματα:

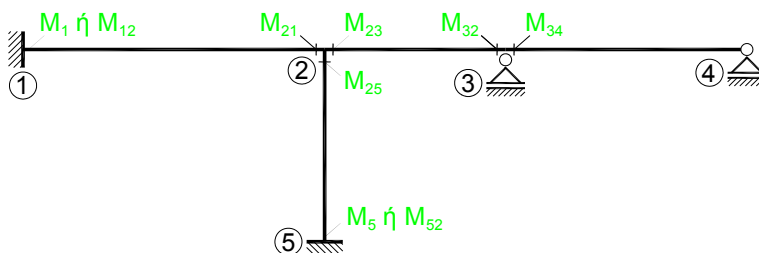
- Επιλέγεται μία κατάλληλη κλειστή διαχωριστική τομή (κυκλική σε επίπεδους και σφαιρική σε χωρικούς φορείς) που τέμνει (μεταξύ άλλων) εκείνη ακριβώς τη διατομή, στην οποία δρα το εκάστοτε ζητούμενο φορτίο διατομής.
- Στις θέσεις όλων των συνδέσμων που καταλύθηκαν με τη διαχωριστική τομή εισάγονται τα αντίστοιχα (εργικώς ανταποκρινόμενα) εντασιακά

μεγέθη (μεταξύ αυτών και το ζητούμενο) με την ορισθείσα συμβατικά θετική φορά τους.

- γ) Για το εκάστοτε διαχωρισθέν τμήμα του φορέα καταστρώνονται εκείνες οι συνθήκες ισορροπίας που περιλαμβάνουν ως άγνωστο μέγεθος μόνο το ζητούμενο φορτίο διατομής.

Σημείωση 1: Σύμβαση συμβολισμού φορτίων διατομής στα άκρα δομικών στοιχείων

Τα εντασιακά μεγέθη που αναπτύσσονται στα άκρα ενός δομικού στοιχείου i - k χαρακτηρίζονται για μεν το ('αριστερό') άκρο i με τους κάτω δείκτες ik , για δε το δεξιό άκρο k με τους κάτω δείκτες ki . Από τους δύο αυτούς δείκτες ο πρώτος αναφέρεται στο άκρο του στοιχείου όπου αναπτύσσεται το εντασιακό μέγεθος και ο δεύτερος αναφέρεται στο απέναντι άκρο του στοιχείου αυτού. Έτσι, π.χ., οι ροπές στα άκρα i και k ενός στοιχείου i - k συμβολίζονται ως M_{ik} και M_{ki} αντίστοιχα. Αν στον κόμβο α ενός φορέα συντρέχουν τα τρία γραμμικά στοιχεία α - β , α - γ και α - δ , τότε οι ροπές γύρω από τον κόμβο α (δηλαδή οι επικόμεβιες ροπές των τριών αυτών στοιχείων) χαρακτηρίζονται ως $M_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\gamma}$ και $M_{\alpha\delta}$. Ένα απλό παράδειγμα δίνεται στο παρακάτω σχήμα 6.2.1-4.



Σχ. 6.2.1-4 Συμβολισμοί ροπών κάμψης στα άκρα των δομικών στοιχείων

Σημείωση 2: Σύμβαση για τη σχεδίαση των βελών που συμβολίζουν φορτία διατομής

Τα βελάκια που συμβολίζουν εσωτερικά εντασιακά μεγέθη (δυνάμεις ή ροπές) σχεδιάζονται πάντοτε έτσι, ώστε να δείχνουν τη συμβατικά θετική φορά του αντίστοιχου μεγέθους.

Η πραγματική φορά ενός εντασιακού μεγέθους προκύπτει από τη φορά που έχει το βελάκι που το συμβολίζει σε συνδυασμό με το πρόσημο που έχει η αριθμητική τιμή του μεγέθους αυτού. Αν η τιμή είναι θετική, τότε η πραγματική φορά του μεγέθους συμπίπτει με τη συμβατικά θετική του φορά. Αν η τιμή είναι αρνητική, τότε η πραγματική φορά είναι ακριβώς αντίθετη της συμβατικά θετικής.

Είναι βέβαια δυνατόν να σχεδιάσει κανείς το βελάκι που συμβολίζει ένα εντασιακό μέγεθος, π.χ. τη ροπή στο άκρο i ενός στοιχείου i - k , με φορά αντίθετη της συμβατικά θετικής. Τότε όμως το βελάκι συμβολίζει όχι τη M_{ik} , αλλά τη $-M_{ik}$, και επομένως δίπλα στο βελάκι πρέπει να γράφεται $-M_{ik}$ (και όχι M_{ik}).

Με τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνεται στα χρησιμοποιούμενα κατά τους υπολογισμούς σχήματα ένας ενιαίος συμβολισμός των φορτίων διατομής και αποφεύγονται τα ιδιαίτερος επικίνδυνα λάθη προσήμου.

Επανερχόμαστε τώρα στην περίπτωση του επίπεδου φορέα του σχήματος 6.2.1-1(α). Ο υπολογισμός της αξονικής δύναμης N_c , της τέμνουσας δύναμης Q_c και της ροπής κάμψης M_c της τυχούσας διατομής c γίνεται είτε με τη βοήθεια των τριών εξισώσεων που αφορούν στο αριστερό τμήμα (βλ. Σχ. 6.2.1-1(β1)):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & : N_c + A_1 \cdot \cos \alpha_1 + A_2 \cdot \cos \alpha_2 = 0 \Rightarrow N_c = \dots \\ \sum F_z = 0 & : Q_c - A_1 \cdot \sin \alpha_1 - A_2 \cdot \sin \alpha_2 = 0 \Rightarrow Q_c = \dots \\ \sum M_{(c)} = 0 & : M_c - A_1 \cdot [(X_c - X_1) \cdot \sin \alpha_1 - (Z_c - Z_1) \cdot \cos \alpha_1] - \\ & - A_2 \cdot [(X_c - X_2) \cdot \sin \alpha_2 - (Z_c - Z_2) \cdot \cos \alpha_2] = 0 \Rightarrow M_c = \dots\end{aligned}\quad (6.2.1-3)$$

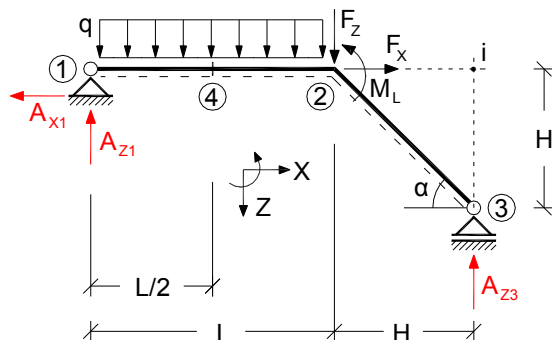
είτε με τη βοήθεια των τριών εξισώσεων που αφορούν στο δεξιό τμήμα (βλ. Σχ. 6.2.1-1(β2)):

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 & : -N_c + P_4 \cdot \cos \alpha_4 - A_3 \cdot \cos \alpha_3 = 0 \Rightarrow N_c = \dots \\ \sum F_z = 0 & : -Q_c + P_4 \cdot \sin \alpha_4 - A_3 \cdot \sin \alpha_3 = 0 \Rightarrow Q_c = \dots \\ \sum M_{(c)} = 0 & : -M_c - P_4 \cdot [(X_4 - X_c) \cdot \sin \alpha_4 - (Z_4 - Z_c) \cdot \cos \alpha_4] + \\ & + A_3 \cdot [(X_3 - X_c) \cdot \sin \alpha_3 - (Z_3 - Z_c) \cdot \cos \alpha_3] = 0 \Rightarrow M_c = \dots\end{aligned}\quad (6.2.1-4)$$

Επειδή οι προκύπτουσες τιμές των φορτίων διατομής είναι προφανώς ίδιες και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, μπορεί η μία από αυτές να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο των αποτελεσμάτων που προέκυψαν με τη βοήθεια της άλλης.

Δ. Παράδειγμα

Για τον απλό επίπεδο ισοστατικό φορέα του σχήματος 6.2.1-5 ζητούνται οι αντιδράσεις στήριξης και τα φορτία διατομής στα σημεία 1, 2, 3 και 4 με εφαρμογή της μεθόδου των διαχωριστικών τομών και των συνθηκών ισορροπίας.



