



Ελληνικές γέφυρες

(Αριστερά: Ν. Δράμας, Ν. Ημαθίας, Ν. Τρικάλων. Δεξιά: Ν. Πιερίας, Αθήνα, Ρίο)

1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΛΑΣΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1.1 Το βασικό σκεπτικό της ΜΔ σε αντιπαράθεση με αυτό της ΜΜ

Από τη στοιχειώδη Στατική γνωρίζουμε ότι ένας στατικά ευσταθής φορέας είναι είτε ισοστατικός είτε υπερστατικός. *Ισοστατικός ή στατικά ορισμένος* ονομάζεται ένας φορέας, εάν οι εξισώσεις ισορροπίας αρκούν για τον πλήρη προσδιορισμό της εντασιακής του κατάστασης, δηλαδή των αντιδράσεων στήριξης και των φορτίων διατομής του. Αντίθετα, αν οι συνθήκες ισορροπίας δεν επαρκούν για τον προσδιορισμό των εντασιακών του μεγεθών, ο φορέας ονομάζεται *υπερστατικός ή στατικά αόριστος*. Οι μέθοδοι υπολογισμού των μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης ισοστατικών φορέων αποτέλεσαν αντικείμενο του πρώτου τόμου του παρόντος συγγράμματος [Αβρ-Ι].

Ο ανά χείρας δεύτερος τόμος πραγματεύεται τις μεθόδους επίλυσης υπερστατικών φορέων. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται λεπτομερώς οι δύο κλασικές πλέον μέθοδοι ανάλυσης υπερστατικών φορέων, η *μέθοδος των υπεραρίθμων δυνάμεων* (ή απλά: μέθοδος δυνάμεων, ΜΔ) και η *μέθοδος των υπεραρίθμων μετακινήσεων* (ή απλά: μέθοδος μετακινήσεων, ΜΜ), οι οποίες επί εκατό σχεδόν χρόνια αποτελούσαν τα σημαντικότερα μεθοδολογικά "εργαλεία" του δομοστατικού μηχανικού για τον υπολογισμό δομικών φορέων.

Η βασική ιδέα που οδήγησε στον υπολογισμό υπερστατικών φορέων με τη ΜΔ στηρίζεται στις *αρχές της αποδέσμευσης και της επαλληλίας*. Υπενθυμίζεται (βλ. [Αβρ-Ι], παράγρ. 3.2.5-Γ και 3.2.6-Α) ότι σύμφωνα με την αρχή της αποδέσμευσης η εντασιακή κατάσταση ενός δομικού φορέα δεν μεταβάλλεται λόγω κατάλυσης ενός συνδέσμου, αν στη θέση του καταλυόμενου συνδέσμου προσαχθεί το αντίστοιχο εντασιακό μέγεθος. Υπενθυμίζεται επίσης (βλ. [Αβρ-Ι], παράγρ. 3.2.9) ότι η αρχή της επαλληλίας ισχύει απειρίοριστα μέσα στο πλαίσιο της Γραμμικής Στατικής, όπου όλες οι σχέσεις μεταξύ μεγεθών έντασης και παραμόρφωσης είναι γραμμικές, και επιτρέπει την αναγωγή πολύπλοκων προβλημάτων σε μία σειρά από απλούστερα προβλήματα, οι λύσεις των οποίων επαλληλιζόμενες (δηλαδή αλγεβρικά προστιθέμενες) συνθέτουν τη λύση του αρχικού προβλήματος. Στηριζόμενο στις δύο αυτές αρχές, το βασικό σκεπτικό της ΜΔ συνίσταται (βλ. [Αβρ-Ι], παράγρ. 5.6.1) στην αναγωγή του υπερστατικού φορέα -μέσω κατάλυσης επαρκούς πλήθους εσωτερικών ή/και εξωτερικών συνδέσμων- σε έναν ισοστατικό φορέα που ονομάζεται *στατικό κύριο σύστημα* (ΣΚΣ). Το ΣΚΣ επιλύεται με τις γνωστές στοιχειώδεις μεθόδους επίλυσης ισοστατικών φορέων για μια συγκεκριμένη σειρά φορτίσεων και στη συνέχεια, με κατάλληλη επαλληλία ορισμένων μεγεθών που προκύπτουν από αυτές τις επιλύσεις, καταστρώνονται οι επιλύουσες εξισώσεις του υπερστατικού φορέα. Όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί μέσα στα πλαίσια της ΜΔ γίνονται όχι στον δεδομένο υπερστατικό φορέα, αλλά στο παράγωγο ΣΚΣ.

Η παραπάνω ιδέα της *κατάλυσης* συνδέσμων, δηλαδή του μηδενισμού των αγνώστων μεγεθών έντασης, προκάλεσε νωρίς την παράλληλη σκέψη, μήπως και

με την *προσθήκη* συνδέσμων, δηλαδή με μηδενισμό των αγνώστων μεγεθών μετακίνησης, είναι δυνατή η αναγωγή του υπερστατικού φορέα σ' έναν άλλο φορέα, ο οποίος να υπολογίζεται επίσης με ευκολία. Πράγματι, κατά την επίλυση φορέων με τη ΜΜ αυτό επιτυγχάνεται με τη χρησιμοποίηση του *γεωμετρικού κυρίου συστήματος* (ΓΚΣ), το οποίο προκύπτει από τον αρχικό φορέα με τη (δι)κινητή πάκτωση (δέσμευση των στρωφών) και ταυτόχρονη παγίωση (δέσμευση των μετατοπίσεων) όλων των κόμβων του (βλ. [Αβρ-Ι], παράγρ. 5.6.2). Το ΓΚΣ αποτελείται επομένως από πάγιες αμφίπακτες δοκούς, που στην περίπτωση επίπεδων γραμμικών φορέων είναι τρεις φορές υπερστατικές¹. Ο υπολογισμός των τριπλά υπερστατικών αυτών δοκών μπορεί εύκολα να γίνει είτε με τη ΜΔ είτε με ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της δοκού και να πινακοποιηθεί για πρακτικά όλες τις φορτίσεις και όλους τους καταναγκασμούς που ενδιαφέρουν στην πράξη, θεωρούμενος έτσι ότι επιτυγχάνεται με στοιχειώδη τρόπο, δηλαδή με απλή χρήση έτοιμων πινάκων. Όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί μέσα στα πλαίσια της ΜΜ γίνονται όχι στον δεδομένο υπερστατικό φορέα, αλλά στο παράγωγο ΓΚΣ. Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι η βασική ιδέα της ΜΜ στηρίζεται και αυτή (όπως και της ΜΔ) στην αρχή της επαλληλίας.

Όπως σημειώθηκε στην παράγραφο 5.4.1 του πρώτου τόμου, η διάκριση των στατικώς ευσταθών φορέων σε ισοστατικούς και υπερστατικούς έχει καθαρά ιστορικές ρίζες, δηλαδή οφείλεται στο γεγονός ότι η χρονολογικά πρώτη μέθοδος που αναπτύχθηκε για τον υπολογισμό υπερστατικών φορέων ήταν η ΜΔ, η οποία κάνει χρήση ενός ισοστατικού κυρίου συστήματος. Εντούτοις, όπως επανειλημμένα θα μας δοθεί η ευκαιρία να διαπιστώσουμε στις ακόλουθες σελίδες, μεταξύ δυνάμεων (εντάσεων) και μετακινήσεων (παραμορφώσεων) υφίσταται πλήρης αντιστοιχία (δυσαικότητα). Για τον λόγο αυτόν, η διάκριση και ταξινόμηση των φορέων μπορεί να γίνει και σε όρους μετακινήσεων αντί σε όρους δυνάμεων, δηλαδή με βάση τις γεωμετρικές ιδιότητες των φορέων αντί των στατικών ιδιοτήτων τους. Έτσι, αντί να διακρίνουμε τους φορείς σε *στατικά ορισμένους* (ισοστατικούς) και *στατικά αόριστους* (υπερστατικούς), μπορούμε να τους διακρίνουμε σε *γεωμετρικά ορισμένους* (ισογεωμετρικούς) και *γεωμετρικά αόριστους* (υπεργεωμετρικούς). Οι παραπάνω σκέψεις θα συγκεκριμενοποιηθούν παρακάτω με τη βοήθεια ενός απλού φορέα (βλ. Σχ. 1.1-1), ο οποίος θα επιλυθεί παράλληλα και με τις δύο μεθόδους. Προηγουμένως όμως θα παρεμβληθεί μία σύντομη σημείωση σχετικά με την ιστορική εξέλιξη των κλασικών μεθόδων επίλυσης υπερστατικών φορέων, εξέλιξη που συντελέστηκε εξ ολοκλήρου στον ευρωπαϊκό χώρο από τα μέσα του 19^{ου} έως τα μέσα του 20^{ου} αιώνα.

¹ Εάν πρόκειται για χωρικούς φορείς, οι αμφίπακτες δοκοί που συνθέτουν το ΓΚΣ είναι έξι φορές υπερστατικές. Ο υπολογισμός τους και η πινακοποίηση όλων των πρακτικά εμφανιζόμενων περιπτώσεων φόρτισης και καταναγκασμού μπορεί να γίνει με ουσιαστικά τις ίδιες μεθόδους όπως και για τους επίπεδους γραμμικούς φορείς, χωρίς μεθοδολογικές διαφορές. Γι' αυτό, χάριν απλούστευσης, η παρουσίαση τόσο της ΜΜ όσο και της ΜΔ θα γίνει με βάση επίπεδους φορείς.

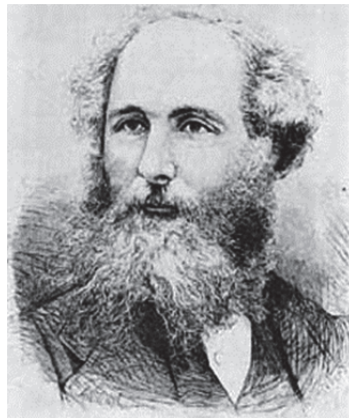
Ιστορική σημείωση: Η εξελικτική πορεία των κλασικών μεθόδων ανάλυσης

- Η ανάπτυξη της Μεθόδου Δυνάμεων

Η πρώτη ουσιαστική ώθηση για την ανάπτυξη μιας θεωρίας υπολογισμού υπερστατικών φορέων δόθηκε από τον Γάλλο μηχανικό και φυσικό *Louis Navier* (1785-1836), καθηγητή της Μηχανικής στο Παρίσι, ο οποίος, διαπιστώνοντας ότι μόνο με θεώρηση των παραμορφώσεων των υπερστατικών φορέων μπορούν να συμπληρωθούν οι ανεπαρκείς για τον υπολογισμό τους συνθήκες ισορροπίας, συνέλαβε την ιδέα της χρησιμοποίησης των συνθηκών συμβιβαστού των παραμορφώσεων και κατάφερε να επιλύσει απλούς υπερστατικούς φορείς. Ο Navier συνέγραψε το 1826 το πρώτο διδακτικό βιβλίο Στατικής υπό τον τίτλο "Résumé des leçons données à l' Ecole des Ponts et Chaussées sur l' application de la mécanique à l' établissement des constructions et des machines" (Paris 1826). Το βιβλίο αυτό αποτελεί την πρώτη συστηματική προσπάθεια ανάπτυξης μιας ολοκληρωμένης θεωρίας επίλυσης στατικών φορέων. Λόγω του πολύπλευρου έργου του ο Navier μπορεί να θεωρηθεί ως ο θεμελιωτής της Κλασικής Στατικής.



Louis Navier (1785-1836)



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Η αξιοποίηση της παραπάνω ιδέας για την ανάπτυξη μιας γενικής μεθόδου υπολογισμού υπερστατικών φορέων ανάγεται στον Βρετανό *James Clerk Maxwell* (1830-1879), καθηγητή της Πειραματικής Φυσικής στο Πανεπιστήμιο του Cambridge, ο οποίος το 1864 στην εργασία του "On the Calculations of the Equilibrium and the Stiffness of Frames" (Phil. Mag. 4, iss. 27, p. 294, 1864) καταστρώνει τις συνθήκες συμβιβαστού ενός υπερστατικού δικτυώματος. Η μέθοδος που επινόησε ο Maxwell βασιζόταν στην ισότητα της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης με το έργο των εξωτερικών φορτίων και κατέληγε σε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με άγνωστα μεγέθη τις υπεράριθμες δυνάμεις. Στα πλαίσια της ανάπτυξης της μεθόδου αυτής, ο Maxwell διατύπωσε και το γνωστό θεώρημά του περί αμοιβαιότητας των μετακινήσεων ($1^{\text{η}}$ πρόταση αμοιβαιότητας: $\delta_{mn} = \delta_{nm}$). Το θεώρημα αυτό, αρχικά διατυπωμένο από τον Maxwell ειδικά για δικτυώματα, ετέθη σε γενική βάση το 1872 από τον Ιταλό *Enrico Betti* (1823-1892) στο βιβλίο του *Teoria della Elasticita*. Οι ερευνητικές εργασίες του Maxwell,

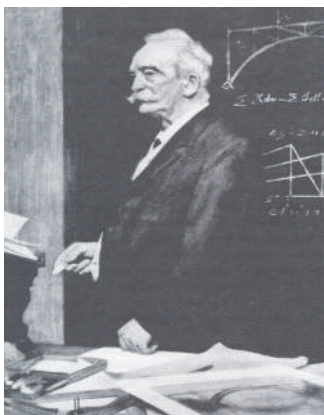
αν και θεμελιακού χαρακτήρα, δεν διαδόθηκαν ευρύτερα και δεν έτυχαν άμεσης πρακτικής εφαρμογής καθότι ήταν διατυπωμένες με τρόπο δυσπρόσιτο στους μηχανικούς της εποχής.

Κατά την περίοδο αυτή αξιοσημείωτη είναι η συνεισφορά του Βαυβαρού *Karl Culmann* (1821-1881), καθηγητή στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο της Ζυρίχης, ο οποίος με το βιβλίο του "Die Graphische Statik" (Zürich, 1866) έθεσε τις βάσεις της Γραφοστατικής ("ευθεία Culmann"). Στην ανάπτυξη της Γραφοστατικής, η οποία για πολλές δεκαετίες αποτελούσε σημαντικό υπολογιστικό "εργαλείο" στα χέρια των μηχανικών μέχρις ότου παροπλίστηκε με την έλευση των αριθμομηχανών, συνέβαλαν μεταξύ άλλων ο Ιταλός *Luigi Cremona* (1830-1903), που εισήγαγε το ομώνυμο "διάγραμμα Cremona" υπολογισμού των δυνάμεων ράβδων σε ισοστατικά δικτυώματα, ο Γάλλος *M. Williot* (1843-1907), που εισήγαγε το ομώνυμο "διάγραμμα Williot" προσδιορισμού των μετατοπίσεων κόμβων, ο Γερμανός *August Ritter* (1826-1908), που εισήγαγε τη "μέθοδο των διαχωριστικών τομών" για τον υπολογισμό δικτυωμάτων, και ο επίσης Γερμανός *Emil Winkler* (1835-1888). Ο τελευταίος υπήρξε μάλιστα ένας από τους θεμελιωτές της θεωρίας της δοκού επί ελαστικού εδάφους ("σταθερά Winkler") και αυτός που πρώτος εισήγαγε την έννοια της γραμμής επιρροής.

Το 1868, ο Γερμανός *Otto Christian Mohr* (1835-1918), καθηγητής της Αντοχής των Υλικών και της Στατικής στο Πανεπιστήμιο της Δρέσδης, αγνοώντας την προαναφερθείσα εργασία του Maxwell, παρουσιάζει την ίδια ουσιαστικά μέθοδο ακολουθώντας όμως διαφορετική διαδικασία και χρησιμοποιώντας απλούστερη διατύπωση που την καθιστούσε καταλληλότερη για εφαρμογή στην πράξη ("Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisebahn-Konstruktionen", Zeitschrift d. Architekten- u. Ingenieur-Vereins, Hannover 1868). Πέραν τούτου και οι υπόλοιπες συνεισφορές του Otto Mohr στην ανάπτυξη της Στατικής υπήρξαν σημαντικές, όπως π.χ.: διατύπωσε την αρχή των δυνατών (νοητών) φορτίων για τον υπολογισμό μετατοπίσεων (που αποτέλεσε την πρώτη σύλληψη της αρχής των συμπληρωματικών δυνατών έργων) και τη σήμερα ονομαζόμενη "αναλογία του Mohr" για τον υπολογισμό ελαστικών γραμμών, εφηύρε τον "κύκλο του Mohr", βελτίωσε την ημιγραφική μέθοδο του Williot, γενίκευσε την πρόταση αμοιβαιότητας του Maxwell ($\delta_{mn} = \delta_{nm}$) για κάθε είδους φορέα, κ.ά.π.. Ο Otto Mohr δικαίως θεωρείται ως ένας από τους δημιουργούς της Κλασικής Στατικής.

Τις προσπάθειες των ερευνητών της εποχής εκείνης για μία θεωρητική ολοκλήρωση της αντιμετώπισης υπερστατικών φορέων συμπλήρωσε με τις εξαιρετικής σπουδαιότητας εργασίες του ο Ιταλός *Carlo Alberto Castigliano* (1847-1884). Ήδη στη διπλωματική του εργασία (Turin, 1873) ο Castigliano διατύπωσε το θεώρημα της ελάχιστης τιμής του έργου παραμόρφωσης, ενώ σε βιβλίο του δημοσιευμένο στο Παρίσι το 1879 ("Théorème de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications") αναπτύσσει τα θεωρήματα που σήμερα φέρουν το όνομά του (1^η και 2^η πρόταση Castigliano). Το βιβλίο του αυτό είχε τεράστια απήχηση στο χώρο των μηχανικών. Η ενεργειακή μέθοδος του Castigliano χρησιμοποιήθηκε ευρύτατα στην πράξη, αλλά σταδιακά υποχώρησε έναντι της υπολογιστικά απλούστερης για φορείς της πράξης μεθόδου των Maxwell-Mohr.

Στα τέλη του 19^{ου} και στις αρχές του 20^{ου} αιώνα υπήρξαν αξιόλογες συνεισφορές στη Στατική από πολλούς ερευνητές του γερμανόφωνου χώρου, όπως π.χ. από τους R. Krohn και R. Land που διατύπωσαν την ομώνυμη πρόταση (3^η πρόταση αμοιβαιότητας). Εξέχουσα όμως και καθοριστική ώθηση για την ανάπτυξη ενός γενικευμένου και αποτελεσματικού τρόπου υπολογισμού των κατασκευών δόθηκε το 1886 από τον *Heinrich Müller-Breslau* (1851-1925), καθηγητή της Στατικής των Κατασκευών στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Βερολίνου, με τη δημοσίευση του βιβλίου του "Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und Statik der Baukonstruktionen" (Berlin, 1886), στο οποίο διατυπώνεται η Μέθοδος Δυνάμεων με χρήση των συμβόλων δ_{mn} , όπως ουσιαστικά τη χρησιμοποιούμε και σήμερα. Την οριστική της μορφή έλαβε η Μέθοδος Δυνάμεων το 1904, στην τρίτη έκδοση του προαναφερθέντος βιβλίου (4. Auflage, 1905, Verlag Alfred Kroener, Stuttgart und Leipzig), και ελάχιστες τροποποιήσεις υπέστη έκτοτε.



Otto Mohr (1835-1918)
[σε ηλικία 70 ετών]



Heinrich Müller-Breslau (1851-1925)
[σε ηλικία 60 ετών]

Ο Müller-Breslau θεωρείται δικαίως ως ένας από τους βασικούς πρωτεργάτες της Κλασικής Στατικής, με σημαντικές συνεισφορές και στην ακμάζουσα την εποχή εκείνη Γραφοστατική. Ιδιαίτερη αναφορά αξίζει να γίνει στην αναπτυχθείσα από τον Müller-Breslau μέθοδο υπολογισμού γραμμών επιρροής εντασιακών μεγεθών βάσει της *αρχής των δυνατών έργων* (σε ισοστατικούς φορείς: "κινηματική μέθοδος"), η οποία είχε διατυπωθεί με γενικό τρόπο ήδη το 1788 από τον *Joseph Louis Comte de Lagrange* (1736-1813) ως θεμελιώδης αρχή της Μηχανικής στο σημαντικότερο βιβλίο του *Méchanique Analytique*. Σημειώνεται ότι στον Lagrange ανάγεται και η σύλληψη της *αρχής της αποδέσμευσης*, που χρησιμοποιείται ευρύτατα στη Στατική.

- Η ανάπτυξη της Μεθόδου Μετακινήσεων

Με την ευρεία εφαρμογή στη δομική πράξη της ολοκληρωμένης πλέον θεωρητικά μεθόδου δυνάμεων άρχισαν να διαφαίνονται και οι αδυναμίες της, οι οποίες ώθησαν τους ερευνητές στην αναζήτηση και άλλων, προσφορότερων υπολογιστικά, μεθόδων. Οι πρώτες εργασίες με μετακινήσεις ως άγνωστα μεγέθη παρουσιάστηκαν από τους

Γερμανούς *Friedrich Engesser* (1848-1931) το 1888 ("Über die Nebenspannungen der Fachwerkstäbe bei steifen Knotenverbindungen", VDI-Zeitschrift 32, No. 36, S. 813-817), *Otto Mohr* το 1892 ("Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen", *Zivilingenieur* 1892, S. 577, u. 1893, S. 67) και *Georg Christoph Mehlerts* (1843-1917) το 1910, και αφορούσαν στο πρόβλημα υπολογισμού των δευτερογενών τάσεων σε ράβδους δικτυωμάτων. Για τον υπολογισμό των τάσεων αυτών, οι οποίες αναπτύσσονται σε δικτυώματα λόγω της μη ιδανικά αρθρωτής σύνδεσης των ράβδων τους στους κόμβους μέσω κομβοελασμάτων, εισήχθησαν ως άγνωστα μεγέθη οι γωνίες στροφής των κόμβων. Σε πλήρη μορφή διατυπώθηκε η Μέθοδος αυτή των Γωνιών Στροφής από τον Δανό *A. Bendixsen* ("Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen", Berlin 1914) και τον Γερμανό *Willy Gehler* ("Rahmenberechnung mittels der Drehwinkel", περιέχεται στον τιμητικό τόμο "Otto Mohr zum 80-sten Geburtstag", 1916). Ανεξάρτητα από τους Bendixsen και Gehler, η Μέθοδος των Γωνιών Στροφής διατυπώνεται το 1915 στις Ηνωμένες Πολιτείες και από τον G. A. Maney ("Studies in Engineering-No.1", University of Minnesota, 1915) με στόχο την επίλυση υπερστατικών πλαίσιακών φορέων.

Η γονιμότητα της νέας μεθόδου εκτιμήθηκε πολύ σύντομα, ιδιαίτερα λόγω της σημαντικής μείωσης του αριθμού των αγνώστων κατά την επίλυση πολλαπλών υπερστατικών φορέων, και οδήγησε στη γρήγορη περαιτέρω ανάπτυξή της. Την κλασική της μορφή, η οποία εκτός από αγνώστες στροφές συμπεριλαμβάνει και αγνώστες μετατοπίσεις και η οποία με λίγες τροποποιήσεις ισχύει μέχρι σήμερα, έλαβε η Μέθοδος Μετακινήσεων στη δεκαετία του 1920, κυρίως με τις εργασίες του Δανού *A. Ostenfeld* ("Die Deformationsmethode", Verlag J. Springer, Berlin 1926) και του Γερμανού *L. Mann* ("Theorie der Rahmentragwerke auf neuerer Grundlage", Verlag J. Springer, Berlin 1927).

Με επί της ουσίας ολοκληρωμένες πλέον τις μεθόδους δυνάμεων και μετακινήσεων, τόσο από θεωρητικής πλευράς όσο και από πλευράς υπολογιστικής διαδικασίας για εφαρμογή στην πράξη, δεν άργησαν να διαπιστωθούν και οι μεταξύ τους σχέσεις. Η *δυσαικρότητα* που υφίσταται μεταξύ της Μεθόδου Δυνάμεων και της Μεθόδου Μετακινήσεων καθώς και ο συσχετισμός τους τόσο με τις προτάσεις του Castigliano όσο και με τις αρχές των δυνατών έργων (ή δυνατών μετακινήσεων) και των συμπληρωματικών δυνατών έργων (ή νοητών δυνάμεων) διατυπώθηκαν για πρώτη φορά με πλήρη και σαφή τρόπο το 1933 από τον *August Hertwig* (1872-1955), ο οποίος το 1924 είχε διαδεχθεί τον Müller-Breslau στην έδρα της Στατικής των Κατασκευών στο Τεχνικό Πανεπιστήμιο του Βερολίνου. Ένα από τα τελευταία σημαντικά βήματα ανάπτυξης της Κλασικής Στατικής αποτελεί η διατύπωση από τον *Alfred Teichmann* (1902-1971) της μεθόδου των «πλήρων φορτίων διατομής»



August Hertwig (1872-1955)
[σε ηλικία 70 ετών]

("Vollständige Schnittlasten"), με τη βοήθεια της οποίας επιτυγχάνεται με συστηματικό τρόπο ο υπολογισμός φορέων σύμφωνα με τη θεωρία 2^{ης} τάξης είτε με τη Μέθοδο Δυνάμεων είτε με τη Μέθοδο Μετακινήσεων.

- Οι θαμιστικές μέθοδοι Cross και Kani

Η επίλυση των μεγάλων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, στα οποία οδηγούσαν οι Μέθοδοι Δυνάμεων και Μετακινήσεων κατά την εφαρμογή τους σε πολλαπλώς υπερστατικούς φορείς, ήταν την εποχή εκείνη ιδιαίτερα επίπονη και χρονοβόρα, αφού το κυριότερο διαθέσιμο υπολογιστικό μέσο ήταν τότε (ο σχεδόν άγνωστος πλέον σήμερα) λογαριθμικός κανόνας. Η ανάγκη παράκαμψης των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων αποτέλεσε το κίνητρο για την ανάπτυξη μιας σειράς επαναληπτικών (θαμιστικών) μεθόδων. Η πρώτη, αποτελεσματικότερη και δημοφιλέστερη θαμιστική μέθοδος δημοσιεύτηκε το 1930 από τον *Hardy Cross* (1885-1959), καθηγητή στο Πανεπιστήμιο του Illinois ("Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments", Proc. ASCE. 56, May, 1930, p. 119). Η μέθοδος Cross, που ξεκινώντας από τις ροπές του πλήρως παγιωμένου φορέα καταλήγει -μέσα από μία σειρά χαλαρώσεων, κατανομών και μεταβιβάσεων τους- στον προσδιορισμό των τελικών ροπών, έφερε στα αμέσως ακόλουθα χρόνια πραγματική επανάσταση στην επίλυση υπερστατικών φορέων και αποτελεί μία από τις μεγαλύτερες συνεισφορές στη Στατική των Κατασκευών. Η μέθοδος Cross είχε κυρίαρχη θέση στη δομική πράξη επί πολλές δεκαετίες, αποτελεί δε ακόμη και σήμερα αντικείμενο πανεπιστημιακών μαθημάτων για Πολιτικούς Μηχανικούς λόγω της ιδιαίτερης διδακτικής της αξίας. Στο ίδιο ουσιαστικά σκεπτικό στηρίχθηκε και η ανεξάρτητα από τον Cross αναπτυχθείσα "μέθοδος χαλάρωσης" του καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης *R. V. Southwell*, που είναι μια μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων για τα τελικά μεγέθη έντασης ("Stress Calculation in Frameworks by the Method of Systematic Relaxation of Constraints", Proc. Roy. Soc., A151, 56-95, 1935). Τέλος, μία ακόμη θαμιστική μέθοδος που αξίζει να αναφερθεί λόγω της εκτεταμένης εφαρμογής της για πολλά χρόνια από δομοστατικούς μηχανικούς είναι η "μέθοδος Kani" του Σέρβου *G. Kani* ("Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen", Stuttgart, Verlag Konrad Wittwer, 1949). Βέβαια, στη σύγχρονη δομική πράξη, όπου επικρατεί πλέον ολοκληρωτικά η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή, οι παραπάνω θαμιστικές μέθοδοι καθώς και διάφορες άλλες παραλλαγές τους έδωσαν τη θέση τους, όπως άλλωστε και οι κλασικές "χειρωνακτικές" μέθοδοι δυνάμεων και μετακινήσεων, στις υπολογιστικά (και όχι μόνο) πολύ προσφορότερες μητρικές μεθόδους.

- Οι μητρικές μέθοδοι

Η προαναφερθείσα ανάδειξη του δυαδικού χαρακτήρα των δύο κλασικών μεθόδων έδωσε την τελική θεωρητική ώθηση, η οποία, σε συνδυασμό με τις αυξημένες υπολογιστικές ανάγκες και με την ανάπτυξη των πρώτων προγραμματιζόμενων υπολογιστών, οδήγησε κατά το τέλος της δεκαετίας 1940 στην ανάπτυξη και τη μητρική κωδικοποίηση των υπολογιστικών διαδικασιών επίλυσης φορέων. Πρώτα "μετεξελίσσεται" η Μέθοδος Δυνάμεων (force method) στη Μέθοδο Ενδοσιμότητας (flexibility method) και σχεδόν αμέσως ακολουθεί η "μετεξέλιξη" της Μεθόδου Μετακινήσεων (Displacement Method) στη Μέθοδο Στιβαρότητας (Stiffness Method).

Η ανάπτυξη των μητρωικών μεθόδων αποκορυφώνεται και κλείνει επί της ουσίας περί τα τέλη της δεκαετίας του 1950 με τις πρωτοποριακές πραγματείες του Έλληνα *Ιωάννη Αργύρη* (1913-2004), καθηγητή αεροδιαστημικών εφαρμογών στο Πολυτεχνείο της Στουτγκάρδης και ταυτοχρόνως στο Imperial College του Λονδίνου (Argyris J., "Energy theorems and structural analysis", Aircraft Engng, 1954/55, και "Die Matrizen-theorie der Statik", Ingenieurarchiv XXV, 1957). Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Αργύρης πήρε το δίπλωμα του Πολιτικού Μηχανικού το 1936 από το Πανεπιστήμιο του Μονάχου και διεύρυνε τις γνώσεις του στην Αεροδυναμική στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου το 1940.