Σχ. 6.2.1-5 Παράδειγμα υπολογισμού εντασιακών μεγεθών με διαχωριστικές τομές και συνθήκες ισορροπίας

Σύμφωνα με τα όσα αναπτύχθηκαν παραπάνω, υπολογίζουμε πρώτα τις τρεις αντιδράσεις στήριξης του φορέα χρησιμοποιώντας μία συνθήκη ισορροπίας δυνάμεων και δύο συνθήκες ισορροπίας ροπών:

$$\sum F_x = 0 : -A_{x1} + F_x = 0 \Rightarrow A_{x1} = F_x$$

$$\sum M_{(1)} = 0 : A_{z3} \cdot (L+H) - q \cdot L \cdot (L/2) - F_z \cdot L + M_L = 0$$

$$\Rightarrow A_{z3} = \frac{q \cdot L^2}{2 \cdot (L+H)} + \frac{F_z \cdot L}{(L+H)} - \frac{M_L}{(L+H)}$$

$$\sum M_{(i)} = 0 : -A_{z1} \cdot (L+H) + q \cdot L \cdot (L/2+H) + F_z \cdot H + M_L = 0$$

$$\Rightarrow A_{z1} = \frac{q \cdot L \cdot (L/2+H)}{(L+H)} + \frac{F_z \cdot H}{(L+H)} + \frac{M_L}{(L+H)} \quad (6.2.1-5)$$

Έλεγχοι:

$$\sum F_z = -A_{z1} + q \cdot L + F_z - A_{z3} \stackrel{!}{=} 0$$

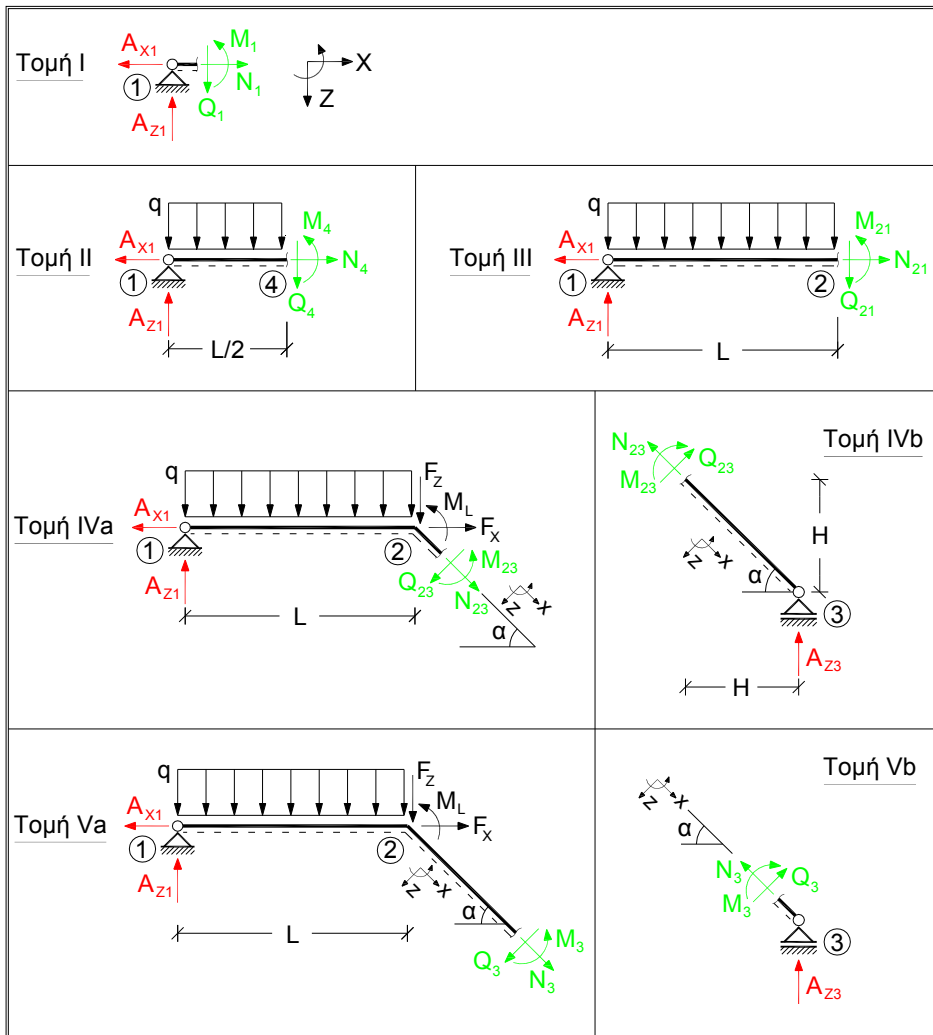
$$\sum M_{(3)} = A_{x1} \cdot H - A_{z1} \cdot (L+H) + q \cdot L \cdot (L/2+H) + M_L + F_z \cdot H - F_x \cdot H \stackrel{!}{=} 0$$

Η μη χρησιμοποιηθείσα συνθήκη ισορροπίας $\sum F_z = 0$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για έναν ανεξάρτητο έλεγχο των υπολογισθεισών κατακορύφων αντιδράσεων A_{z1} και A_{z3} , ενώ η συνθήκη ισορροπίας ροπών $\sum M_{(3)} = 0$ ως προς το σημείο 3 (ή $\sum M_{(i)} = 0$ ως προς κάποιο άλλο κατάλληλο σημείο i) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο της οριζόντιας αντίδρασης A_{x1} .

Με γνωστές όλες τις αντιδράσεις στήριξης, ο υπολογισμός των ζητούμενων φορτίων διατομής στα σημεία 1, 2, 3 και 4 γίνεται με τη βοήθεια *επιλεγμένων* διαχωριστικών τομών, π.χ. των πέντε διαχωριστικών κυκλικών τομών I, II, III, IVa ή IVb και Va ή Vb που δίνονται στον πίνακα 6.2.1-1. Προκειμένου να καταστρωθούν οι εξισώσεις ισορροπίας κόμβων, προσάγονται στις όχθες των τομών τα φορτία διατομής (M, Q, N) που αντιστοιχούν στους καταλυθέντες εσωτερικούς συνδέσμους. Παρατηρούμε ότι παρόλο που ζητούνται τα φορτία διατομής σε τέσσερα σημεία (1, 2, 3, 4), για τον υπολογισμό τους απαιτούνται πέντε τομές, διότι στο σημείο 2 αλλάζει η διεύθυνση του άξονα της δοκού και συνεπώς τα εκατέρωθεν του σημείου 2 φορτία διατομής αναφέρονται σε διαφορετικό τοπικό σύστημα αναφοράς. Για τον λόγο αυτόν οι αξονικές και οι τέμνουσες δυνάμεις εκατέρωθεν του σημείου 2 χαρακτηρίζονται από δύο δείκτες, μέσω των οποίων προσδιορίζεται μονοσήμαντα η θέση τους (21=αριστερά του σημείου 2 και 23=δεξιά του σημείου 2). Αντίθετα, για τις αξονικές και τέμνουσες δυνάμεις στα υπόλοιπα σημεία 1, 3 και 4 αρκεί ένας μόνο δείκτης. Αλλά και για τις ροπές εκατέρωθεν του σημείου 2, οι οποίες αναφέρονται στον ίδιο άξονα $Y \equiv y$ και συνεπώς δεν επηρεάζονται από την αλλαγή διεύθυνσης του άξονα x της δοκού στο επίπεδο X-Z, απαιτούνται δύο δείκτες, επειδή ακριβώς επάνω στον κόμβο 2 ενεργεί η συγκεντρωμένη εξωτερική ροπή M_L .

Πίνακας 6.2.1-1 Μέθοδος των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών - Παράδειγμα.

Διαχωριστικές τομές I ÷ V για τον υπολογισμό των M,Q,N στα σημεία 1,2,3,4



Για κάθε ένα από τα τμήματα του φορέα που έχουν αποσπαστεί με τις κυκλικές διαχωριστικές τομές I έως V καταστρώνονται οι συνθήκες ισορροπίας (Πίν. 6.2.1-2), από τις οποίες προκύπτουν τα ζητούμενα φορτία διατομής στα σημεία 1, 2, 3 και 4. Ο υπολογισμός των φορτίων διατομής M_{23} , Q_{23} , N_{23} δεξιά του κόμβου 2 μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της τομής IVa ή της τομής IVb. Όπως εύκολα διαπιστώνουμε, η χρησιμοποίηση της τομής IVb απαιτεί λιγότερες αριθμητικές πράξεις από εκείνες που απαιτεί η τομή IVa και γι' αυτό είναι προτιμητέα. Το ίδιο ισχύει και για την τομή Vb έναντι της Va, με τις οποίες υπολογίζονται τα φορτία διατομής M_3 , Q_3 , N_3 στο σημείο 3.

Πίνακας 6.2.1-2 Μέθοδος των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών - Παράδειγμα:

Συνθήκες ισορροπίας για τις κυκλικές διαχωριστικές τομές I έως V

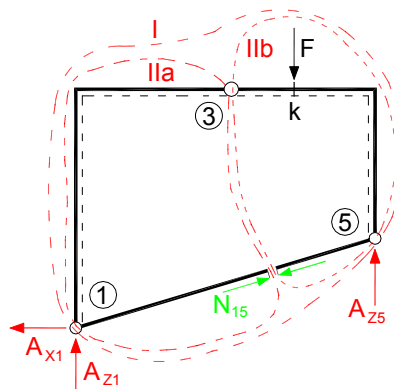
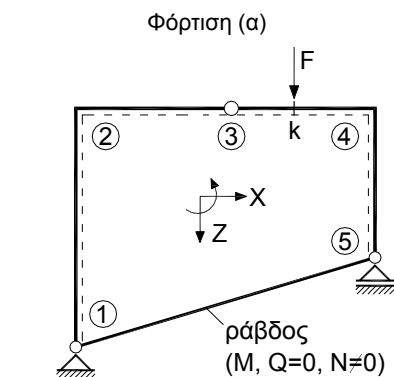
	Συνθήκες ισορροπίας		
	$\sum F_x = 0$ ή $\sum F_x = 0$	$\sum F_z = 0$ ή $\sum F_z = 0$	$\sum M_{(i)} = 0$
Τομή I	$-A_{x1} + N_1 = 0$ $\Rightarrow N_1 = A_{x1}$	$-A_{z1} + Q_1 = 0$ $\Rightarrow Q_1 = A_{z1}$	$\underline{i=1}: M_1 = 0$
Τομή II	$-A_{x1} + N_4 = 0$ $\Rightarrow N_4 = A_{x1}$	$-A_{z1} + q \cdot (L/2) + Q_4 = 0$ $\Rightarrow Q_4 = A_{z1} - q \cdot (L/2)$	$\underline{i=4}: M_4 + \left(q \cdot \frac{L}{2}\right) \cdot \frac{L}{4} - A_{z1} \cdot \frac{L}{2} = 0$ $\Rightarrow M_4 = A_{z1} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - \left(\frac{q \cdot L^2}{8}\right)$
Τομή III	$-A_{x1} + N_{21} = 0$ $\Rightarrow N_{21} = A_{x1}$	$-A_{z1} + q \cdot L + Q_{21} = 0$ $\Rightarrow Q_{21} = A_{z1} - q \cdot L$	$\underline{ik=21}: M_{21} + (q \cdot L) \cdot \frac{L}{2} - A_{z1} \cdot L = 0$ $\Rightarrow M_{21} = A_{z1} \cdot L - \left(\frac{q \cdot L^2}{2}\right)$
Τομή IVa	$N_{23} + (F_x - A_{x1}) \cdot \cos\alpha + (F_z + q \cdot L - A_{z1}) \cdot \sin\alpha = 0$ $\Rightarrow N_{23} = \dots$	$Q_{23} - (F_x - A_{x1}) \cdot \sin\alpha + (F_z + q \cdot L - A_{z1}) \cdot \cos\alpha = 0$ $\Rightarrow Q_{23} = \dots$	$\underline{ik=23}: M_{23} + M_L + q \cdot L \cdot \left(\frac{L}{2}\right) - A_{z1} \cdot L = 0$ $\Rightarrow M_{23} = A_{z1} \cdot L - M_L - \left(\frac{q \cdot L^2}{2}\right)$
Τομή IVb	$-N_{23} - A_{z3} \cdot \sin\alpha = 0$ $\Rightarrow N_{23} = -A_{z3} \cdot \sin\alpha$	$-Q_{23} - A_{z3} \cdot \cos\alpha = 0$ $\Rightarrow Q_{23} = -A_{z3} \cdot \cos\alpha$	$\underline{ik=23}: -M_{23} + A_{z3} \cdot H = 0$ $\Rightarrow M_{23} = A_{z3} \cdot H$
Τομή Va	Η κατάσταση των τριών συνθηκών ισορροπίας για την τομή αυτή επαφίεται ως άσκηση στον αναγνώστη.		
Τομή Vb	$-N_3 - A_{z3} \cdot \sin\alpha = 0$ $\Rightarrow N_3 = -A_{z3} \cdot \sin\alpha$	$-Q_3 - A_{z3} \cdot \cos\alpha = 0$ $\Rightarrow Q_3 = -A_{z3} \cdot \cos\alpha$	$M_3 = 0$

Ε. Σχετικά με την 'έξυπνη' επιλογή των διαχωριστικών τομών

Από τα παραπάνω καθίσταται φανερό ότι η μέθοδος των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών με εφαρμογή των συνθηκών ισορροπίας σε ολόκληρο ή σε τμήματα του φορέα συνιστά μία πολύ εποπτική και εύκολα εφαρμόσιμη διαδικασία. Εντούτοις, ο υπολογιστικός φόρτος τον οποίο συνεπάγεται, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την επιδίεξη ('έξυπνη') επιλογή των διαχωριστικών τομών, πράγμα που με τη σειρά του εξαρτάται από την ικανότητα του μελετητή να κατανοήσει τη δομή και λειτουργία του στατικού φορέα. Για τον λόγο αυτόν η μέθοδος των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών δεν ενδείκνυται ιδιαίτερος για τυποποίηση, κωδικοποίηση και προγραμματισμό σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, σε αντίθεση με τη μέθοδο των *αποκλειστικά κομβικών* διαχωριστικών τομών που θα αναπτυχθεί στην ακόλουθη παράγραφο 6.2.2. Η εξάρτηση της μεθόδου των επιλεγμένων διαχωριστικών τομών από την 'έξυπνη' επιλογή των τομών γίνεται εύκολα κατανοητή με τη βοήθεια των ακόλουθων παραδειγμάτων.

Για τον φορέα του σχήματος 6.2.1-6 ζητείται η τιμή της αξονικής δύναμης στο στοιχείο 1-5 λόγω ενός φορτίου F που δρα (α) στη δοκό 3-4 και (β) στη δοκό 1-5. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις φόρτισης ο υπολογισμός των τριών αντιδράσεων στήριξης γίνεται με τη βοήθεια της ίδιας διαχωριστικής τομής Ι. Στη συνέχεια, για την περίπτωση (α) η ζητούμενη αξονική δύναμη N_{15} υπολογίζεται άμεσα με τη βοήθεια της διαχωριστικής τομής IIa και τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το σημείο 3 (Σχ. 6.2.1-6(α)). Εναλλακτικά, για τον άμεσο υπολογισμό της N_{15} θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί η διαχωριστική τομή IIb και η ίδια συνθήκη ισορροπίας. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση φόρτισης (α) το στοιχείο 1-5 έχει μηδενικές ροπές και τέμνουσες, αποτελεί δηλαδή ράβδο με μόνο φορτίο διατομής τη ζητούμενη αξονική δύναμη.

Αντίθετα, στην περίπτωση φόρτισης (β) το στοιχείο 1-5 δέχεται εγκάρσιο φορτίο στο σημείο k και συνεπώς λειτουργεί ως δοκός με *μη μηδενικές* ροπές, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις (Σχ. 2.6.1-6(β)). Μάλιστα, λόγω της κλίσης του στοιχείου 1-5 το φορτίο F έχει και μία αξονική συνιστώσα, γεγονός που συνεπάγεται διαφορετική αξονική δύναμη εκατέρωθεν του σημείου k εφαρμογής του ($N_{15}=N_{1k} \neq N_{k5}=N_{51}$). Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αξονική δύναμη N_{1k} . Χρησιμοποιώντας όπως στην περίπτωση φόρτισης (α) την ίδια τομή IIa, η οποία τέμνει το στοιχείο 1-5 στο σημείο i που βρίσκεται στο τμήμα 1-k, παίρνουμε από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το σημείο 3 μία εξίσωση, η οποία περιέχει όχι μόνο τη ζητούμενη $N_i=N_{1k}$, αλλά επιπλέον τα άγνωστα ακόμη φορτία διατομής M_i και Q_i . Συνεπώς, ο άμεσος υπολογισμός της N_{1k} από μία και μόνο εξίσωση δεν είναι έτσι δυνατός. Προτιμότερη είναι εδώ η εξής πορεία: Με τη βοήθεια της διαχωριστικής τομής III υπολογίζεται σε ένα πρώτο βήμα η τέμνουσα Q_{15} στο αριστερό άκρο 1 του στοιχείου 1-5. Ο υπολογισμός της Q_{15} γίνεται άμεσα από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το δεξιό άκρο 5 του στοιχείου 1-5. Κατόπιν, με τη βοήθεια της τομής IV υπολογίζεται η N_{1k} από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών ως προς το σημείο 3. Με τον τρόπο αυτόν αποφεύγεται η επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων.



Υπολογισμός αντιδράσεων

Τομή I: $\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow A_{z5} = \dots$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_{x1} = \dots$

$\sum M_{(5)} = 0 \Rightarrow A_{z1} = \dots$

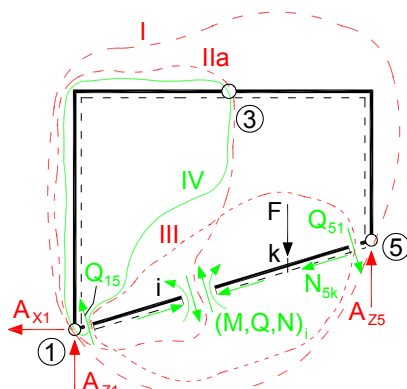
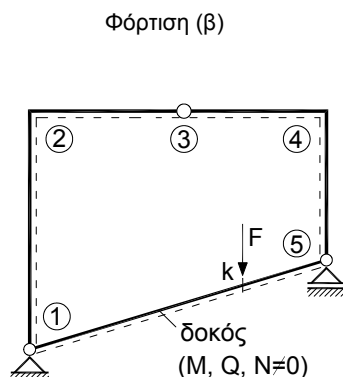
Υπολογισμός της N_{15}

Τομή IIa: $\sum M_{(3)} = 0 \Rightarrow N_{15} = \dots$

ή

Τομή IIb: $\sum M_{(3)} = 0 \Rightarrow N_{15} = \dots$

(α)



Υπολογισμός αντιδράσεων

Τομή I: $\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow A_{z5} = \dots$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_{x1} = \dots$

$\sum M_{(5)} = 0 \Rightarrow A_{z1} = \dots$

Υπολογισμός της N_{15}

Τομή IIa (σημείο i της δοκού 1-5):

$$\sum M_{(3, \text{αριστερά})} = 0 \Rightarrow N_i = N_{1k} = f \left(A_{x1}, A_{z1}, \underbrace{Q_i, M_i}_{2 \text{ άγνωστες}} \right)$$

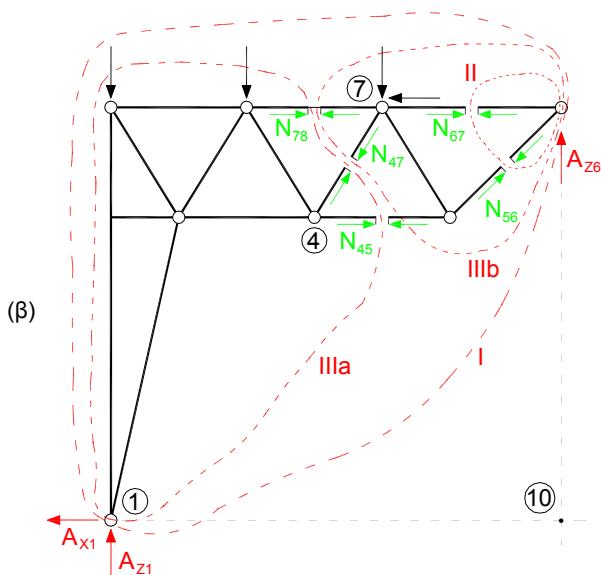
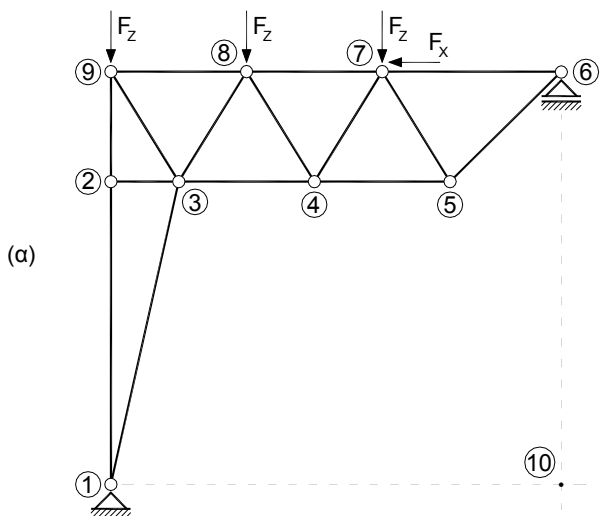
Τομή III: $\sum M_{(5)} = 0 \Rightarrow Q_{15} = \dots$

Τομή IV: $\sum M_{(3)} = 0 \Rightarrow N_{1k} = \dots$

(β)

Σχ. 6.2.1-6 Παράδειγμα (επίπεδο πλαίσιο) 'έξυπνης' επιλογής διαχωριστικών τομών

Ένα ακόμη παράδειγμα 'έξυπνης' επιλογής διαχωριστικών τομών προκειμένου το εκάστοτε ζητούμενο φορτίο διατομής να προκύπτει από μία μόνο εξίσωση δίνεται στο σχήμα 6.2.1-7(α). Ο φορέας είναι ένα ισοστατικό δικτύωμα και τα μόνα φορτία διατομής είναι (εξ ορισμού) οι αξονικές δυνάμεις των ράβδων του. Με τις σημειούμενες στο σχήμα 6.2.1-7(β) διαχωριστικές τομές και με κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας ροπών ως προς κατάλληλα επιλεγμένα σημεία επιτυγχάνεται ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων του δικτυώματος χωρίς να χρειαστεί η επίλυση ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων.



Τομή I:

$$\sum M_{(1)} = 0 \Rightarrow A_{z6} = \dots$$

$$\sum M_{(10)} = 0 \Rightarrow A_{z1} = \dots$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_{x1} = \dots$$

Τομή II:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow N_{56} = \dots$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{67} = \dots$$

Τομή IIIa: ($\leftrightarrow$ IIIb)

$$\sum M_{(7)} = 0 \Rightarrow N_{45} = \dots$$

$$\sum M_{(4)} = 0 \Rightarrow N_{78} = \dots$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow N_{47} = \dots$$

Σχ. 6.2.1-7 Παράδειγμα (επίπεδο δικτύωμα) 'έξυπνης' επιλογής διαχωριστικών τομών

Κεφάλαιο 6. Υπολογισμός εντασιακών μεγεθών ισοστατικών φορέων

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

6.5 Τα διαγράμματα των φορτίων διατομής

6.5.1 Υπενθύμιση ορισμών και συμβάσεων

Στις προηγούμενες παραγράφους 6.2 και 6.4 παρουσιάστηκαν οι δύο θεμελιώδεις μέθοδοι υπολογισμού εντασιακών μεγεθών: Η μέθοδος των διαχωριστικών τομών (που βασίζεται στις συνθήκες ισορροπίας σε συνδυασμό με την αρχή της αποδόσεως του Lagrange) και η κινηματική μέθοδος (που βασίζεται στην αρχή των δυνατών έργων). Εντούτοις, όπως σημειώθηκε ήδη στην παράγραφο 3.2.6-Ε, ο υπολογισμός των φορτίων διατομής σε μεμονωμένα σημεία ενός φορέα που επιτυγχάνεται με τις παραπάνω μεθόδους δεν αρκεί συνήθως για τον σχηματισμό μιας ολοκληρωμένης εικόνας σχετικά με τη συνολική επιπόνησή του. Προς τούτο απαιτείται η γνώση της διακύμανσης των φορτίων διατομής καθ' όλο το μήκος των δομικών στοιχείων ενός φορέα, δηλαδή απαιτείται ο υπολογισμός και η σχεδίαση των διαγραμμάτων των φορτίων διατομής.

Υπενθυμίζεται ότι το *διάγραμμα του φορτίου διατομής* $S(x)$ για μια συγκεκριμένη εξωτερική φόρτιση είναι η συνάρτηση που για τη φόρτιση αυτή δίνει το μέγεθος ενός φορτίου διατομής S κατά μήκος των τοπικών αξόνων x των δομικών στοιχείων του φορέα. Οι χωρικοί φορείς απαιτούν για τον πλήρη καθορισμό της εντασιακής τους κατάστασης έξι διαγράμματα, ένα για κάθε φορτίο διατομής $N(x)$, $Q_y(x)$, $Q_z(x)$, $M_x(x)$, $M_y(x)$ και $M_z(x)$. Σε επίπεδους φορείς μέσα στο επίπεδο $X-Z$, οι οποίοι φορτίζονται από συνεπίπεδα με αυτούς φορτία, αρκούν τρία μόνον διαγράμματα: το *διάγραμμα της αξονικής δύναμης* $N(x)$, το *διάγραμμα της τέμνουσας δύναμης* $Q(x)=Q_z(x)$ και το *διάγραμμα των ροπών κάμψης* $M(x)=M_y(x)$.

Κάθε διάγραμμα ενός φορτίου διατομής καθορίζεται από το μέγεθος και το πρόσημο των τεταγμένων του. Για μία ενιαία σχεδίαση των διαγραμμάτων τηρούμε την εξής σύμβαση:

Σύμβαση σχεδίασης διαγραμμάτων

Θετικές τιμές των ροπών κάμψης σχεδιάζονται υπό κλίμακα προς την πλευρά της ίνας αναφοράς, δηλαδή προς την πλευρά που δείχνει ο τοπικός άξονας z σε κάθε δομικό στοιχείο. Αρνητικές τιμές σχεδιάζονται προς την αντίθετη πλευρά. Για τις τέμνουσες και τις αξονικές ισχύει το ακριβώς αντίστροφο.

Τέλος, επισημαίνεται ότι άρρηκτα συνδεδεμένοι με τον υπολογισμό των διαγραμμάτων των φορτίων διατομής είναι οι ορισμοί των τοπικών συστημάτων αναφοράς, των συμβατικά θετικών φορών των φορτίων διατομής και της ίνας αναφοράς (βλ. παράγρ. 3.2.6-B2, -B3).

6.5.2 Ιδιότητες των διαγραμμάτων των φορτίων διατομής

Το διάγραμμα $S(x)$ ενός φορτίου διατομής S για μια δεδομένη φόρτιση του φορέα μπορεί επί της αρχής να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί με επαναλαμβανόμενη εφαρμογή των δύο θεμελιωδών μεθόδων υπολογισμού εντασιακών μεγεθών (της μεθόδου των διαχωριστικών τομών και της κινηματικής μεθόδου) για περισσότερα σημεία (διατομές) του φορέα. Κατά κανόνα όμως περιοριζόμαστε στον υπολογισμό των τεταγμένων S_i σε συγκεκριμένα μόνο χαρακτηριστικά σημεία i του φορέα. Συνήθως, τα σημεία i επιλέγονται έτσι ώστε μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων ο φορέας να είναι ευθύγραμμος. Η διακύμανση του S , δηλαδή οι τιμές που παίρνει το φορτίο διατομής S μεταξύ των παραπάνω χαρακτηριστικών σημείων, προσδιορίζεται (όπως ήδη σημειώθηκε στο τέλος της παραγράφου 3.2.6-E) χωρίς ιδιαίτερους υπολογισμούς βάσει των συναρτησιακών ιδιοτήτων των φορτίων διατομής $S(x)$, όπως αυτές προκύπτουν από τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την ισορροπία του δομικού στοιχείου.