John Argyris (1913-2004)
[σε ηλικία 82 ετών]

Το σύνολο των μητρωικών μεθοδολογιών και μεθόδων που αφορούν σε στατικά προβλήματα χαρακτηρίζεται γενικά ως *Μητρωική Στατική*. Τονίζεται όμως ότι στη *σημερινή* πράξη του δομοστατικού μηχανικού επικράτησαν και εφαρμόζονται σχεδόν αποκλειστικά μητρωικές μέθοδοι ανάλυσης που βασίζονται στη Μέθοδο Στιβαρότητας, δηλαδή ουσιαστικά στη Μέθοδο Μετακινήσεων. Γι' αυτό ο όρος *Μητρωική Στατική* χρησιμοποιείται συχνά με στενότερη έννοια για να υποδηλώσει τη Μέθοδο Στιβαρότητας και τις σχετικές με αυτήν μητρωικές διαδικασίες. Σημειώνεται επίσης ότι μετά τη δεκαετία του 1950 η Μέθοδος Στιβαρότητας επεκτάθηκε σε όλα σχεδόν τα πεδία της Μηχανικής υπό τη μορφή της γενικής *Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων*.

Μια αναλυτικότερη παρουσίαση της ιστορικής μετάβασης από τις κλασικές Μεθόδους Δυνάμεων και Μετακινήσεων στη Μητρωική Στατική και στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων θα γίνει στην αρχή του κεφαλαίου 4.

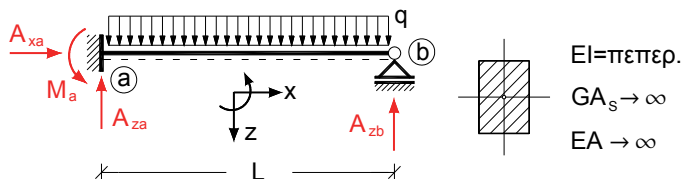
Ο στόχος της προηγηθείσας σκιαγράφησης της εξελικτικής πορείας των κλασικών στατικών επίλυσης υπερστατικών φορέων ήταν να διεγείρει το ενδιαφέρον του αναγνώστη για τα αντικείμενα της Στατικής, να ενισχύσει τη διάθεση ενασχόλησής του με στατικά προβλήματα και -γιατί όχι- να συμβάλει στην ενίσχυση της επαγγελματικής υπερηφάνειας του μέσω της συνειδητοποίησης των καταβολών του κλάδου, της ιστορικής διαδρομής του και των εξαιρετικών επιστημονικών επιτευγμάτων συναδέλφων μηχανικών-ερευνητών διαφόρων εθνοτήτων.

Μετά την παραπάνω σύντομη ιστορική ανασκόπηση επανερχόμαστε στις σκέψεις και ιδέες που διατυπώθηκαν στην αρχή της παραγράφου και τις συγκεκριμενοποιούμε με τη βοήθεια του απλού επίπεδου γραμμικού φορέα του σχήματος 1.1-1. Πρόκειται για μία ευθύγραμμη δοκό με ομοιόμορφο συνεχές φορτίο, η οποία αριστερά είναι πλήρως πακτωμένη και δεξιά απλώς εδραζόμενη. Θα θεωρήσουμε εδώ για λόγους απλούστευσης, οι οποίοι όμως δεν επηρεάζουν καθόλου το σκεπτικό επίλυσης, ότι η δυσμηνσία GA_s και η δυστένεια EA της δοκού είναι άπειρες, ότι δηλαδή η δοκός υφίσταται μόνο καμπτικές παραμορφώσεις.

Υπενθύμιση:

Υπενθυμίζεται ότι η δυσκαμψία EI , η δυστημσία GA_S , η δυστένεια EA και η δυστρεψία GI_T (όπου: E το μέτρο ελαστικότητας, G το μέτρο ολίσθησης/διάτμησης, I η ροπή αδράνειας σε κάμψη, A η επιφάνεια διατομής, A_S η τεκμαρτή επιφάνεια διάτμησης και I_T η ροπή αδράνειας σε στρέψη) συνθέτουν την έννοια της "στιβαρότητας" (αγγλ.: stiffness). Οι αντίθετες έννοιες: ευκαμψία, ευτένεια, ευτημσία και ευστρεψία συνθέτουν αντίστοιχα την έννοια της "ενδοσιμότητας" (αγγλ.: flexibility). Χάριν μιας ενιαίας και γλωσσικά ορθής χρήσης των όρων παρατίθεται στο Παράρτημα ένας σχετικός πίνακας με τους βασικούς αυτούς όρους της Στατικής στην ελληνική και αγγλική γλώσσα.

Προφανώς, ο απλός επίπεδος αυτός φορέας είναι μία φορά στατικά αόριστος, διότι συνδέεται με το στερεό υπόβαθρο μέσω τεσσάρων δεσμικών ράβδων (δηλαδή, έχει τέσσερις αντιδράσεις στήριξης), ενώ στο επίπεδο διατίθενται τρεις μόνο εξισώσεις ισορροπίας. Έτσι, εισάγοντας π.χ. μία καμπτική άρθρωση στο αριστερό άκρο a παίρνουμε ένα ΣΚΣ. Ως ΣΚΣ θα μπορούσε, βέβαια, να επιλεγεί και κάποιος άλλος παράγωγος ισοστατικός φορέας.



Σχ. 1.1-1 Μονόπακτη δοκός

Επίσης, λόγω της ατένειας, η οριζόντια μετατόπιση u_b του δεξιού άκρου b της δοκού είναι εξ ορισμού μηδενική (Σημ.: Η u_b θα ήταν μηδενική ακόμη και αν η δοκός είχε πεπερασμένη δυστένεια, διότι λόγω της κύλισης στο άκρο b η αξονική δύναμη της δοκού για τη δεδομένη φόρτιση είναι μηδενική και άρα δεν εμφανίζονται αξονικές παραμορφώσεις). Αρκεί επομένως η δέσμευση της καταρχάς άγνωστης στροφής ϕ_b του δεξιού άκρου b για να μετατραπεί ο αρχικός φορέας σε αμφίπακτη δοκό, η οποία θεωρείται ως γεωμετρικά ορισμένη. Άρα, ο δεδομένος φορέας είναι μία φορά γεωμετρικά αόριστος.

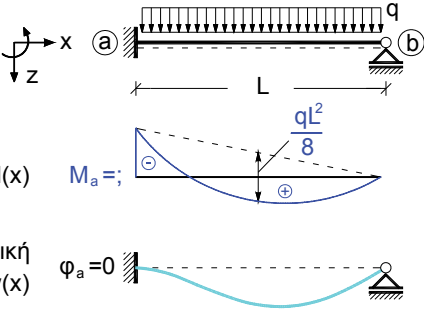
Παρατήρηση:

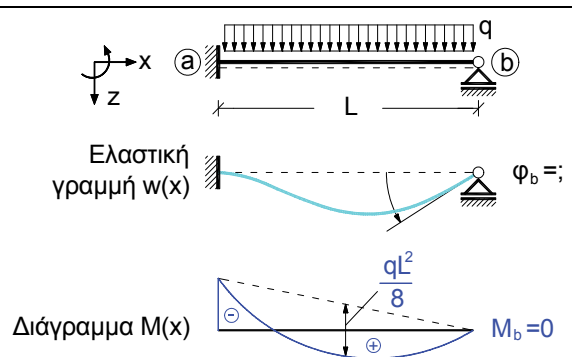
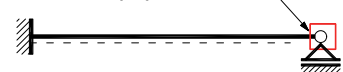
Η θεώρηση της αμφίπακτης δοκού ως γεωμετρικά ορισμένης σημαίνει ότι η παραμόρφωση και η έντασή της λόγω οποιουδήποτε φορτίου ή καταναγκασμού θεωρούνται γνωστές (π.χ. λαμβάνονται από διαθέσιμους πίνακες).

Η επίλυση του παραπάνω μία φορά στατικά αόριστου και, ταυτόχρονα, μία φορά γεωμετρικά αόριστου φορέα μπορεί να γίνει είτε με τη ΜΔ είτε με τη ΜΜ. Ακολουθώντας γίνεται μια παράλληλη παρουσίαση των δύο αυτών κλασικών μεθόδων ανάλυσης, από την οποία διαφαίνεται και η *δυσαικρότητα* τους.

Σημείωση:

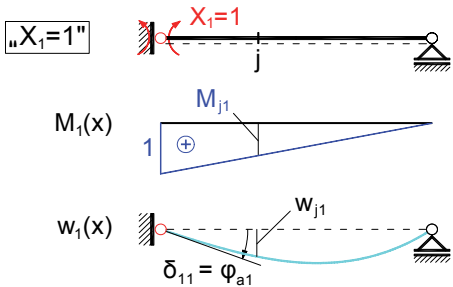
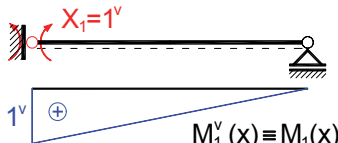
Οι όροι "επίλυση", "υπολογισμός" και "ανάλυση" ενός φορέα χρησιμοποιούνται γενικώς ως ταυτόσημοι. Η χρήση του όρου "ανάλυση" θα σχολιαστεί εκτενέστερα στην παράγραφο 1.3.

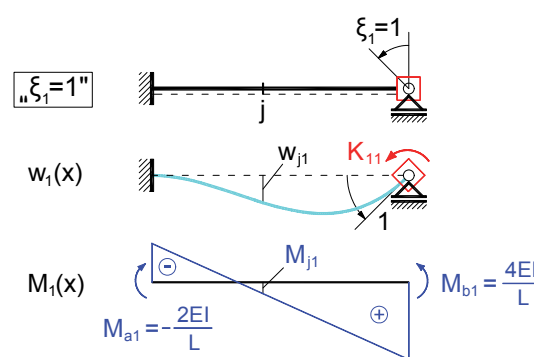
	Επίλυση με τη ΜΔ
Φορέας και φόρτιση $EI = \text{σταθ.}$ $GA_s \rightarrow \infty$ $EA \rightarrow \infty$	 Διάγραμμα $M(x)$ $M_a = -\frac{qL^2}{8}$ Ελαστική γραμμή $w(x)$ $\varphi_a = 0$
Στατική αοριστία	Ο υπολογισμός των εντασιακών μεγεθών $Q(x) = -\int_0^x q dx + C_1$ $M(x) = +\int_0^x Q(x) dx + C_2$ απαιτεί δύο στατικές συνοριακές συνθήκες για τον προσδιορισμό των δύο σταθερών ολοκλήρωσης C_1, C_2. Εδώ έχουμε μόνο μία: $M_b = 0$. Άρα, ο φορέας είναι μία φορά στατικά αόριστος (υπερστατικός).
1. Στατικό κύριο σύστημα	Ο μία φορά στατικά αόριστος φορέας μετατρέπεται με την κατάλυση της εσωτερικής δεσμικής ράβδου που μεταφέρει ροπές (δηλαδή με εισαγωγή μίας καμπτικής άρθρωσης) στον κόμβο a σε στατικά ορισμένο (ισοστατικό) σύστημα. Ο έτσι τροποποιημένος φορέας ονομάζεται στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ). Στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ) → κατάλυση συνδέσμου (εδώ: εισαγωγή καμπτικής άρθρωσης)  Κατάλυση συνδέσμου Βεβαίως, θα μπορούσε να καταλυθεί κάποια (εσωτερική ή εξωτερική) δεσμική ράβδος σε άλλο σημείο του δεδομένου φορέα, οδηγώντας έτσι σε διαφορετικό ΣΚΣ (π.χ. κατάλυση της κατακόρυφης δεσμικής ράβδου στήριξης στο σημείο b). Γενικώς, οποιοσδήποτε ισοστατικός φορέας που προκύπτει από τον δεδομένο πραγματικό φορέα με κατάλυση ενός συνδέσμου είναι αποδεκτός ως ΣΚΣ υπό μία προϋπόθεση: η κατάλυση του συνδέσμου να μην οδηγήσει σε χαλαρό (κινηματικό) φορέα.

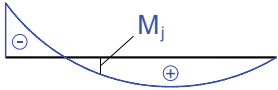
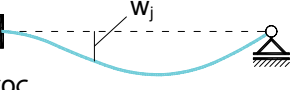
Επίλυση με τη ΜΜ	
Φορέας και φόρτιση $EI = \text{σταθ.}$ $GA_s \rightarrow \infty$ $EA \rightarrow \infty$	
Γεωμετρική αοριστία	Ο υπολογισμός των παραμορφωσιακών μεγεθών $\varphi(x) = -\int_0^x \left\{ \frac{1}{EI} \cdot \left[\int_0^x \left(\int_0^x q dx \right) dx \right] \right\} dx + C_1 \cdot \left(\frac{x^2}{2 \cdot EI} \right) + C_2 \cdot \left(\frac{x}{EI} \right) + C_3$ $w(x) = -\int_0^x \varphi(x) dx + C_4$ απαιτεί τέσσερις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες για τον προσδιορισμό των τεσσάρων σταθερών ολοκλήρωσης C_1 έως C_4. Εδώ έχουμε μόνο τρεις: $w_a=0$, $\varphi_a=0$, $w_b=0$. Άρα, ο φορέας είναι μία φορά γεωμετρικά αόριστος (υπεργεωμετρικός).
1. Γεωμετρικό κύριο σύστημα	Ο μία φορά γεωμετρικά αόριστος φορέας μετατρέπεται με την προσθήκη μίας στρωφικής δεσμικής ράβδου (δικινητής* πάκτωσης) που εμποδίζει τη στρόφη του κόμβου b σε γεωμετρικά ορισμένο (ισογεωμετρικό) σύστημα. Ο έτσι τροποποιημένος φορέας ονομάζεται γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ). Γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ) → προσθήκη συνδέσμου (εδώ: στρεπτικής δεσμικής ράβδου)  Προσθήκη συνδέσμου Σε αντίθεση με το ΣΚΣ, το ΓΚΣ ενός δεδομένου φορέα μπορεί πάντοτε να καθοριστεί μονοσήμαντα. Το γεγονός αυτό συνιστά και ένα από τα πλεονεκτήματα της ΜΜ έναντι της ΜΔ, διότι διευκολύνει την τυποποίηση και τον προγραμματισμό της σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. *) Δικινητή πάκτωση = στρωφική δεσμική ράβδος = πάκτωση που εμποδίζει μόνο τη στρόφη, ενώ επιτρέπει τις μετατοπίσεις κατά x και z.

Επίλυση με τη ΜΔ	
Η εντασιακή κατάσταση του ΣΚΣ υπό τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση των συνθηκών ισορροπίας και επομένως είναι πάντα μια κατάσταση που πληροί τις συνθήκες ισορροπίας (κατάσταση ισορροπίας). Οι ροπές του ισοστατικού ΣΚΣ υπολογίζονται βάσει των συνθηκών ισορροπίας κατά τα γνωστά από τη Στατική των Ισοστατικών Φορέων. Διάγραμμα ροπών: η ισορροπία ικανοποιείται Ελαστική γραμμή: το συμβιβαστό τραυματίζεται Αντίθετα, οι συνθήκες συμβιβαστού (των παραμορφώσεων ή μετακινήσεων) δεν ικανοποιούνται λόγω της καταλυθείσας δεσμικής ράβδου, δηλαδή της εισαγωγής άρθρωσης στο άκρο α. Στην άρθρωση αυτή αναπτύσσεται η παραμόρφωση δ_{10} (εδώ: $\delta_{10} =$ στροφή φ_{a0} στο άκρο α), η οποία δεν υπάρχει στον δεδομένο φορέα. Επομένως, η κατάσταση συμβιβαστού πρέπει να "διορθωθεί" καταλλήλως. <i>Σημείωση:</i> Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στους καταλυθέντες συνδέσμους συμβολίζονται με το γράμμα δ.	2. Κατάσταση "0" (εξωτερική φόρτιση) στο στατικό κύριο σύστημα

Επίλυση με τη ΜΜ	
Η παραμορφωσιακή κατάσταση του ΓΚΣ υπό τη δεδομένη εξωτερική φόρτιση είναι ταυτόσημη με την παραμορφωσιακή κατάσταση των επί μέρους αμφίπακτων δοκών από τις οποίες αποτελείται το ΓΚΣ και επομένως είναι πάντα μια κατάσταση που πληροί τις συνθήκες συμβιβαστού (κατάσταση συμβιβαστού). Οι ροπές του υπερστατικού ΓΚΣ λαμβάνονται από έτοιμους πίνακες που περιέχουν τις ροπές της αμφίπακτης δοκού για διάφορες φορτίσεις (Σημ.: Οι τιμές που περιέχονται στους πίνακες αυτούς μπορούν να υπολογιστούν, π.χ., με ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της δοκού). Ελαστική γραμμή: το συμβιβαστό ικανοποιείται Διάγραμμα ροπών: η ισορροπία τραυματίζεται Αντίθετα, οι συνθήκες ισορροπίας (των δυνάμεων ή εντάσεων) δεν ικανοποιούνται λόγω της προσθήκης της στροφικής δεσμικής ράβδου, δηλαδή της δικινητής πάκτωσης στο άκρο b. Στη δικινητή αυτή πάκτωση αναπτύσσεται η ένταση (αντίδραση) K_{10} (εδώ: K_{10} = ροπή M_{b0} στο άκρο b), η οποία δεν υπάρχει στον δεδομένο φορέα. Επομένως, η κατάσταση ισορροπίας πρέπει να "διορθωθεί" καταλλήλως. Σημείωση: Οι εντάσεις (αντιδράσεις) που αναπτύσσονται στους προστεθέντες συνδέσμους συμβολίζονται με το γράμμα K.	2. Κατάσταση "0" (εξωτερική φόρτιση) στο γεωμετρικό κύριο σύστημα

	Επίλυση με τη ΜΔ
3. Κατάσταση μοναδιαίας φόρτισης στο στατικό κύριο σύστημα	Η "διόρθωση" αυτή επιτυγχάνεται με τον καθορισμό μιας "κατάλληλης" κατάστασης έντασης, η οποία αθροιζόμενη στην κατάσταση έντασης λόγω εξωτερικής φόρτισης μηδενίζει την ανύπαρκτη παραμόρφωση δ_{10} στην εισαχθείσα άρθρωση (δηλαδή αποκαθιστά τη συνέχεια). Δεδομένου ότι στην περίπτωση μας η μη ικανοποίηση του συμβιβαστού (δηλαδή η ασυνέχεια) οφείλεται στον μηδενισμό της ροπής M_a στο σημείο κατάλυσης της δεσμικής ράβδου, ως "κατάλληλη" κατάσταση έντασης προσάγεται στην εισαχθείσα άρθρωση ένα ζεύγος ροπών X_1, στο οποίο δίνεται <i>καταρχάς</i> μοναδιαία τιμή:  Οι ροπές του ισοστατικού ΣΚΣ υπολογίζονται κατά τα γνωστά από τη Στατική των Ισοστατικών Φορέων. Λόγω της εισαγωγής άρθρωσης στο άκρο a, αναπτύσσεται εκεί παραμόρφωση δ_{11} (εδώ: δ_{11}=στροφή φ_{a1} στο άκρο a).
4. Υπολογισμός των παραμορφώσεων στους καταλυθέντες συνδέσμους με την ΑΣΔΕ	Τα μεγέθη παραμόρφωσης δ_{10} και δ_{11} (άλματα στροφής = γόνατα), που αναπτύσσονται στο σημείο του καταλυθέντος συνδέσμου στην κατάσταση "0" και "$X_1=1$" αντίστοιχα, υπολογίζονται με την ΑΣΔΕ (αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων = αρχή των νοητών ή βοηθητικών δυνάμεων).  Εδώ: Νοητή ροπή "$X_1=1^v$": $\delta_{10} = \varphi_{a0} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^L [M(x)_{,0} \cdot M^v(x)_{,1}] dx = \frac{qL^3}{24 \cdot EI}$ $\delta_{11} = \varphi_{a1} = \frac{1}{EI} \cdot \int_0^L [M(x)_{,1} \cdot M^v(x)_{,1}] dx = \frac{L}{3 \cdot EI}$ {Οι τιμές των ολοκληρωμάτων γινομένου δύο συναρτήσεων λαμβάνονται από πίνακες}

	Επίλυση με τη ΜΜ
3. Κατάσταση μοναδιαίου καταναγκασμού στο γεωμετρικό κύριο σύστημα	Η "διόρθωση" αυτή επιτυγχάνεται με τον καθορισμό μιας "κατάλληλης" κατάστασης παραμόρφωσης, η οποία αθροιζόμενη στην κατάσταση παραμόρφωσης λόγω εξωτερικής φόρτισης μηδενίζει την ανύπαρκτη αντίδραση K_{10} στην προστεθείσα δικινητή πάκτωση (δηλαδή αποκαθιστά την ισορροπία). Δεδομένου ότι στην περίπτωση μας η μη ικανοποίηση της ισορροπίας οφείλεται στον μηδενισμό της στροφής ϕ_b στο σημείο προσθήκης της δεσμικής ράβδου, ως "κατάλληλη" κατάσταση παραμόρφωσης επιβάλλεται στην προστεθείσα πάκτωση μία καταναγκασμένη στροφή ξ_1, στην οποία δίνεται <i>καταρχάς</i> μοναδιαία τιμή:  Οι ροπές του υπερστατικού ΓΚΣ λαμβάνονται από έτοιμους πίνακες που περιέχουν τις ροπές της αμφίπακτης δοκού για διάφορες καταναγκασμένες μετακινήσεις των άκρων της. Λόγω της προσθήκης δικινητής πάκτωσης στο άκρο b αναπτύσσεται εκεί η αντίδραση K_{11} (εδώ: K_{11}=ροπή στο άκρο b).
4. Υπολογισμός των αντιδράσεων στους προστεθέντες συνδέσμους με την ΑΔΕ	Τα μεγέθη έντασης K_{10} και K_{11} (ροπές πάκτωσης) που αναπτύσσονται ως αντιδράσεις στον προστεθέντα σύνδεσμο στην κατάσταση "0" και "$\xi_1=1$" αντίστοιχα, υπολογίζονται με την ΑΔΕ (αρχή των δυνατών έργων = αρχή των δυνατών ή νοητών μετακινήσεων). Εδώ: Δυνατή στροφή "$\xi_1=1^v$": $K_{10} \cdot 1^v - M_{b0} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{10} = M_{b0} = -\frac{qL^2}{12}$ $K_{11} \cdot 1^v - M_{b1} \cdot 1^v = 0 \Rightarrow K_{11} = M_{b1} = \frac{4EI}{L}$ Σημ.: Εναλλακτικά, οι αντιδράσεις K_{10} και K_{11} μπορούν να υπολογιστούν από τις συνθήκες ισορροπίας ροπών των καταστάσεων "0" και "$\xi_1=1$" στο σημείο του προστεθέντος συνδέσμου, δηλαδή στο άκρο b: $\sum M_0(x) _{(b)}=0$ και $\sum M_1(x) _{(b)}=0$.

Επίλυση με τη ΜΔ		
5. Επιλύου- σες εξισώσεις βάσει της αρχής της επαλλη- λίας	<i>Ικανοποίηση συνθηκών συμβιβαστού</i> Το μέγεθος του άγνωστου εντασιακού μεγέθους (εδώ: της ροπής) X_1 πρέπει να καθοριστεί έτσι, ώστε να μηδενίζεται τελικώς η ασυνέχεια $\delta_1=\varphi_a$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας πρέπει να ισχύει: $\begin{aligned}\delta_1 &= \varphi_a = \varphi_{a,0} + \varphi_{a,X_1} \\ &= \varphi_{a,0} + \varphi_{a,X_1=1} \cdot X_1 \\ &= \varphi_{a0} + \varphi_{a1} \cdot X_1 \\ &= \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0\end{aligned}$ Από τη γραμμική αυτή εξίσωση προσδιορίζεται το άγνωστο (υπεράριθμο) μέγεθος έντασης: $M_a = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{qL^2}{8}$ Σημ.: Ο συντελεστής δ_{11} είναι μέγεθος παραμόρφωσης και ονομάζεται συντελεστής ενδοσιμότητας, διότι για δεδομένη μοναδιαία ένταση (φόρτιση) το μέγεθός του αυξάνει με αυξανόμενη παραμόρφωση (δηλαδή με αυξανόμενη ενδοσιμότητα) του φορέα. Ο συντελεστής δ_{10} ονομάζεται συντελεστής φόρτισης.	
	6. Υπολογι- σμος των τελικών μεγεθών έντασης και παρα- μόρφω- σης με την αρχή της επαλλη- λίας	$M_j = M_{j0} + M_{j1} \cdot X_1 \Rightarrow M_a = 0 + 1 \cdot \left(-\frac{qL^2}{8} \right) = -\frac{qL^2}{8}$ $M(x)$ $M_a = -\frac{qL^2}{8}$  $w_j = w_{j0} + w_{j1} \cdot X_1$ $w(x)$ $\varphi_a \stackrel{!}{=} 0$  (Έλεγχος συμβιβαστού!)
	7. Έλεγχοι αποτελε- σμάτων	Οι έλεγχοι των αποτελεσμάτων αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας επίλυσης. Γενικότερα περί ελέγχων βλ. παράγραφο 1.3. Ειδικότεροι τρόποι ελέγχου της διαδικασίας επίλυσης με τη ΜΔ και των τελικών αποτελεσμάτων θα αναπτυχθούν στο κεφάλαιο 2.
Επίλυση με τη ΜΜ		



Μεταλλικές κατασκευές (Θεσσαλονίκη, Ηράκλειο)

2

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αναπτύσσεται διεξοδικά η Μέθοδος Δυνάμεων (ΜΔ) στην κλασική της μορφή που είναι κατάλληλη για υπολογισμούς "με το χέρι". Η παρουσίαση γίνεται για λόγους απλούστευσης με τη βοήθεια επίπεδων γραμμικών φορέων, χωρίς όμως αυτό να περιορίζει τη γενικότητα της αναπτυσσόμενης μεθοδολογίας.

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.6, στη σημερινή πράξη του δομοστατικού μελετητή δεν χρησιμοποιούνται πλέον για την ανάλυση των κατασκευών οι κλασικές ("χειρωνακτικές") μέθοδοι, στις οποίες ανήκει και η ΜΔ, αλλά εφαρμόζεται σχεδόν αποκλειστικά η Μέθοδος Στιβαρότητας, η οποία εκμεταλλεύεται πλήρως τις δυνατότητες του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Εντούτοις, η αξία των κλασικών μεθόδων, και ιδιαίτερα της ΜΔ, θεωρείται από διδακτικής πλευράς ως κεφαλαιώ-δους σημασίας προκειμένου:

- (α) να συνειδητοποιηθούν σε βάθος οι θεμελιώδεις προϋποθέσεις και παραδοχές της Στατικής,
- (β) να κατανοηθεί η βασική λογική της μεθοδολογίας επίλυσης υπερστατικών φορέων, και
- (γ) να αποσαφηνιστεί το γενικότερο θεωρητικό οικοδόμημα αρχών και προτάσεων, μέσα στο οποίο εντάσσονται οι επί μέρους μέθοδοι ανάλυσης κατασκευών.

Επίσης, η ενασχόληση με την κλασική ΜΔ και η "χειρωνακτική" επίλυση απλών υπερστατικών φορέων βοηθάει στην ανάπτυξη μιας καλύτερης αντίληψης και αίσθησης για τις αναπτυσσόμενες στον δομικό φορέα εντάσεις και παραμορφώσεις. Επιταχύνεται έτσι η ανάπτυξη του "στατικού αισθητηρίου" που καθιστά ασφαλέστερη και ανετότερη την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων στατικών επιλύσεων που διενεργήθηκαν σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στην παράγραφο 2.1 γίνεται υπενθύμιση των βασικών ορισμών, των θεμελιωδών παραδοχών στις οποίες στηρίζεται η ΜΔ και της χρησιμοποιούμενης σύμβασης θετικών προσήμων. Επίσης, γίνεται μία σειρά παρατηρήσεων που αφορούν στο ΣΚΣ, ο καθορισμός του οποίου αποτελεί το σημείο εκκίνησης των υπολογισμών. Τέλος, συνοψίζονται οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την ένταση και την παραμόρφωση επίπεδων γραμμικών φορέων και είναι ιδιαίτερα χρήσιμες για την κατανόηση της στατικής συμπεριφοράς τους.

Στην παράγραφο 2.2 αναπτύσσεται με τη βοήθεια ενός πολλαπλώς υπερστατικού πλαισίου η γενική διαδικασία επίλυσης φορέων με τη ΜΔ και γίνονται αναφορές σε διάφορα είδη εξωτερικών φορτίων και καταναγκασμών, καθώς και σε ελαστικές στηρίξεις και πακτώσεις. Στην υποπαράγραφο 2.2.6 παρουσιάζονται τρόποι ελέγχου της ορθότητας των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από επιλύσεις με τη ΜΔ. Όπως ήδη τονίστηκε στο κεφάλαιο 1, οι έλεγχοι των αποτελεσμάτων αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας επίλυσης. Η γνώση τρόπων και τεχνικών ελέγχου των αποτελεσμάτων και η απόκτηση σχετικής εμπειρίας είναι

σήμερα ιδιαίτερα σημαντικές στην πράξη, όπου τα αποτελέσματα προκύπτουν από αυτοματοποιημένες και κατά το μάλλον ή ήττον αδιαφανείς επίλυσεις με ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Στην παράγραφο 2.3 διερευνάται και σχολιάζεται η επιρροή της πεπερασμένης δυστησίας GA_s και της πεπερασμένης δυστένειας EA επί των αποτελεσμάτων της επίλυσης.

Προς εμπέδωση της διαδικασίας υπολογισμών ακολουθεί στην παράγραφο 2.4 η αριθμητική επίλυση ορισμένων απλών φορέων για διάφορες εξωτερικές φορτίσεις και καταναγκασμούς. Μία μεγαλύτερη σειρά απλών αλλά και συνθετότερων αριθμητικών παραδειγμάτων περιέχονται στον τόμο IIα του παρόντος συγγράμματος ([Αβρ-IIα]).

Στην παράγραφο 2.5 εξετάζονται διάφορες εξειδικευμένες τεχνικές, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να επιτευχθεί σημαντική εξοικονόμηση υπεραρίθμων μεγεθών. Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν (α) τη χρησιμοποίηση στατικών αόριστων κυρίων συστημάτων, (β) την εισαγωγή υπεραρίθμων στο 'ελαστικό κέντρο' του φορέα, και (γ) την αξιοποίηση της συμμετρίας ενός φορέα. Στην τελευταία περίπτωση η εξοικονόμηση αριθμητικών πράξεων επιτυγχάνεται είτε με χρήση ομάδων δυνάμεων ή/και ροπών ως υπεραρίθμων εντασιακών μεγεθών (αντί μίας μόνον υπεράριθμης) είτε διενεργώντας τους υπολογισμούς στον κατάλληλα εδραζόμενο "μισό" φορέα.