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας ενός γραμμικού στοιχείου αναπτύχθηκαν στην παράγραφο 3.2.10. Υπενθυμίζεται ότι για τη συνήθη περίπτωση επίπεδων φορέων με φόρτιση εντός του επιπέδου τους και μηδενικό συνεχές φορτίο ροπών $m(x)=m_y(x)=0$, δηλαδή μόνο συνεχή φορτία $n(x)=q_x(x)$ και $q(x)=q_z(x)$, και μοναχικά φορτία P_x, P_z, M_{Ly} , οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας για τα τρία φορτία διατομής $N(x), Q(x)=Q_z(x), M(x)=M_y(x)$ παίρνουν τη ακόλουθη μορφή (χάριν απλούστευσης παραλείπεται η μεταβλητή x):

$$N' = -n \quad Q' = -q \quad M' = Q \quad (6.5.2-1)$$

Σύμφωνα με τους κανόνες του διαφορικού λογισμού που διέπουν την παραγωγή της συναρτήσεων, από τις διαφορικές αυτές εξισώσεις προκύπτει για τα διαγράμματα των φορτίων διατομής επίπεδων ευθύγραμμων φορέων μία ολόκληρη σειρά ιδιοτήτων, οι βασικότερες των οποίων είναι οι εξής (βλ. παρακάτω πίνακες 6.5.2-1, -2 και -3):

1. Η αξονική δύναμη είναι ανεξάρτητη από την τέμνουσα και τη ροπή και αντιστρόφως (αποσύζευξη κάμψης-διάτασης).
2. α) Σε τμήματα του φορέα όπου το συνεχές φορτίο n / q είναι *μηδενικό*, η N / Q διατηρεί την τιμή της *σταθερή* (μηδενική ή διάφορη του μηδενός) και σε τμήματα όπου η τέμνουσα Q είναι *μηδενική*, η ροπή M είναι *σταθερή* (μηδενική ή διάφορη του μηδενός).
 β) Σε τμήματα του φορέα όπου το συνεχές φορτίο n / q είναι *μη μηδενικό και σταθερό* (ομοιόμορφο), η N / Q μεταβάλλεται *γραμμικά* και σε τμήματα όπου η τέμνουσα Q είναι *μη μηδενική και σταθερή*, η ροπή M μεταβάλλεται *γραμμικά*.
 γ) Σε τμήματα του φορέα όπου το συνεχές φορτίο n / q είναι *γραμμικά μεταβαλλόμενο* με αυξανόμενη κατά $+x$ ένταση, η N / Q μεταβάλλεται *παραβολοειδώς* (παραβολή $2^{ου}$ βαθμού) και σε τμήματα όπου η τέμνουσα

Q είναι γραμμικά μεταβαλλόμενη, η ροπή M μεταβάλλεται παραβολοειδώς (παραβολή 2^{ου} βαθμού).

δ) Σε τμήματα του φορέα όπου η τέμνουσα Q είναι παραβολή 2^{ου} βαθμού, η ροπή M είναι παραβολή 3^{ου} βαθμού.

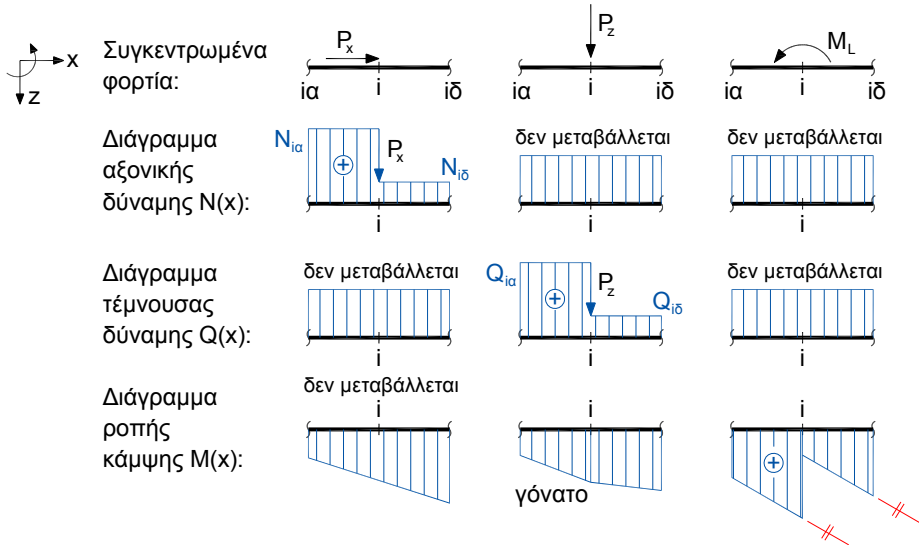
ε) Γενικότερα, όσον αφορά στην εγκάρσια φόρτιση $q(x)$, η τέμνουσα $Q(x)$ είναι πάντα κατά έναν βαθμό και η ροπή $M(x)$ κατά δύο βαθμούς ανώτερες της $q(x)$.

3. α) Σε τμήματα του φορέα όπου τα συνεχή φορτία n και q είναι θετικά / αρνητικά, το φορτίο διατομής N / Q βαίνει μειούμενο / αυξανόμενο.
β) Σε τμήματα του φορέα όπου η τέμνουσα δύναμη Q έχει θετικές / αρνητικές τιμές, η ροπή κάμψης βαίνει αυξανόμενη / μειούμενη.
4. Στα σημεία όπου το φορτίο n / q διέρχεται διά του μηδενός (μηδενίζεται), η N / Q παίρνει την ακραία (μέγιστη, ελάχιστη) τιμή της και στα σημεία όπου η τέμνουσα Q διέρχεται διά του μηδενός (μηδενίζεται), η ροπή M παίρνει την ακραία (μέγιστη, ελάχιστη) τιμή της. Στα σημεία των ακραίων τιμών $N / Q / M$ η εφαπτομένη στο αντίστοιχο διάγραμμα είναι παράλληλη με τον άξονα x του στοιχείου.
5. Στα σημεία όπου το φορτίο n / q εμφανίζει άλμα, το διάγραμμα της N / Q εμφανίζει γόνατο και στα σημεία όπου η τέμνουσα Q εμφανίζει άλμα, η ροπή M εμφανίζει γόνατο. Στα σημεία όπου η τέμνουσα Q εμφανίζει γόνατο, το διάγραμμα της ροπής εμφανίζει σημείο καμπής (αλλαγή καμπυλότητας).
6. Ένα ευθύγραμμο και αφόρτιστο τμήμα ενός φορέα μεταξύ δύο αρθρώσεων έχει μηδενικές ροπές, μηδενικές τέμνουσες και σταθερή αξονική δύναμη.
[Σημ.: Τέτοια αφόρτιστα αμφιαρθρωτά ευθύγραμμα δομικά στοιχεία που μεταφέρουν μόνο αξονική δύναμη χαρακτηρίζονται συχνά ως *ράβδοι* (βλ. παράγρ. 2.3.1)].

Σε περίπτωση συγκεντρωμένων φορτίων $H_i (=P_{xi})$, $V_i (=P_{zi})$, $M_{Li} (=M_{Ly_i})$ που ενεργούν στο σημείο (κόμβος) i ενός φορέα, στα διαγράμματα των φορτίων διατομής εμφανίζονται άλματα ή γόνατα. Σύμφωνα με όσα αναπτύχθηκαν στην υποπαράγραφο 3.2.10-E για τα μητρώα μεταβίβασης, η ισορροπία ενός τέτοιου σημείου i δίνεται από την εξίσωση ισορροπίας κόμβου:

$$\begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}_{i\delta} = \begin{bmatrix} N \\ Q \\ M \end{bmatrix}_{i\alpha} - \begin{bmatrix} H \\ V \\ M_L \end{bmatrix}_i \quad (6.5.2-2)$$

όπου δείκτης $i\alpha / i\delta$ χαρακτηρίζει την όχθη της τομής αριστερά / δεξιά του σημείου i . Για την περίπτωση που στις περιοχές εκατέρωθεν του θεωρούμενου σημείου i δεν δρουν συνεχή φορτία, τα διαγράμματα $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ για κάθε ένα μοναχικό φορτίο ξεχωριστά παίρνουν τις μορφές που απεικονίζονται στο ακόλουθο σχήμα 6.5.2-1 (βλ. επίσης τελευταίες στήλες των πινάκων 6.5.2-1, -2 και -3).



Σχ. 6.5.2-1 Αρνητικά άλματα των $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ λόγω θετικών φορτίων P_x , P_z , M_L

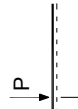
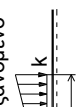
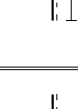
Στις περιπτώσεις αυτές τα διαγράμματα έχουν συνεπώς τις εξής ιδιότητες (αρίθμηση σε συνέχεια της προηγούμενης):

7. Στο σημείο εφαρμογής μιας συγκεντρωμένης δύναμης P_x που δρα κατά την έννοια του άξονα x , δηλαδή είναι θετική, το διάγραμμα της αξονικής δύναμης $N(x)$ εμφανίζει αρνητικό άλμα ίσο με την τιμή της P_x .
8. Στο σημείο εφαρμογής μιας συγκεντρωμένης δύναμης P_z που δρα κατά την έννοια του άξονα z , δηλαδή είναι θετική, το διάγραμμα της τέμνουσας δύναμης $Q(x)$ εμφανίζει αρνητικό άλμα ίσο με την τιμή της P_z και το διάγραμμα της ροπής $M(x)$ εμφανίζει γόνατο. Οι δύο κλάδοι της $Q(x)$ εκατέρωθεν του υπόψη σημείου είναι παράλληλοι (έχουν παράλληλες εφαπτομένες).
9. Στο σημείο εφαρμογής μιας συγκεντρωμένης ροπής M_L που δρα κατά την έννοια του άξονα y , δηλαδή είναι θετική, το διάγραμμα της ροπής $M(x)$ εμφανίζει αρνητικό άλμα ίσο με την τιμή της M_L και οι δύο κλάδοι της ροπής $M(x)$ εκατέρωθεν του υπόψη σημείου είναι παράλληλοι (έχουν παράλληλες εφαπτομένες).

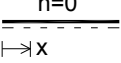
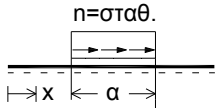
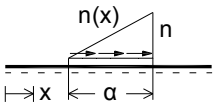
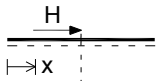
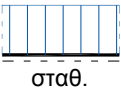
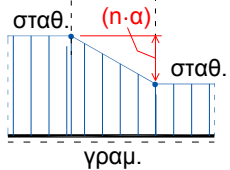
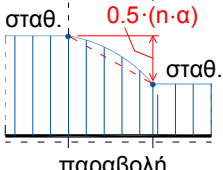
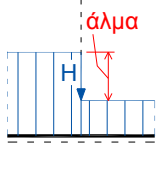
Τα αρνητικά άλματα των παραπάνω περιπτώσεων 7, 8 και 9 γίνονται προφανώς θετικά, αν το αντίστοιχο φορτίο αλλάξει πρόσημο.

Χάριν καλύτερης εποπτείας, οι παραπάνω ιδιότητες των διαγραμμάτων τεμνουσών δυνάμεων και ροπών παρουσιάζονται γραφικά για ορισμένες συχνά παρουσιαζόμενες περιπτώσεις φόρτισης στους πίνακες 6.5.2-1 (για εγκάρσια φορτία), 6.5.2-2 (για αξονικά φορτία) και 6.5.2-3 (για φορτία καμπτικών ροπών).

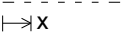
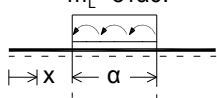
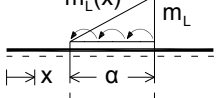
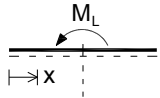
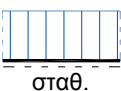
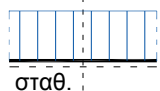
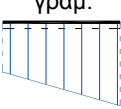
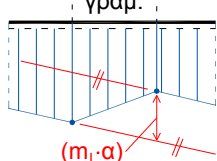
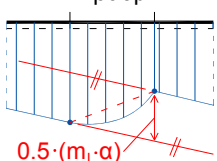
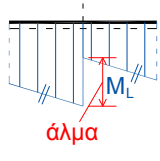
Πίνακας 6.5.2-1 Ιδιότητες διαγραμμάτων $Q(x)$ και $M(x)$ λόγω σταθερού / γραμμικώς μεταβαλλόμενου (τριγωνικού) / συγκεντρωμένου εγκάρσιου φορτίου

Φορτίο	Κανένα	Σταθερό	Γραμμικό	Συγκεντρωμένο
Εγκάρσιο q, P	$q=0$ 	$q=\text{σταθ.}$ 	q τριγωνικά αυξανόμενο 	
Διάγραμμα $Q(x)$	σταθερό με τιμή πεπερασμένη $Q(x) \neq 0$	$q=\text{σταθ.}$ σταθ. γραμμικό χωρίς αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i = \text{sign} Q_k$	σταθ. παραβολή 2 ^{ου} βαθμού γόνατο χωρίς αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i = \text{sign} Q_k$ όχι γόνατο (οριζόντια εφαπτομένη)	χωρίς αλλαγή προσήμου γόνατο P
Διάγραμμα $M(x)$	Αν $Q(x) \neq 0$: γραμμικό	$q=\text{σταθ.}$ σταθ. γραμμικό χωρίς αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i = \text{sign} Q_k$ $(q \cdot x^2)/8$ όχι γόνατο	σταθ. παραβολή 3 ^{ου} βαθμού γόνατο χωρίς αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i = \text{sign} Q_k$ όχι γόνατο	γραμμ. γόνατο P
Διάγραμμα $Q(x)$	σταθερό με τιμή μηδενική $Q(x)=0$	$q=\text{σταθ.}$ σταθ. γραμμικό με αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i \neq \text{sign} Q_k$ $x_0 = Q_i / q$	σταθ. παραβολή 2 ^{ου} βαθμού με αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i \neq \text{sign} Q_k$ $x_0 = \sqrt{(2 \cdot Q_i \cdot \alpha) / q}$ $\text{max} M = M_i + Q_i \cdot x_0 - (q \cdot x_0^3) / (6 \cdot q)$	με αλλαγή προσήμου γόνατο P
Διάγραμμα $M(x)$	σταθερό	$q=\text{σταθ.}$ σταθ. γραμμικό με αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i \neq \text{sign} Q_k$ $x_0 = Q_i / q$ $\text{max} M = M_i + Q_i \cdot x_0 - (q \cdot x_0^3) / (6 \cdot q)$	σταθ. παραβολή 3 ^{ου} βαθμού με αλλαγή προσήμου $\text{sign} Q_i \neq \text{sign} Q_k$ $x_0 = \sqrt{(2 \cdot Q_i \cdot \alpha) / q}$ $\text{max} M = M_i + Q_i \cdot x_0 - (q \cdot x_0^3) / (6 \cdot q)$	με αλλαγή προσήμου γόνατο P

Πίνακας 6.5.2-2 Ιδιότητες διαγραμμάτων $N(x)$ λόγω σταθερού / γραμμικώς μεταβαλλόμενου (τριγωνικού) / συγκεντρωμένου αξονικού φορτίου

Φορτίο	Κανένα	Σταθερό	Γραμμικό	Συγκεντρωμένο
Αξονικό n, H	$n=0$ 	$n=\text{σταθ.}$ 		
διάγραμμα $N(x)$	 σταθ.	 σταθ. (n·α) γραμ. σταθ.	 σταθ. 0.5·(n·α) σταθ. παραβολή 2 ^{ου} βαθμ.	 H άλμα

Πίνακας 6.5.2-3 Ιδιότητες διαγραμμάτων $Q(x)$ και $M(x)$ λόγω σταθερού / γραμμικώς μεταβαλλόμενου (τριγωνικού) / συγκεντρωμένου φορτίου καμπτικών ροπών

Φορτίο	Κανένα	Σταθερό	Γραμμικό	Συγκεντρωμένο
Ροπές m, M	$m_L=0$ 	$m_L=\text{σταθ.}$ 		
διάγραμμα $Q(x)$	 σταθ.	 σταθ.	 σταθ.	 σταθ.
διάγραμμα $M(x)$	 γραμ.	 γραμ. (m_L·α)	 παραβολή 2 ^{ου} βαθμ. 0.5·(m_L·α)	 M_L άλμα

Στο ακόλουθο απλό παράδειγμα μιας αμφιέριστης δοκού (Σχ. 6.5.2-2) που φορτίζεται με ορισμένα από τα πλέον συνήθη φορτία q , H , V και M_L φαίνονται μερικές από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των διαγραμμάτων των φορτίων διατομής:

α) Στα αφόριστα τμήματα του φορέα οι $N(x)$ και $Q(x)$ έχουν σταθερή (πεπερασμένη ή μηδενική) τιμή, ενώ η ροπή $M(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά.

β) Στην περιοχή $a-b$, όπου δρα το σταθερό εγκάρσιο φορτίο q , η τέμνουσα $Q(x)$ μεταβάλλεται γραμμικά και η ροπή $M(x)$ παραβολικά (παραβολή 2^{ου} βαθμού).

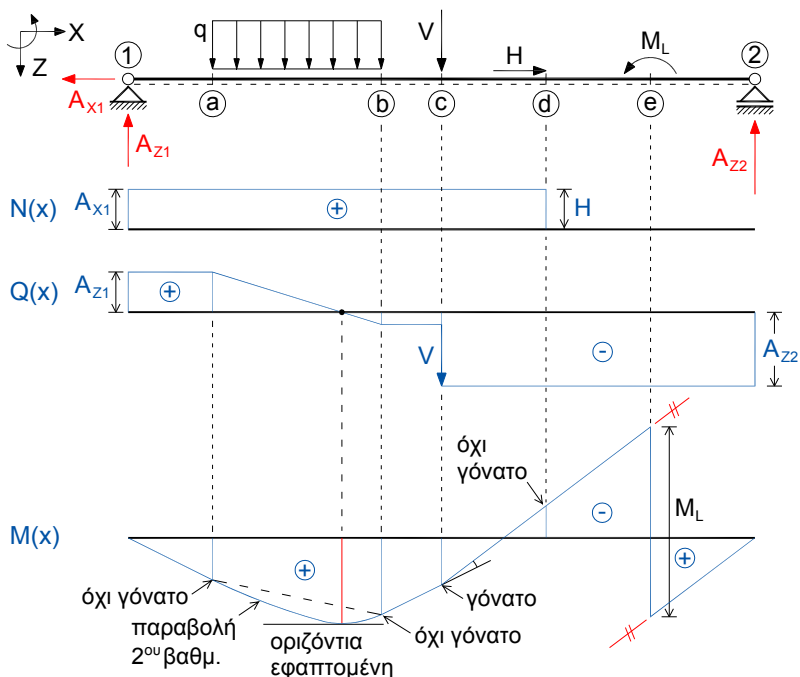
γ) Στα σημεία a και b (αρχή και τέλος του συνεχούς φορτίου q) η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ εμφανίζει γόνατα, όχι όμως και το διάγραμμα της ροπής $M(x)$.