Τέλος, οι παράγραφοι 2.6, 2.7 και 2.8 αφορούν στον υπολογισμό σημειακών (μεμονωμένων) μετακινήσεων, ελαστικών γραμμών και γραμμών επιρροής εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών υπερστατικών φορέων με τη βοήθεια της ΜΔ.

2.1 Βασικοί ορισμοί, παραδοχές και συμβάσεις προσήμων

2.1.1. Ο ορισμός της υπερστατικότητας

Σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν στις παραγράφους 3.2.7 και 5.2.1 του πρώτου τόμου του παρόντος συγγράμματος [Αβρ-I] και στην παράγραφο 1.5 του ανά χείρας δεύτερου τόμου, η ένταση (ροπές, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις, αντιδράσεις στηρίξεων κτλ.) ενός στατικά ορισμένου (ισοστατικού) φορέα μπορεί να υπολογιστεί πλήρως με βάση τις εξισώσεις ισορροπίας. Αν οι τελευταίες δεν επαρκούν για τον υπολογισμό της έντασης του φορέα, τότε ο φορέας χαρακτηρίζεται ως στατικά αόριστος (υπερστατικός).

Από τους παραπάνω ορισμούς γίνεται φανερό ότι *σε ισοστατικούς φορείς δεν υφίσταται εξάρτηση των μεγεθών έντασης από τα μεγέθη παραμόρφωσης*, διότι τα πρώτα μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητα από τα δεύτερα με τη βοήθεια αποκλειστικά και μόνον των στατικών συνθηκών ισορροπίας, χωρίς δηλαδή να ληφθούν υπόψη οι συνθήκες συμβιβαστού και οι ιδιότητες του υλικού (*Προσοχή*: Το αντίστροφο δεν ισχύει. Η παραμόρφωση ενός ισοστατικού - όπως και ενός υπερστατικού - φορέα εξαρτάται άμεσα από την έντασή του). Αντίθετα, η αδυναμία επίλυσης υπερστατικών φορέων με βάση μόνον τις συνθήκες ισορροπίας καθιστά

αναγκαία τη θεώρηση των συνθηκών συμβιβαστού και των καταστατικών νόμων του υλικού, πράγμα που σημαίνει ότι σε υπερστατικούς φορείς υφίσταται εξάρτηση των μεγεθών έντασης από τα μεγέθη παραμόρφωσης.

Υπενθυμίζεται ότι σε περίπτωση που ένας υπερστατικός φορέας εδράζεται ισοστατικά, όπως π.χ. ένα κλειστό ορθογωνικό πλαίσιο που στηρίζεται ως αμφιέριστη δοκός, χαρακτηρίζεται ως εσωτερικά υπερστατικός.

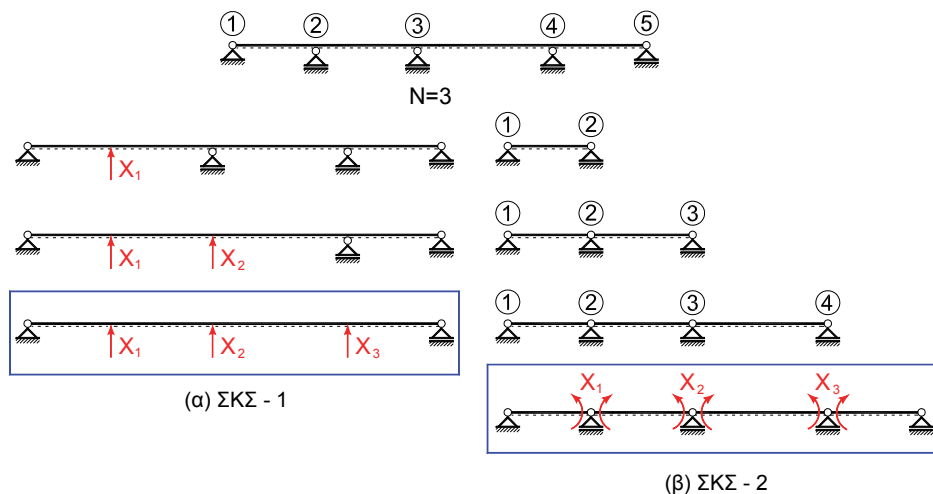
2.1.2 Το στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ)

Α. Τρόποι προσδιορισμού της υπερστατικότητας και καθορισμού του ΣΚΣ

Σύμφωνα με την παράγραφο 5.3 του πρώτου τόμου [Αβρ-Ι], ο προσδιορισμός του βαθμού υπερστατικότητας (δηλαδή της στατικής αοριστίας) ενός φορέα γίνεται κατά προτίμηση με έναν από τους ακόλουθους δύο τρόπους:

- Με τη *σταδιακή αποδόμηση* του δεδομένου φορέα, κατά την οποία καταλύονται σταδιακά δεσμικές ράβδοι (εσωτερικές ή/και εξωτερικές) του δεδομένου φορέα, εισάγονται δηλαδή καμπτικές, διατμητικές ή αξονικές αρθρώσεις μέχρις ότου αυτός καταστεί ισοστατικός. Ο ισοστατικός αυτός *παράγωγος φορέας* ονομάζεται *στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ)*.
- Με τη *σταδιακή οικοδόμηση* του ΣΚΣ, κατά την οποία ξεκινώντας από έναν κατάλληλο ισοστατικό φορέα και προσθέτοντας (συνδέοντας) σ' αυτόν σταδιακά γνωστούς ισοστατικούς φορείς δημιουργούμε έναν σύνθετο ισοστατικό φορέα που έχει την ίδια δομή (γεωμετρία και ελαστικές ιδιότητες των δομικών στοιχείων) με τον δεδομένο υπερστατικό φορέα. Ο έτσι "οικοδομούμενος" ισοστατικός φορέας ονομάζεται *στατικό κύριο σύστημα (ΣΚΣ)*.

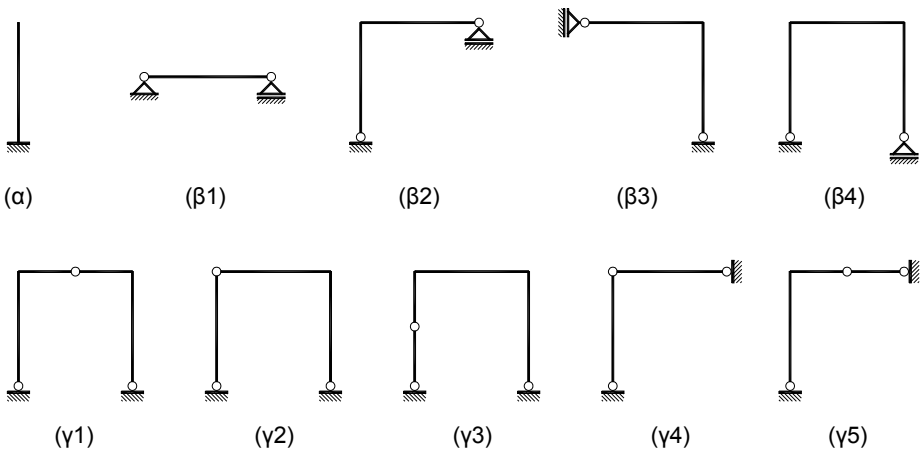
Ως απλό αλλά χαρακτηριστικό παράδειγμα ας θεωρήσουμε την τρεις φορές υπερστατική δοκό του σχήματος 2.1-1.



Σχ. 2.1-1 Προσδιορισμός ενός ΣΚΣ με σταδιακή αποδόμηση (α) και με σταδιακή οικοδόμηση (β)

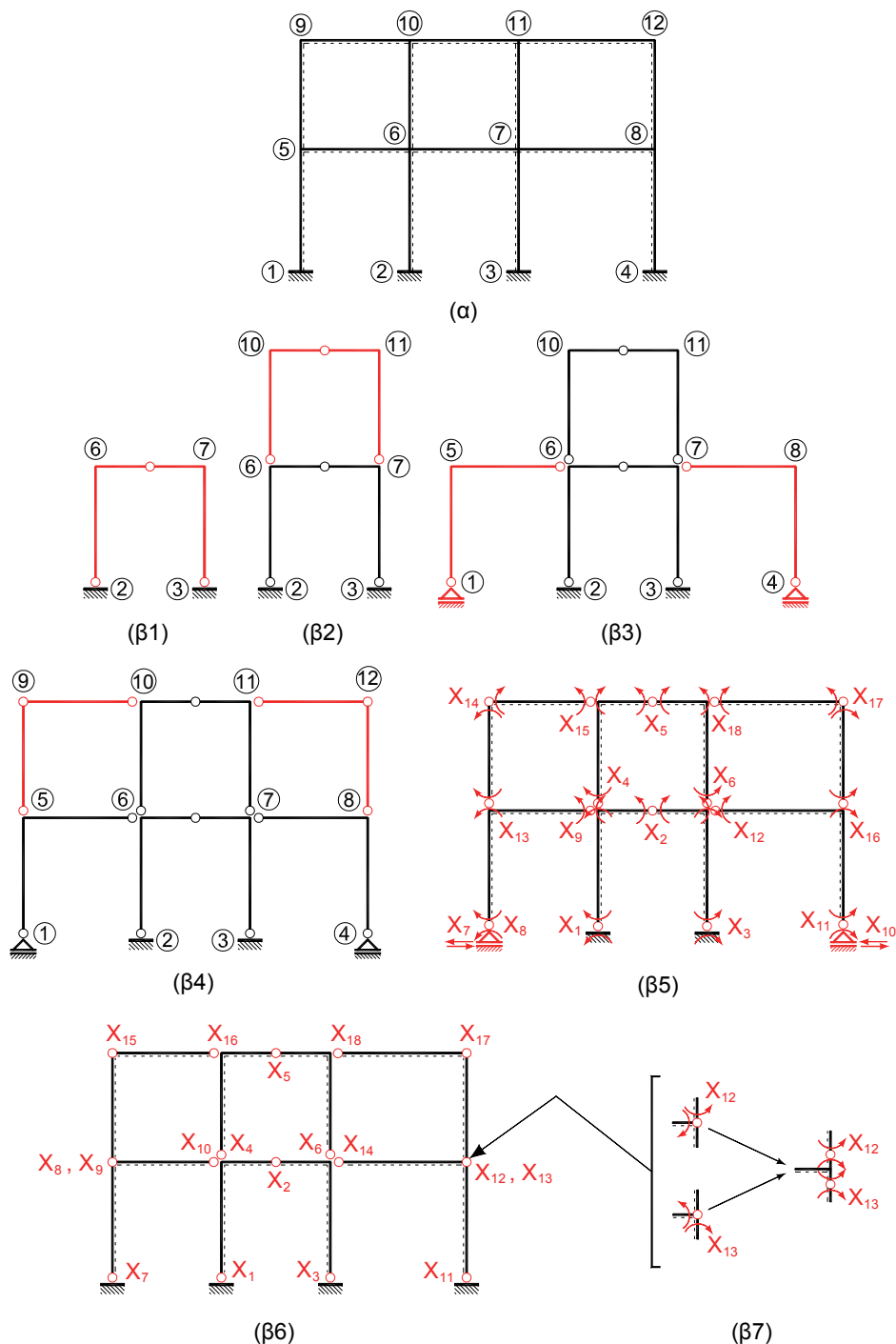
Αποδομώντας τη συνεχή αυτή δοκό με σταδιακή αφαίρεση των στηρίξεων 2, 3, και 4 καταλήγουμε στο ΣΚΣ-1 (Σχ. 2.1-1(α)). Μπορούμε όμως επίσης να καταλήξουμε σε ένα ΣΚΣ ξεκινώντας από την ισοστατική αμφιέριστη δοκό 1-2 και προσθέτοντας σ' αυτήν σταδιακά τις ισοστατικές δοκούς 2-3, 3-4 και 4-5, οικοδομώντας δηλαδή το ΣΚΣ-2 από επί μέρους ισοστατικούς υποφορείς (Σχ. 2.1-1(β)). Όπως θα δούμε παρακάτω στην υποπαράγραφο Δ, το ΣΚΣ-2 *υπερτερεί υπολογιστικά* του ΣΚΣ-1. Κατά κανόνα, ο καθορισμός του ΣΚΣ γίνεται αποτελεσματικότερα με τη σταδιακή οικοδόμηση και όχι με τη σταδιακή αποδόμηση του δεδομένου υπερστατικού φορέα, παρόλο που τα προκύπτοντα ΣΚΣ είναι σε κάθε περίπτωση *επί της ουσίας (όχι όμως υπολογιστικά) ισότιμα*.

Βασικοί ισοστατικοί φορείς που μπορούν να χρησιμοποιηθούν κατά τη σταδιακή οικοδόμηση ενός ΣΚΣ είναι ο πρόβολος (Σχ. 2.1-2(α)), η αμφιέριστη δοκός και διάφορες παραλλαγές της (Σχ. 2.1-2(β1) έως (β4)), καθώς και το τριαρθρωτό πλαίσιο ή και ημιπλάσιο σε διάφορες μορφές (Σχ. 2.1-2(γ1) έως (γ5)).



Σχ. 2.1-2 Βασικοί ισοστατικοί φορείς για τη σταδιακή οικοδόμηση ΣΚΣ

Η εφαρμογή της διαδικασίας της σταδιακής οικοδόμησης ενός υπολογιστικά πρόσφορου ΣΚΣ παρουσιάζεται ακολούθως για το πολλαπλώς υπερστατικό διώροφο πλαίσιο του σχήματος 2.1-3(α). Μπορούμε, π.χ., να ξεκινήσουμε από το μεσαίο κάτω πλαίσιο 2-6-7-3 μετατρέποντάς το με εισαγωγή τριών αρθρώσεων σε ισοστατικό (βλ. Σχ. 2.1-3(β1)) και εν συνεχεία να προσθέσουμε σ' αυτό ως δεύτερο όροφο το επίσης ισοστατικό τριαρθρωτό πλαίσιο 6-10-11-7, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1-3(β2). Ακολούθως προσθέτουμε αριστερά και δεξιά τις δύο "ορθογωνικής γεωμετρίας" αμφιέριστες δοκούς 1-5-6 και 7-8-4 (βλ. Σχ. 2.1-3(β3)) και επ' αυτών, τέλος, τα τριαρθρωτά ημιπλάσια 5-9-10 και 11-12-8 (βλ. Σχ. 2.1-3(β4)). Συνολικά έχουμε εισάγει έτσι 16 απλές καμπτικές αρθρώσεις και 2 κυλίσεις ('καμπτικές-διατμητικές αρθρώσεις' στους πόδες των στύλων 1-5 και 4-8), στις οποίες προσάγονται οι 18 στατικές υπεράριθμες X_n (16 ροπές και 2 οριζόντιες αντιδράσεις) που απεικονίζονται στο σχήμα 2.1-3(β5).

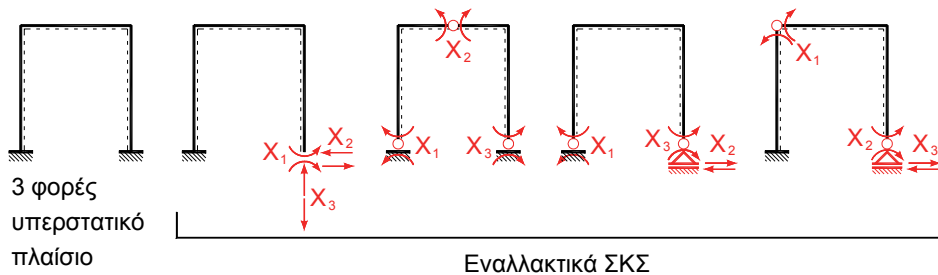


Σχ. 2.1-3 Καθορισμός του ΣΚΣ με τη διαδικασία της σταδιακής οικοδόμησης

Είναι βέβαια σαφές ότι κατά τη σταδιακή οικοδόμηση θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν διαφορετικοί ισοστατικοί φορείς ή ακόμη και να ακολουθηθεί διαφορετική πορεία οικοδόμησης. Π.χ., αντί των "ορθογωνικής γεωμετρίας" αμφιερείστων δοκών μπορούν να προστεθούν εκατέρωθεν του μεσαίου κάτω πλαισίου τα τριαρθρωτά ημιπλαίσια 1-5-6 και 7-8-4, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1-3(β6), και εν συνεχεία να προστεθούν επ' αυτών τα επίσης τριαρθρωτά ημιπλαίσια 5-9-10 και 11-12-8, όπως και προηγουμένως. Εισάγονται έτσι συνολικώς 16 καμπτικές αρθρώσεις για το $N=18$ φορές υπερστατικό πλαίσιο. Στην περίπτωση αυτή πρέπει να προσεχθεί ότι οι αρθρώσεις στους κόμβους 5 και 8 είναι διπλές αρθρώσεις και ότι επομένως η προσαγωγή των υπεραριθμών σ' αυτές θα πρέπει να γίνει με τον τρόπο που φαίνεται στο σχήμα 2.1-3(β7).

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, το ΣΚΣ ενός δεδομένου υπερστατικού φορέα δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένο. Διότι ως ΣΚΣ ενός δεδομένου φορέα μπορεί να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε παράγωγος φορέας, αρκεί αυτός να είναι ισοστατικός, χωρίς να τίθεται άλλος περιορισμός όσον αφορά στις θέσεις και στο είδος των καταλυόμενων συνδέσμων.

Έτσι, π.χ., για το τρεις φορές υπερστατικό ορθογωνικό πλαίσιο του σχήματος 2.1-4 μπορούν να καθοριστούν άπειρα διαφορετικά ΣΚΣ. Στο σχήμα 2.1-4 απεικονίζονται μερικά μόνον από αυτά.



Σχ. 2.1-4 Διάφορα ΣΚΣ για επίλυση ενός υπερστατικού πλαισίου με τη ΜΔ

Γενικώς, οποιοσδήποτε ισοστατικός φορέας που προκύπτει από το δεδομένο τριπλά υπερστατικό πλαίσιο με κατάλυση τριών συνδέσμων είναι αποδεκτός ως ΣΚΣ υπό μία προϋπόθεση: η κατάλυση συνδέσμων να μην οδηγεί σε χαλαρό (κινηματικό) φορέα.

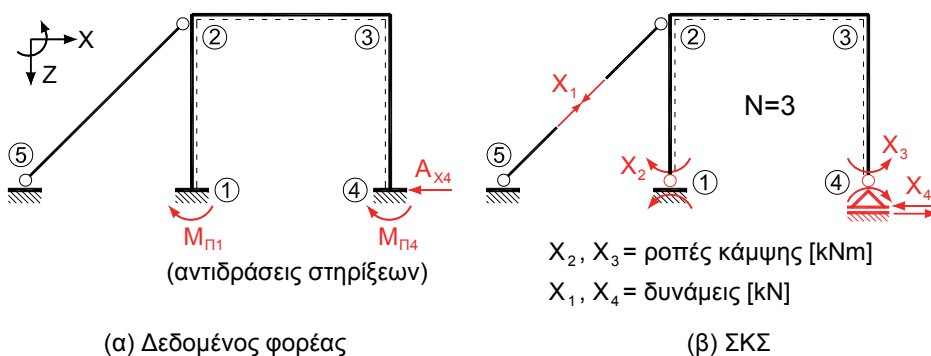
Σημείωση:

Σε αντίθεση με το ΣΚΣ, το ΓΚΣ ενός φορέα (χωρίς την περιοριστική παραδοχή της ατένειας) μπορεί να καθορίζεται πάντοτε μονοσήμαντα (βλ. παράγρ. 3.1-2-Ε). Το γεγονός αυτό συνιστά ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της ΜΜ έναντι της ΜΔ, διότι διευκολύνει την τυποποίηση και τον προγραμματισμό της σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Β. Τα υπεράριθμα μεγέθη και ο συμβολισμός τους

Το πλήθος N των συνδέσμων, δηλαδή των δορμικών και στροφικών δεσμικών ράβδων που καταλύθηκαν προκειμένου να προκύψει το ΣΚΣ του δεδομένου φορέα, ισούται με το πλήθος των υπεραρίθμων στατικών μεγεθών (δυνάμεων ή/και ροπών), δηλαδή με το πλήθος των αγνώστων μεγεθών της ΜΔ.

Τα υπεράριθμα μεγέθη της ΜΔ είναι εντασιακά μεγέθη, δηλαδή δυνάμεις (αντιδράσεις στηρίξεων, τέμνουσες και αξονικές δυνάμεις) ή/και ροπές (ροπές πακτώσεων, ροπές κάμψης και σε χωρικούς φορείς ροπές στρέψης). Πρόκειται επομένως στη γενική περίπτωση για διαφορετικά φυσικά μεγέθη που μετριοούνται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης ($[kN]$ ή $[kNm]$). Εντούτοις, για τη συστηματική παρουσίαση της διαδικασίας επίλυσης είναι εύλογο και βολικό τα μεγέθη αυτά να χαρακτηρίζονται με το ίδιο σύμβολο. Εδώ χρησιμοποιούμε το (παραδοσιακά καθιερωμένο) σύμβολο X_n , όπου ο δείκτης n ($=1,2,3,\dots,N$) είναι ο αριθμός του υπεράριθμου μεγέθους. Έτσι, στο παράδειγμα του σχήματος 2.1-5 το υπεράριθμο μέγεθος X_1 είναι η αξονική δύναμη της ράβδου 5-2, τα υπεράριθμα μεγέθη X_2 και X_3 είναι οι (εσωτερικές) ροπές κάμψης στους πόδες των δύο στύλων και το τέταρτο υπεράριθμο μέγεθος X_4 είναι η οριζόντια αντίδραση στη δεξιά στήριξη.



Σχ. 2.1-5 Ενιαίος συμβολισμός υπεραρίθμων δυνάμεων και ροπών

Ιδιαίτερα τονίζεται ότι *κατάλυση* ενός συνδέσμου σημαίνει *τομή* της αντίστοιχης δεσμικής ράβδου και όχι *αφαίρεσή* της. Επομένως, τα υπεράριθμα μεγέθη εισάγονται ως *ζεύγη* στις δύο όψεις του καταλυθέντος συνδέσμου. Στην περίπτωση του πλαισίου του σχήματος 2.1-5, η υπεράριθμη X_1 είναι η αξονική δύναμη N_{52} της ράβδου 5-2, η υπεράριθμη X_2 είναι η ροπή κάμψης M_{12} στο κάτω άκρο του στύλου 1-2 (ισούται με την ροπή πάκτωσης $M_{π1}$), η υπεράριθμη X_3 είναι η ροπή κάμψης M_{34} στο κάτω άκρο του στύλου 3-4 (ισούται με την αρνητική ροπή πάκτωσης $-M_{π4}$) και η υπεράριθμη X_4 είναι η τέμνουσα στο κάτω άκρο του στύλου 3-4 (ισούται με την οριζόντια αντίδραση στον κόμβο 4). Στην περίπτωση που το υπεράριθμο μέγεθος αντιστοιχεί σε αντίδραση στήριξης/πάκτωσης, το σκέλος που δρα επί του

εδάφους μπορεί να παραλειφθεί (εδώ: το 'κάτω' σκέλος των X_2 , X_3 και X_4), αφού δεν επηρεάζει την ένταση του φορέα.

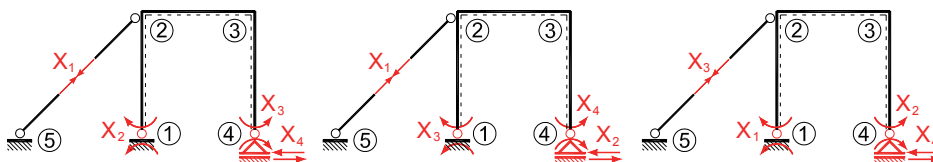
Όσον αφορά στον καθορισμό της φοράς με την οποία εισάγονται τα υπεράριθμα μεγέθη, αυτός επί της ουσίας επαφίεται στη διακριτική ευχέρεια του μελετητή. Στο παράδειγμά μας η X_1 εισήχθη με τη συμβατικά θετική φορά της αξονικής δύναμης, οι X_2 και X_3 με τη συμβατικά (βάσει ίνας αναφοράς) θετική φορά των ροπών κάμψης και η X_4 με τη συμβατικά θετική φορά των τεμνουσών δυνάμεων. Επομένως ισχύουν οι εξής ισότητες: $X_1 = N_{52}$, $X_2 = M_{12}$, $X_3 = M_{43}$ και $X_4 = Q_{43}$. Πάντως, η φορά των υπεραρίθμων θα μπορούσε να είχε επιλεγεί και διαφορετικά, χωρίς αυτό να έχει επίπτωση στα αποτελέσματα. Γενικώς όμως ενδείκνυται για *πρακτικούς λόγους* η επιλογή της φοράς των υπεραρίθμων σύμφωνα με τον συμβατικά θετικό ορισμό των εσωτερικών εντασιακών μεγεθών στις διατομές κατάλυσης των συνδέσμων, διότι μόνο έτσι οι προκύπτουσες τιμές των υπεραρίθμων συμπίπτουν ως προς το πρόσημό τους με τις τιμές των φορτίων διατομής στις εν λόγω διατομές.

Διευκρίνιση σχετικά με την ορολογία:

Όταν αναφερόμαστε γενικώς στα υπεράριθμα εντασιακά μεγέθη, τα χαρακτηρίζουμε συχνά ως "υπεράριθμες δυνάμεις", ασχέτως αν αυτά είναι ενδεχομένως ροπές. Δηλαδή, χρησιμοποιούμε τη λέξη "δύναμη" ως γενικό όρο που μπορεί να περιλαμβάνει τόσο δυνάμεις όσο και ροπές κάθε είδους. Με το ίδιο σκεπτικό χρησιμοποιούμε και τον όρο "υπεράριθμη ένταση".

Γ. Η σειρά αρίθμησης των υπεραρίθμων μεγεθών

Η σειρά αρίθμησης των αγνώστων (υπεραρίθμων) μεγεθών έντασης είναι προφανώς στη διακριτική ευχέρεια του μελετητή. Έτσι, για το πλαίσιο του σχήματος 2.1-5 δίνονται στο σχήμα 2.1-6 τρεις διαφορετικές αριθμήσεις των υπεραρίθμων μεγεθών, οι οποίες όλες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή του με τη ΜΔ.



Σχ. 2.1-6 Φορέας και ΓΚΣ με διαφορετική αρίθμηση των υπεραρίθμων μεγεθών

Από το σχήμα 2.1-6 γίνεται καταρχάς σαφές ότι η αρίθμηση των αγνώστων μεγεθών κατά κανόνα δεν συμπίπτει - και δεν μπορεί άλλωστε πάντοτε να συμπίπτει - με την αρίθμηση των κόμβων του φορέα. Επομένως, δεν πρέπει να συγχέονται οι αριθμοί των κόμβων του φορέα με τους αριθμούς των υπεραρίθμων μεγεθών έντασης.

Επίσης, είναι αυτονόητο ότι η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μεγεθών έχει τυπικό (συμβατικό) χαρακτήρα και ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της επίλυσης, τα οποία αναφέρονται στο πραγματικό, φυσικό φαινόμενο της επιπόνησης του φορέα.

Εντούτοις, όπως θα διευκρινιστεί στην παρακάτω υποπαράγραφο Ε, η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μεγεθών επηρεάζει τη *δομή* των επιλυουσών εξισώσεων (ακριβέστερα: τη δομή του μητρώου ενδοσιμότητας) και κατά συνέπεια τον όγκο των αριθμητικών πράξεων που απαιτούνται για την επίλυσή τους. Η σειρά αρίθμησης μπορεί επομένως να διευκολύνει ή να δυσχεράνει τη διαδικασία επίλυσης, χωρίς όμως αυτό να επηρεάζει τις αριθμητικές τιμές των αποτελεσμάτων.

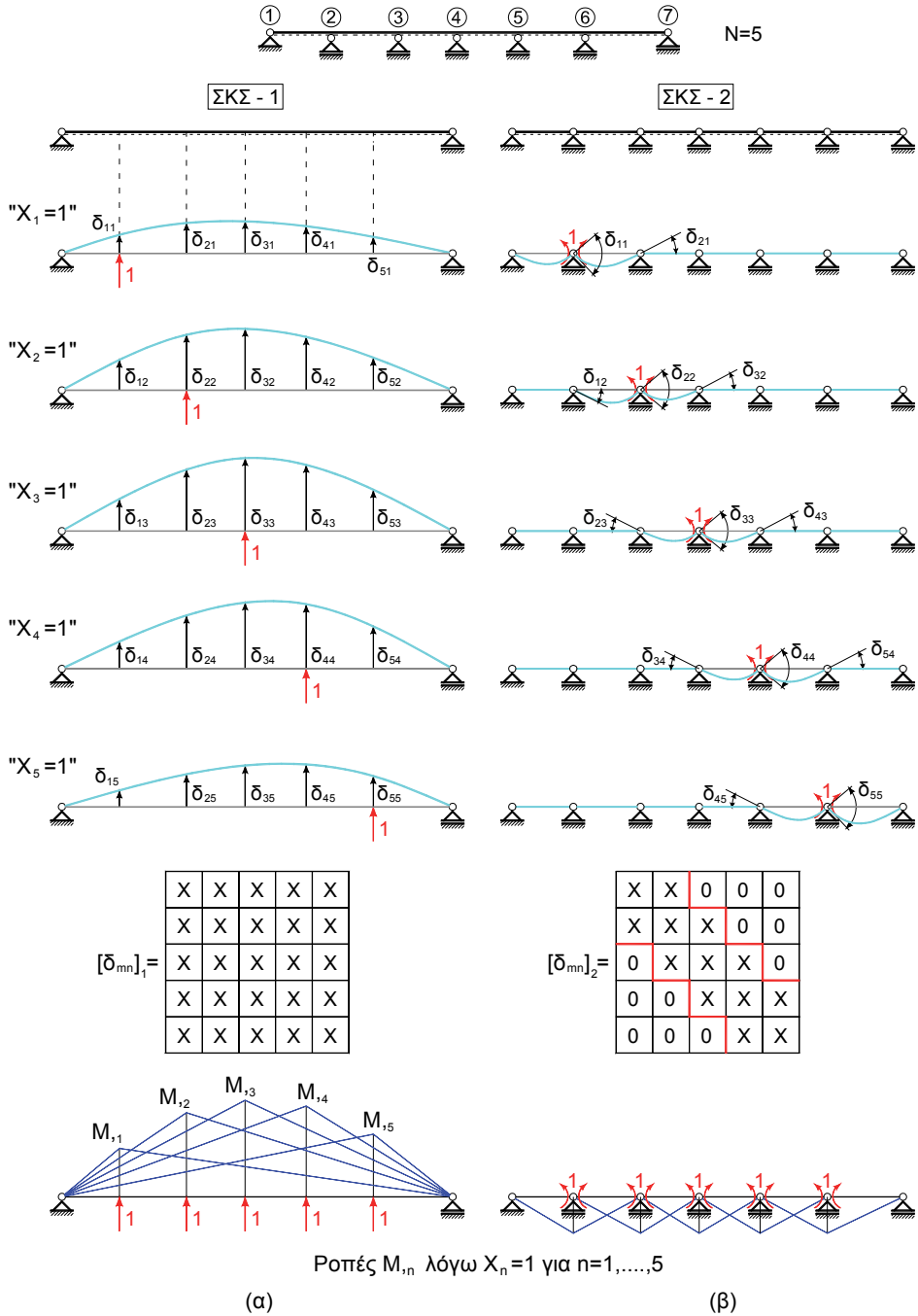
Δ. Η προσφορότερη επιλογή του ΣΚΣ

Επειδή η μείωση των απαιτούμενων για την επίλυση ενός φορέα αριθμητικών πράξεων αποτελεί πάντα ζητούμενο, ιδιαίτερα όταν η επίλυση γίνεται "χειρωνακτικά", ως καταλληλότερη επιλογή του ΣΚΣ μπορεί να θεωρηθεί καταρχάς εκείνη που *ελαχιστοποιεί την αλληλεπίδραση μεταξύ των υπεραρίθμων μεγεθών*. Έτσι, π.χ., για την πέντε φορές υπερστατική δοκό του σχήματος 2.1-7 το ΣΚΣ-1 οδηγεί σε ένα πλήρες μητρώο ενδοσιμότητας, αφού τα διαγράμματα ροπών $M_{,n}$ και $M_{,m}$ δύο οποιωνδήποτε καταστάσεων " $X_n=1$ " και " $X_m=1$ " ($m \neq n$) έχουν επικαλύψεις και επομένως τα ολοκληρώματα