δ) Στο σημείο που μηδενίζεται η τέμνουσα $Q(x)$ η ροπή $M(x)$ εμφανίζει τη μέγιστη τιμή της. Στο σημείο αυτό η εφαπτομένη του διαγράμματος ροπών είναι οριζόντια (έχει μηδενική κλίση ως προς τον άξονα x).

ε) Στο σημείο c , όπου δρα το εγκάρσιο συγκεντρωμένο φορτίο V , η αξονική δύναμη $N(x)$ δεν μεταβάλλεται, ενώ η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ παρουσιάζει άλμα στην τιμή της ίσο με το μέγεθος του φορτίου V και η ροπή $M(x)$ εμφανίζει γόνατο.

στ) Στο σημείο d , όπου δρα το διαμήκες συγκεντρωμένο φορτίο H , η αξονική δύναμη $N(x)$ παρουσιάζει άλμα στην τιμή της ίσο με το μέγεθος του φορτίου H , ενώ τέμνουσα και ροπή μένουν ανεπηρέαστες.

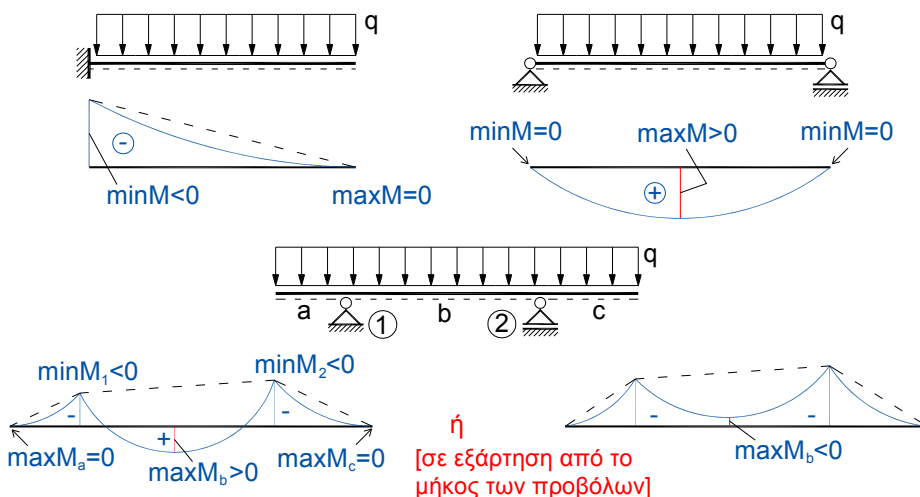
ζ) Στο σημείο e , όπου δρα η εξωτερική ροπή M_L , η αξονική και η τέμνουσα δύναμη μένουν ανεπηρέαστες, ενώ η ροπή $M(x)$ παρουσιάζει άλμα στην τιμή ίσο με το μέγεθος του φορτίου M_L .



Σχ. 6.5.2-2 Διαγράμματα φορτίων διατομής μιας αμφιέριστης δοκού με συνήθη φορτία

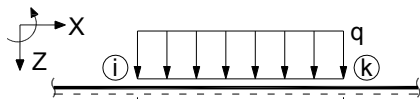
6.5.3 Υπολογισμός της μέγιστης/ελάχιστης τιμής της ροπής κάμψης

Οι δομικοί φορείς μελετώνται και διαστασιολογούνται έτσι ώστε να μπορούν να υποστούν με ασφάλεια τις δυσμενέστερες εντάσεις που ενδέχεται να αναπτυχθούν στα διάφορα στοιχεία τους κατά τη διάρκεια ζωής της κατασκευής (Σημ.: Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τις δυσμενέστερες μετακινήσεις και παραμορφώσεις, στις οποίες όμως θα γίνει αναφορά σε επόμενα κεφάλαια). Για τον λόγο αυτόν απαιτείται στην πράξη κατά κανόνα ο υπολογισμός των ακραίων (μέγιστων και ελάχιστων) τιμών $\text{extr}S$ ($\text{max}S$ και $\text{min}S$) που εμφανίζουν τα φορτία διατομής S κάθε δομικού στοιχείου υπό την εκάστοτε θεωρούμενη φόρτιση. Ειδικότερα ενδιαφέρουν οι μέγιστες θετικές και οι ελάχιστες αρνητικές τιμές των φορτίων διατομής (Σημ.: Διότι αν $\text{min}S > 0$, τότε η $\text{min}S$ υπερκαλύπτεται από την $\text{max}S > 0$, και αντίστοιχα αν $\text{max}S < 0$, τότε η $\text{max}S$ υπερκαλύπτεται από την $\text{min}S < 0$). Είναι προφανές ότι οι ακραίες αυτές τιμές δεν αναπτύσσονται πάντοτε στα άκρα των δομικών στοιχείων, αλλά μπορεί να εμφανιστούν και σε ενδιάμεσα σημεία. Στο σχήμα 6.5.3-1 παρατίθενται μερικές απλές περιπτώσεις φορέων/φόρτισης για τις οποίες σημειώνεται η θέση εμφάνισης και το πρόσημο των μέγιστων και ελάχιστων ροπών κάμψης.

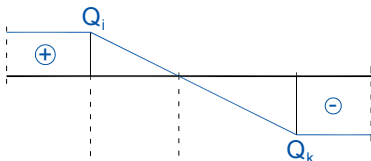
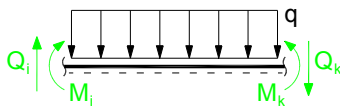


Σχ. 6.5.3-1 Θέση και πρόσημο μέγιστων/ελάχιστων ροπών κάμψης σε απλούς φορείς

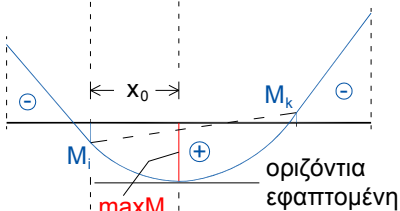
Στα ακόλουθα δύο σχήματα 6.5.3-2 και 6.5.3-3 αναπτύσσονται οι τύποι που δίνουν τη θέση x_0 και το μέγεθος $\text{max}M$ της μέγιστης ροπής σε ένα ευθύγραμμο τμήμα δοκού που φορτίζεται με σταθερό ή τριγωνικό συνεχές φορτίο. Προϋπόθεση βέβαια για την εμφάνιση της $\text{max}M$ στο φορτιζόμενο τμήμα $i-k$ της δοκού αποτελεί η διέλευση της τέμνουσας διά του μηδενός (δηλαδή η αλλαγή του προσήμου της) μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Αν δεν συμβαίνει αυτό, η μέγιστη ροπή δεν εμφανίζεται μεταξύ των σημείων i και k , το διάγραμμα $M(x)$ όμως διατηρεί κατά τα λοιπά ακριβώς τα ίδια γεωμετρικά χαρακτηριστικά. Οι περιπτώσεις αυτές περιλαμβάνονται στο κάτω τμήμα του πίνακα 6.5.2-1.



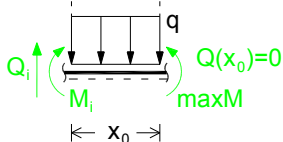
i, k: χαρακτηριστικά σημεία i, k στα οποία έχουν υπολογιστεί οι τιμές της τέμνουσας και της ροπής κάμψης.



← Έστω ότι η τέμνουσα αλλάζει πρόσημο μεταξύ των σημείων i και k.



Υπολογισμός maxM:



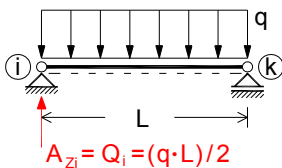
$$\sum P_z = 0 \Rightarrow -Q_i + q \cdot x_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = Q_i / q$$

$$\sum M_{(x_0)} = 0 \Rightarrow$$

$$\max M = M_i + Q_i \cdot x_0 - q \cdot x_0^2 / 2$$

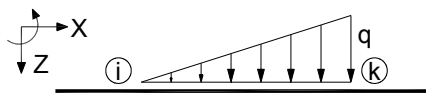
Παράδειγμα:



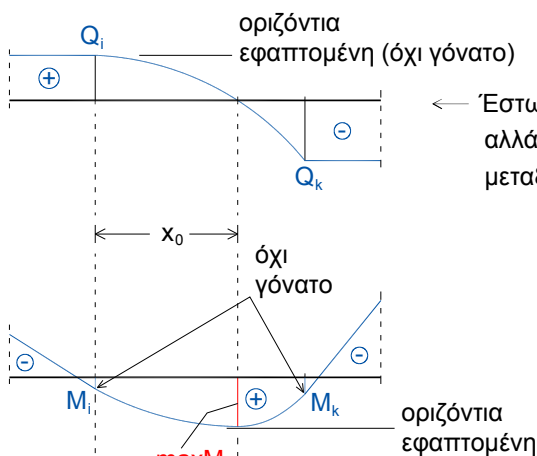
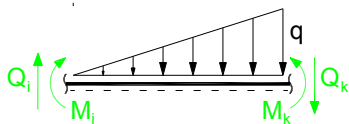
$$x_0 = \frac{Q_i}{q} = \frac{q \cdot L}{2 \cdot q} = \frac{L}{2}$$

$$\max M = 0 + \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{2} - q \cdot \frac{(L/2)^2}{2} = \frac{q \cdot L^2}{8}$$

Σχ. 6.5.3-2 Μέγιστη ροπή κάμψης υπό ομοιόμορφο φορτίο q

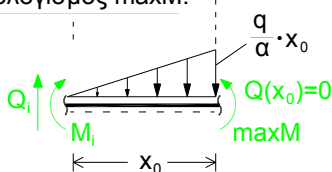


i, k: χαρακτηριστικά σημεία
στα οποία έχουν υπολογιστεί
οι τιμές της τέμνουσας και
της ροπής κάμψης.



← Έστω ότι η τέμνουσα
αλλάζει πρόσημο
μεταξύ των σημείων i και k.

Υπολογισμός maxM:

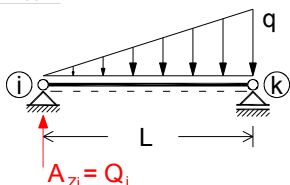


$$\sum P_z = 0 \Rightarrow -Q_i + \frac{q \cdot x_0^2}{2 \cdot \alpha} = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{(2 \cdot Q_i \cdot \alpha) / q}$$

$$\sum M_{(x_0)} = 0 \Rightarrow \max M = M_i + Q_i \cdot x_0 - (q \cdot x_0^3) / (6 \cdot \alpha)$$

Παράδειγμα:



$$\sum M_{(k)} = 0 \Rightarrow Q_i \cdot L - \frac{q \cdot L}{2} \cdot \frac{L}{3} = 0 \Rightarrow Q_i = \frac{q \cdot L}{6}$$

$$x_0^2 = \frac{2 \cdot (q \cdot L) / 6 \cdot L}{q} = \frac{L^2}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$$\max M = 0 + \frac{q \cdot L}{6} \cdot \frac{L}{\sqrt{3}} - q \cdot \frac{(L/\sqrt{3})^3}{6 \cdot L} = \frac{q \cdot L^2}{9 \cdot \sqrt{3}}$$

Σχ. 6.5.3-3 Μέγιστη ροπή κάμψης υπό αυξανόμενο τριγωνικό φορτίο q(x)

6.5.4 Η ομόλογη δοκός

Η επίλυση ενός φορέα που φέρει το τυχόν φορτίο $q(x)$ μεταξύ των σημείων i και k είναι συχνά βολικότερη, αν προηγουμένως γίνει *επίσαξη* ("σαμάρωμα") του φορέα με μία αμφιέριστη δοκό που φέρει το δεδομένο φορτίο $q(x)$. Η αμφιέριστη αυτή δοκός $i-k$, της οποίας οι αντιδράσεις στήριξης (ορθότερα: δυνάμεις έδρασης) φορτίζουν τον αρχικό φορέα [και τώρα πλέον *επισαγματωμένο* ("σαμαρωμένο") φορέα], χαρακτηρίζεται ως ομόλογη δοκός. Η περίπτωση επίσαξης ενός εγκάρσιου ομοιόμορφου συνεχούς φορτίου q εικονογραφείται στο σχήμα 6.5.4-1.

Ο αρχικός φορέας επιλύεται καταρχάς με φορτία τις (γενικώς τρεις) δυνάμεις έδρασης της ομόλογης δοκού αντί με το δεδομένο φορτίο $q(x)$, με ό,τι αυτό συνεπάγεται σε ευκολία αριθμητικών πράξεων. Στα προκύπτοντα φορτία διατομής $M_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$, $Q_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$, $N_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$ του επισαγματωμένου φορέα επαλληλίζουμε (προσθέτουμε) στη συνέχεια τα φορτία διατομής $M_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$, $Q_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$, $N_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$ της ομόλογης δοκού $i-k$ λόγω $q(x)$. Τα τελευταία υπολογίζονται γενικώς εύκολα, αφού πρόκειται για μία απλή αμφιέριστη δοκό. Η επαλληλία των δύο ομάδων φορτίων διατομής $S_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$ και $S_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$ μας δίνει τα ζητούμενα φορτία διατομής $S(x)$ του αρχικού φορέα λόγω $q(x)$:

$$S(x) = S_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x) + S_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x) \quad (6.5.4-1)$$

[με $S = M, Q, N$]

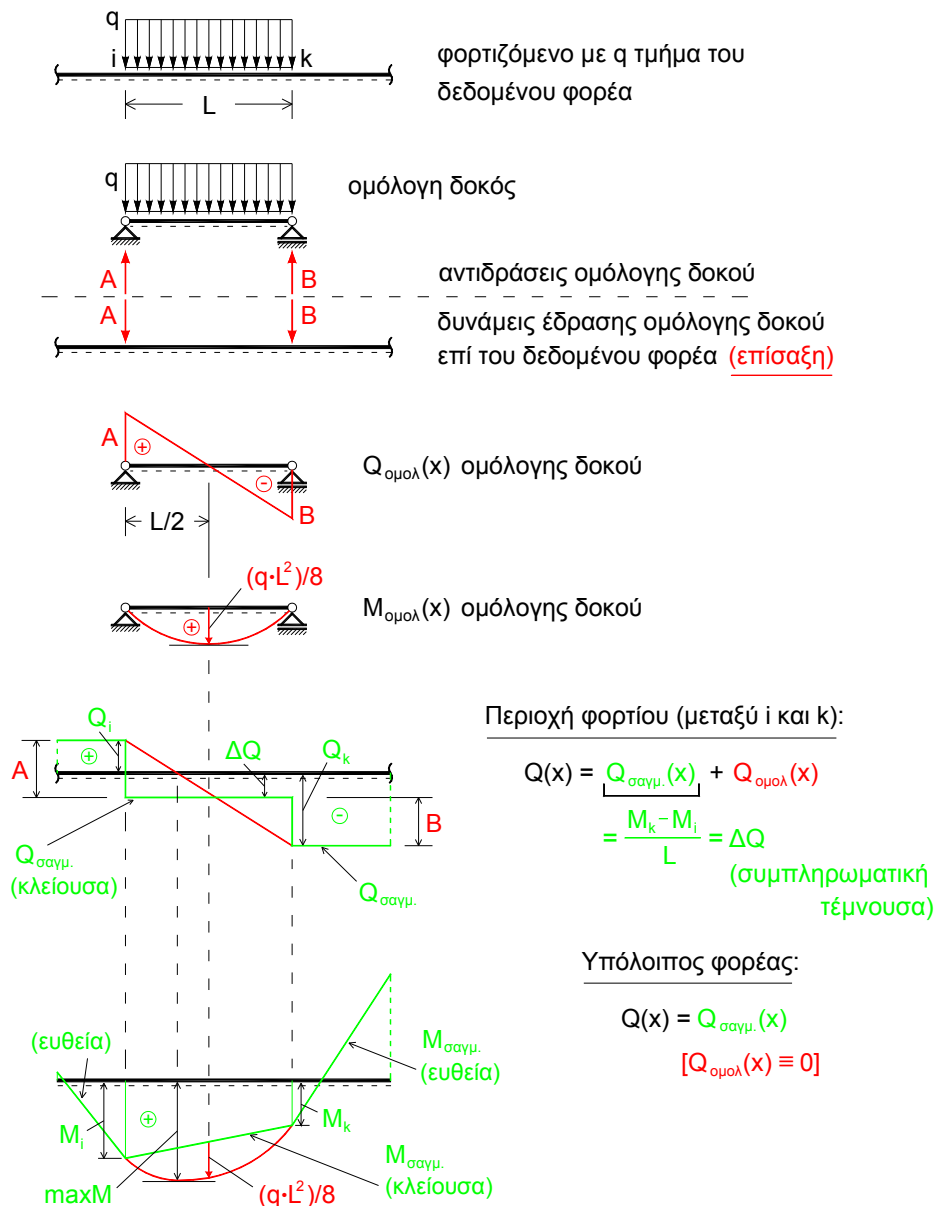
Εφόσον τα φορτία διατομής $S_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$ αφορούν μόνο στην ομόλογη δοκό $i-k$, για τον υπόλοιπο φορέα ισχύει προφανώς $S(x) = S_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$.

Παρατηρούμε ότι τα τελικά διαγράμματα $Q(x)$ και $M(x)$ στο φορτιζόμενο τμήμα $i-k$ προκύπτουν με "*κρέμασμα*" (ανάρτηση, πρόσθεση, επαλληλία) των διαγραμμάτων $Q_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$ και $M_{\sigma\mu\omicron\lambda}(x)$ της ομόλογης δοκού στην "*κλείουσα*", δηλαδή στο διάγραμμα $Q_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$ και $M_{\sigma\alpha\gamma\mu}(x)$ του τμήματος $i-k$ του επισαγματωμένου φορέα αντιστοίχως.

Σημειώνεται ότι είναι αδιάφορο για το τελικό αποτέλεσμα αν η σταθερή έδραση της ομόλογης δοκού ληφθεί στο αριστερό ή στο δεξιό της άκρο ακόμη και στη γενική περίπτωση που η ομόλογη δοκός φορτίζεται με αξονικά φορτία $n(x)$.

6.5.5 Παραδείγματα

Πολλά παραδείγματα υπολογισμού και σχεδίασης διαγραμμάτων φορτίων διατομής για διάφορους τύπους ισοστατικών φορέων υπό ποικιλία φορτίσεων περιέχονται στο επόμενο κεφάλαιο 7 καθώς και στον τόμο των ασκήσεων ([Αβρ-Ια], σειρές ασκήσεων Η και Θ), όπου και παραπέμπεται ο αναγνώστης.



Σχ. 6.5.4-1 Ομόλογη δοκός - Επίσαξη ομοιόμορφου συνεχούς φορτίου q

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....