$$\delta_{mn} = \frac{1}{EI} \cdot \int (M_{,m} \cdot M_{,n}) dx$$

είναι όλα μη μηδενικά. Αντίθετα, με χρήση του ΣΚΣ-2 μηδενίζονται οι συντελεστές δ_{13} , δ_{14} , δ_{15} , δ_{24} , δ_{25} , δ_{35} και οι συμμετρικοί τους, αφού για τις μοναδιαίες καταστάσεις που υποδηλώνουν οι δείκτες των συντελεστών αυτών δεν υπάρχει επικάλυψη των διαγραμμάτων ροπών.

Είναι επίσης επιθυμητό, οι περιοχές στις οποίες επικαλύπτονται μεταξύ τους τα διαγράμματα των εντασιακών μεγεθών των καταστάσεων "0" και " $X_n=1$ " ($n=1, \dots, N$) να είναι όσο το δυνατόν πιο περιορισμένες. Στο παράδειγμα μας ο υπολογισμός των δ_{mn} για το ΣΚΣ-1 είναι δυσχερέστερος από τον υπολογισμό των αντίστοιχων (μη μηδενικών) δ_{mn} για το ΣΚΣ-2, όπως εύκολα γίνεται αντιληπτό από την έκταση των διαγραμμάτων ροπών $M_{,n}$ των αντίστοιχων μοναδιαίων καταστάσεων " $X_n=1$ ". Πράγματι, στην περίπτωση του ΣΚΣ-1 τα διαγράμματα $M_{,n}$ επικαλύπτονται σε πολύ μεγαλύτερη έκταση σε σχέση με τα διαγράμματα $M_{,n}$ στην περίπτωση του ΣΚΣ-2, οπότε ο υπολογισμός των συντελεστών ενδοσιμότητας, δηλαδή των παραπάνω ολοκληρωμάτων, καθίσταται δυσχερέστερος.



Σχ. 2.1-7 Επίδραση της επιλογής του $\Sigma K\Sigma$ στη δομή του μητρώου ενδοσιμότητας - Υπεράριθμα μεγέθη X_n , ελαστικές γραμμές $w_{,n}$ με τεταγμένες δ_{mn} και διαγράμματα ροπών $M_{,n}$ στις πέντε μοναδιαίες καταστάσεις $X_n=1$ ($n=1, \dots, 5$)

Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι σε αντίθεση με το ΣΚΣ-1 που προέκυψε με αφαίρεση πέντε δεσμικών ράβδων στήριξης (δηλαδή με *αποδόμηση* του υπερστατικού φορέα), το προτιμητέο ΣΚΣ-2 μπορεί να θεωρηθεί ότι προέκυψε με *σταδιακή οικοδόμηση* της δεδομένης υπερστατικής δοκού χρησιμοποιώντας έξι αμφιέριστες δοκούς εν σειρά. Βλέπουμε δηλαδή στο απλό αυτό παράδειγμα ότι - όπως σημειώθηκε και στην παραπάνω υποπαράγραφο Α - ο καθορισμός του ΣΚΣ γίνεται γενικώς αποτελεσματικότερα με τη σταδιακή του οικοδόμηση παρά με τη σταδιακή του αποδόμηση.

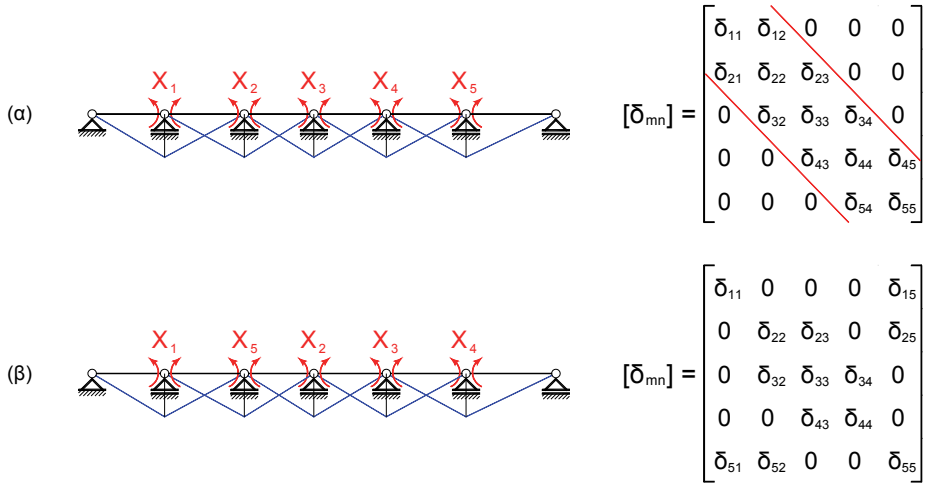
Τέλος, επιθυμητό είναι ένα ΣΚΣ στο οποίο η ένταση που αναπτύσσεται στις καταστάσεις "0" και " $X_n=1$ " ($n=1, \dots, N$) να μπορεί να υπολογίζεται όσο το δυνατόν πιο εύκολα. Και ως προς αυτήν την απαίτηση το ΣΚΣ-2 του παραδείγματός μας υπερέχει (αν και όχι πάρα πολύ) του ΣΚΣ-1: Στο ΣΚΣ-2 η ροπή στην κορυφή κάθε διαγράμματος είναι για όλες τις καταστάσεις ίση με τη μονάδα, ενώ στο ΣΚΣ-1 πρέπει να υπολογίζεται κάθε φορά εκ νέου. Γενικότερα, κατά τη σταδιακή οικοδόμηση ενός ΣΚΣ θα πρέπει να προτιμούνται οι αμφιέριστες δοκοί και οι πρόβολοι, ενώ καλό είναι να αποφεύγονται (κατά το δυνατόν) τριαρθρωτά τμήματα.

Από όλα τα παραπάνω βλέπουμε ότι η "έξυπνη" επιλογή του ΣΚΣ, εδώ του ΣΚΣ-2, μας απαλλάσσει από αρκετές αριθμητικές πράξεις. Δυστυχώς, μια τέτοια "έξυπνη" επιλογή στατικών κυρίων συστημάτων δεν μπορεί να τυποποιηθεί εύκολα με γενικευμένο τρόπο, έτσι ώστε να ισχύει για οποιονδήποτε φορέα. Για τον λόγο αυτόν η κωδικοποίηση και ο προγραμματισμός της ΜΔ - προκειμένου η εφαρμογή της να γίνει με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή - εμφανίζει δυσχέρειες, οι οποίες - μαζί με ορισμένα ακόμη μειονεκτήματα της ΜΔ - οδήγησαν τελικά σήμερα στη σχεδόν αποκλειστική χρήση της προσφορότερης προγραμματιστικά ΜΜ ως βάσης των σύγχρονων μεθόδων υπολογισμού κατασκευών.

Ε. Η προσφορότερη αρίθμηση των υπεραρίθμων μεγεθών

Εκτός όμως από την "έξυπνη" επιλογή του ΣΚΣ χρειάζεται και "έξυπνη" αρίθμηση των υπεραρίθμων μεγεθών προκειμένου να μειωθεί ο υπολογιστικός όγκος κατά την επίλυση του συστήματος εξισώσεων της ΜΔ.

Έτσι, για το ιδιαίτερα χαρακτηριστικό παράδειγμά μας της συνεχούς δοκού έξι ανοιγμάτων η αρίθμηση του σχήματος 2.1-8(α) οδηγεί - όπως είδαμε και προηγουμένως - σε ένα μητρώο ενδοσιμότητας ταινιοειδούς μορφής, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι συγκεντρωμένοι σε μία "ταινία" περί την κύρια διαγώνιο του μητρώου, ενώ οι εκτός "ταινίας" συντελεστές είναι μηδενικοί.



Σχ. 2.1-8 Επίδραση της αρίθμησης των υπεραρίθμων μεγεθών στη δομή του μητρώου ενδοσιμότητας - Υπεράριθμα μεγέθη X_n και διαγράμματα ροπών $M_{,n}$ στις πέντε μοναδιαίες καταστάσεις $X_n=1$

Η ταινιοειδής μορφή του μητρώου ενδοσιμότητας, αν και είναι πάντα επιθυμητή αφού συνεπάγεται μείωση των αριθμητικών πράξεων κατά την επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων, δεν επιτυγχάνεται 'αυτομάτως'. Αντίθετα, προϋποθέτει ότι η αρίθμηση των υπεραρίθμων μεγεθών θα γίνει με δόκιμο τρόπο. Έτσι, αν για το παράδειγμά μας χρησιμοποιήσουμε την αδόκιμη αρίθμηση του σχήματος 2.1-8(β), οδηγούμαστε σε ένα μητρώο ενδοσιμότητας, στο οποίο διάφοροι μη μηδενικοί συντελεστές ενδοσιμότητας καταλαμβάνουν θέσεις μακριά από την κύρια διαγώνιο. Είναι σαφές ότι στη δεύτερη αυτή περίπτωση η αριθμητική επίλυση των γραμμικών εξισώσεων απαιτεί περισσότερες αριθμητικές πράξεις από εκείνες που απαιτούνται στην πρώτη.

ΣΤ. Οι παραμορφώσεις στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων

Σύμφωνα με την αρχή της αποδέσμευσης (βλ. [Αβρ-Ι], παράγρ. 3.2.5-Γ), που είναι μία εκ των δύο αρχών στις οποίες στηρίζεται η ΜΔ (βλ. παράγρ. 1.1), η εντασιακή κατάσταση ενός δομικού φορέα δεν μεταβάλλεται λόγω κατάλυσης ενός συνδέσμου, αν στη θέση του καταλυόμενου συνδέσμου προσαχθεί το αντίστοιχο εντασιακό μέγεθος. Έτσι, η ένταση ενός δεδομένου, N φορές υπερστατικού φορέα υπό δεδομένη φόρτιση δεν επηρεάζεται, αν σε ένα παράγωγο ΣΚΣ υπό την ίδια φόρτιση προσαχθούν ταυτόχρονα στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων τα αντίστοιχα (δηλαδή τα *εργικώς ανταποκρινόμενα*) υπεράριθμα εντασιακά μεγέθη X_n ($n=1, \dots, N$).

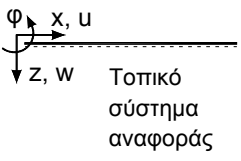
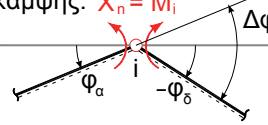
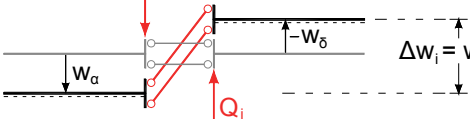
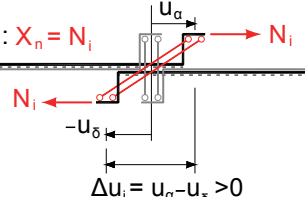
Οι σύνδεσμοι όμως, εκτός από την ιδιότητα να μεταβιβάζουν εντασιακά μεγέθη, έχουν και την ιδιότητα να απαγορεύουν τις αντίστοιχες (δηλαδή τις *εργικά ανταποκρινόμενες*) μετακινήσεις. Επομένως, η ισοτιμία του ΣΚΣ με τον αρχικό υπερστατικό φορέα εξασφαλίζεται με τον προαναφερθέντα τρόπο από εντασιακής (στατικής) πλευράς, όχι όμως και από κινηματικής (γεωμετρικής), αφού στις θέσεις των καταλυθέντων συνδέσμων μπορούν να εμφανιστούν εκείνες ακριβώς οι μετακινήσεις που απαγόρευαν αυτοί πριν την κατάλυσή τους. Έτσι, π.χ., στο ΣΚΣ της συνεχούς δοκού του σχήματος 2.1-7(β) μπορούν να εμφανιστούν στις θέσεις των εισαχθεισών αρθρώσεων, δηλαδή στα σημεία κατάλυσης του εσωτερικού συνδέσμου μεταβίβασης της καμπτικής ροπής, διαφορές στρωφών (= γόνατα στην ελαστική γραμμή).

Επισημαίνεται ότι η παραμόρφωση που εμφανίζεται στον καταλυθέντα σύνδεσμο n είναι η παραμόρφωση που *αντιστοιχεί (ανταποκρίνεται)* *εργικά* στο μηδενιζόμενο εντασιακό μέγεθος X_n . Επομένως, όταν πρόκειται για *εσωτερικά* εντασιακά μεγέθη (φορτία διατομής), τα οποία όπως γνωρίζουμε εμφανίζονται πάντα ως *ζεύγη* δύο συνιστωσών δυνάμεων, οι *εργικώς* ανταποκρινόμενες παραμορφώσεις στη διατομή i είναι *διαφορές* (= αθροίσματα απόλυτων τιμών) μετακινήσεων (βλ. Σχ. 2.1-9):

- η κατάλυση του εσωτερικού συνδέσμου n που μεταβιβάζει τη ροπή κάμψης $M_i = X_n$ στη διατομή i (δηλ. η εισαγωγή μιας καμπτικής άρθρωσης στο σημείο i) συνεπάγεται τη δυνατότητα εμφάνισης ενός **γονάτου** $\delta_{n,r} = \Delta\varphi_{i,r} = \varphi_a - \varphi_b$ στην ελαστική γραμμή,
- η κατάλυση του εσωτερικού συνδέσμου που μεταβιβάζει την τέμνουσα δύναμη $Q_i = X_n$ στη διατομή i (δηλ. η εισαγωγή μιας διατμητικής άρθρωσης στο σημείο i) συνεπάγεται τη δυνατότητα εμφάνισης ενός **άλματος** $\delta_{n,r} = \Delta w_{i,r} = w_a - w_b$ στην ελαστική γραμμή, και
- η κατάλυση του εσωτερικού συνδέσμου που μεταβιβάζει την αξονική δύναμη $N_i = X_n$ στη διατομή i (δηλ. η εισαγωγή μιας αξονικής άρθρωσης στο σημείο i) συνεπάγεται τη δυνατότητα εμφάνισης ενός **χάσματος** $\delta_{n,r} = \Delta u_{i,r} = u_a - u_b$ στην ελαστική γραμμή.

Οι δείκτες a και b συμβολίζουν τα μεγέθη αριστερά και δεξιά της διατομής i αντιστοίχως, ενώ ο δεύτερος δείκτης r συμβολίζει το εκάστοτε αίτιο. (Υπενθυμίζεται ότι αριθμός n του υπεράριθμου μεγέθους X_n δεν συμπίπτει γενικώς με τον αριθμό i του σημείου του φορέα, στο οποίο εισάγεται το X_n .) Επισημαίνεται ότι σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς οι διαφορές μετακινήσεων $\delta_{n,r}$ είναι θετικές όταν έχουν την ίδια φορά με τα δύο σκέλη ($X_{n-αριστ}$ και $X_{n-δεξιά}$) του εκάστοτε υπεράριθμου εντασιακού ζεύγους X_n εκατέρωθεν της εισαχθείσας άρθρωσης i .

Ενδέχεται, βέβαια, κατά τον καθορισμό του ΣΚΣ να καταλυθούν στο ίδιο σημείο του φορέα όχι μόνον μία, αλλά δύο ή και τρεις δεσμικές ράβδοι ταυτόχρονα. Στην περίπτωση αυτή δημιουργείται η δυνατότητα ταυτόχρονης εμφάνισης των αντίστοιχων δύο ή τριών εργικών ανταποκρινόμενων παραμορφώσεων.

Καταλυόμενος εσωτερικός σύνδεσμος:	 αριστερή όχθη α δεξιά όχθη δ Σημείο κατάλυσης εσωτερικού συνδέσμου και εισαγωγής υπεράριθμης X_n
σύνδεσμος μεταβίβασης ροπών ⇒ καμπτική άρθρωση	Υπεράριθμη ροπή κάμψης: $X_n = M_i$  Συνθήκη συμβιβαστού: $\Delta\varphi_i = 0$
σύνδεσμος μεταβίβασης τέμνουσων δυνάμεων ⇒ διατμητική άρθρωση	Υπεράριθμη τέμνουσα δύναμη: $X_n = Q_i$  Συνθήκη συμβιβαστού: $\Delta w_i = 0$
σύνδεσμος μεταβίβασης αξονικών δυνάμεων ⇒ αξονική άρθρωση	Υπεράριθμη αξονική δύναμη: $X_n = N_i$  Συνθήκη συμβιβαστού: $\Delta u_i = 0$

Σχ. 2.1-9 Εισαγωγή υπεράριθμης X_n με κατάλυση εσωτερικών συνδέσμων στη διατομή i και εργικά ανταποκρινόμενες θετικές διαφορές μετακινήσεων

Τα παραπάνω ισχύουν και στην περίπτωση που ως υπεράριθμο μέγεθος X_n εισάγεται μία αντίδραση (δύναμη ή ροπή) στήριξης, όταν δηλαδή καταλύονται *εξωτερικές* δεσμικές ράβδοι στήριξης του φορέα στο στερεό υπόβαθρο (Σχ. 2.1-10). Η μόνη διαφορά συνίσταται στο γεγονός ότι στην περίπτωση αυτή το ένα εκ των δύο σκελών ($X_{n-αριστ}$ ή $X_{n-δεξιά}$) του υπεράριθμου μεγέθους X_n ενεργεί στο στερεό υπόβαθρο (έδαφος θεμελίωσης), π.χ. έστω η $X_{n-αριστ}$. Εφόσον η στήριξη i είναι

ακλόνητη (μη ενδόσιμη), τότε η εδαφική συνιστώσα $X_{n-αριστ}$ δεν προκαλεί καμία παραμόρφωση και η αναπτυσσόμενη παραμόρφωση είναι απόλυτη (δηλαδή όχι διαφορά παραμορφώσεων) και ίση με την μετακίνηση του σημείου στο οποίο ενεργεί η $X_{n-δεξιά}$ ως απλή δύναμη ή ροπή. Π.χ., αν η υπεράριθμη X_n είναι η οριζόντια αντίδραση A_{xi} της στήριξης I (βλ. Σχ. 2.1-10 κάτω), τότε $u_{i-αριστ} = 0$ και επομένως $\delta_{n,r} = \Delta u_{i,r} = u_{i-αριστ} - u_{i-δεξιά} = -u_{i-δεξιά} = u_i$. Στο σχήμα 2.1-10 περιγράφονται και οι περιπτώσεις κατάλυσης μιας στροφικής και μιας κατακόρυφης δρομικής δεσμικής ράβδου στήριξης.

Καταλυόμενος εξωτερικός σύνδεσμος:	Φ, X, u Z, w Πάκτωση / Στήριξη / Κύλιση	Συνθήκη συμβιβαστού
Στροφική δεσμική ράβδος	Πάκτωση i Υπεράριθμη ροπή πάκτωσης: $X_n = M_{\pi i}$ $\Delta \phi_i = -\phi_i > 0$ $-\phi_i > 0$	$\Delta \phi_i = 0$
Κατακόρυφη δρομική δεσμική ράβδος	Κατακόρυφη στήριξη i Υπεράριθμη αντίδραση στήριξης: $X_n = A_{zi}$ $-w_i > 0$ $\Delta w_i = -w_i > 0$	$\Delta w_i = 0$
Οριζόντια δρομική δεσμική ράβδος	Οριζόντια στήριξη i Υπεράριθμη αντίδραση στήριξης: $X_n = A_{xi}$ $u_i > 0$ $\Delta u_i = u_i > 0$	$\Delta u_i = 0$

Σχ. 2.1-10 Εισαγωγή υπεράριθμης X_n με κατάλυση εξωτερικών συνδέσμων στη στήριξη/πάκτωση i και εργικά ανταποκρινόμενες θετικές μετακινήσεις



Πολυώροφα κτίρια από οπλισμένο σκυρόδεμα (Θεσσαλονίκη)

3

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΕΩΝ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται και αναπτύσσεται διεξοδικά η Μέθοδος Μετακινήσεων (MM) στην κλασική της μορφή, που είναι κατάλληλη για υπολογισμούς "με το χέρι". Η παρουσίαση γίνεται για λόγους απλούστευσης με τη βοήθεια επίπεδων γραμμικών φορέων, χωρίς όμως αυτό να περιορίζει τη γενικότητα της μεθοδολογίας.

Όπως ήδη αναφέρθηκε στην παράγραφο 1.6 και τονίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου 2, στη σημερινή πράξη του δομοστατικού μελετητή εφαρμόζεται για την ανάλυση των κατασκευών σχεδόν αποκλειστικά η Μέθοδος Στιβαρότητας. Η μέθοδος αυτή έχει κοινό θεωρητικό υπόβαθρο με την κλασική MM, ακολουθεί όμως τη γενικότερη λογική της Μεθόδου των Πεπερασμένων Στοιχείων, η οποία επιτρέπει την εύκολη κωδικοποίησή της προς χρήση σε ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Μία από τις προϋποθέσεις για την κατανόηση και ευχερέστερη εκμάθηση της σύγχρονης αυτής μεθόδου ανάλυσης αποτελεί η βαθύτερη κατανόηση της κλασικής MM. Επίσης, η ενασχόληση με την κλασική MM βοηθάει στην ανάπτυξη μιας καλύτερης αντίληψης και αίσθησης για τις παραμορφώσεις που υφίσταται ένας φορέας, επιταχύνοντας έτσι την ανάπτυξη του σημαντικότερου για κάθε δομοστατικό μηχανικό "στατικού αισθητηρίου".

Στην παράγραφο 3.1 γίνεται συστηματική αναφορά στις παραδοχές βάσει των οποίων καθορίζεται το πλήθος των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών και το ΓΚΣ, διευκρινίζεται η νέα σύμβαση θετικών προσήμων που χρησιμοποιείται (για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί πιο κάτω) στη MM και παρουσιάζονται οι τρόποι υπολογισμού της εντασιακής κατάστασης των βασικών στοιχείων, από τα οποία συντίθεται το ΓΚΣ.

Στην παράγραφο 3.2 αναπτύσσεται με τη βοήθεια ενός σχετικά απλού παραδείγματος η γενική διαδικασία επίλυσης φορέων πεπερασμένης δυστένειας (EA=πεπερ.) με τη MM, δηλαδή χωρίς την απλοποιητική παραδοχή της ατένειας των δομικών στοιχείων. Στην υποπαράγραφο 3.2.6 παρουσιάζονται τρόποι ελέγχου της ορθότητας των αποτελεσμάτων, που προέκυψαν από επιλύσεις με τη MM. Όπως ήδη τονίστηκε στο κεφάλαιο 1, οι έλεγχοι των αποτελεσμάτων αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα της διαδικασίας επίλυσης. Η γνώση τρόπων και τεχνικών ελέγχου των αποτελεσμάτων και η απόκτηση σχετικής εμπειρίας είναι σήμερα ιδιαίτερα σημαντική στην πράξη, όπου τα αποτελέσματα προκύπτουν από αυτοματοποιημένες και κατά το μάλλον ή ήττον αδιαφανείς επιλύσεις με ηλεκτρονικό υπολογιστή. Η παράγραφος 3.2 ολοκληρώνεται με τον σχολιασμό της επιρροής της πεπερασμένης δυστημσίας GA_s και δυστένειας EA επί των αποτελεσμάτων της επίλυσης.

Στην παράγραφο 3.3 αναπτύσσεται συστηματικά και αναλυτικά η - από διδακτικής πλευράς εξαιρετικά χρήσιμη - εφαρμογή της MM σε ατενείς φορείς ($EA \rightarrow \infty$). Παρουσιάζονται επίσης ο τρόπος συμπερίληψης στους υπολογισμούς σημειακών ελαστικών στηρίξεων και ελαστικών πακτώσεων (υποπαράγρ. 3.3.8)

καθώς και ο τρόπος αντιμετώπισης ατενών φορέων με μεμονωμένα στοιχεία πεπερασμένης δυστένειας (υποπαράγρ. 3.3.9). Η παράγραφος 3.3 κολοκληρώνεται με μια προσεγγιστική εκτίμηση της επιρροής των διατμητικών και αξονικών παραμορφώσεων (υποπαράγρ. 3.3.10) και με μια σύνοψη των βημάτων που ακολουθεί η επίλυση ατενών φορέων (υποπαράγρ. 3.3.11).

Προς εμπέδωση της διαδικασίας υπολογισμών ακολουθεί στην παράγραφο 3.4 η αριθμητική επίλυση τεσσάρων σχετικά απλών πλαισιακών φορέων για διάφορες εξωτερικές φορτίσεις και καταναγκασμούς. Μια μεγαλύτερη σειρά απλών αλλά και συνθετότερων αριθμητικών παραδειγμάτων περιέχονται στον τόμο ΙΙβ του παρόντος συγγράμματος ([Αβρ-ΙΙβ]).

Στην παράγραφο 3.5 εξετάζονται διάφορες εξειδικευμένες τεχνικές, με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να επιτευχθεί σημαντική εξοικονόμηση υπεραρίθμων μεγεθών. Οι τεχνικές αυτές περιλαμβάνουν (α) τη χρησιμοποίηση ομάδων μετακινήσεων (αντί μεμονωμένων μετακινήσεων) ως υπεραρίθμων γεωμετρικών μεγεθών, (β) τη χρήση ΓΚΣ που είναι γεωμετρικά αόριστο (δηλαδή, δεν αποτελείται αποκλειστικά από βασικά στοιχεία), (γ) τρόπους κατάλληλης αξιοποίησης της συμμετρίας των φορέων, και (δ) τη συνδυασμένη χρήση ΜΔ και ΜΜ.

Οι επόμενες παράγραφοι 3.6, 3.7 και 3.8 αφορούν στον υπολογισμό ελαστικών γραμμών και γραμμών επιρροής στα πλαίσια επιλύσεων φορέων με τη ΜΜ.

Τέλος, στην παράγραφο 3.9 δίνεται η μητρική διατύπωση των επιλυουσών εξισώσεων των δύο κλασικών μεθόδων ανάλυσης και γίνεται ένας γενικευμένης μορφής παραλληλισμός τους, που αναδεικνύει πληρέστερα τον δυαδικό τους χαρακτήρα.

3.1 Παραδοχές, σύμβαση προσήμων και βοηθητικοί πίνακες της ΜΜ

3.1.1 Τα υπεράριθμα μεγέθη της ΜΜ σε εξάρτηση από παραδοχές και διαθέσιμους πίνακες

Σύμφωνα με τους ορισμούς που δόθηκαν στην παράγραφο 1.5, ένας γεωμετρικά ορισμένος φορέας αποτελείται από ένα πλήθος συνδεδεμένων μεταξύ τους αμφίπακτων και ακλόνητων στα άκρα τους δοκών. Αντίστροφα, αν έναν δεδομένο γεωμετρικά αόριστο φορέα επιθυμούμε να τον μετατρέψουμε σε γεωμετρικά ορισμένο, θα πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής δύο απλά βήματα:

- (1) *Υποδιαίρεση του φορέα σε ευθύγραμμα τμήματα σταθερής διατομής.* Τα σημεία του φορέα που συμπίπτουν με τα άκρα των ευθύγραμμων αυτών τμημάτων ονομάζονται *κόμβοι του φορέα*. Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των κόμβων αποτελεί ένα *δομικό στοιχείο*.
- (2) *Δικινητή πάκτωση και παγίωση (δηλαδή, πλήρης πάκτωση) κάθε κόμβου.* Π.χ., ο κόμβος ενός επίπεδου φορέα στο επίπεδο $X-Z$ έχει τρεις *βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ)*, δηλαδή τρεις δυνατότητες μετακίνησης: μετατόπιση u κατά X , μετατόπιση w κατά Z , και στροφή φ ως προς τον άξονα Y . Επομένως, πρέπει να δεσμευθεί με δύο δρομικές, μη συνευθειακές δεσμικές ράβδους (π.χ.,

παράλληλες με τους άξονες X και Z αντίστοιχα) και με μία δικινητή πάκτωση. Στην περίπτωση χωρικών φορέων, κάθε κόμβος έχει 6 ΒΕ: $u_x, u_y, u_z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Απαιτείται επομένως η προσθήκη έξι συνδέσμων: τριών μη συννευθιακών δρομικών και τριών μη συννευθιακών στροφικών δεσμικών ράβδων.

Ως *ΒΕ ενός φορέα* ορίζεται το άθροισμα των ΒΕ όλων των κόμβων του φορέα αυτού. Ο γεωμετρικά ορισμένος φορέας που προκύπτει από τη δέσμευση (παγίωση/πάκτωση) των ΒΕ ενός δεδομένου γεωμετρικά αόριστου φορέα ονομάζεται, όπως ήδη γνωρίζουμε, *γεωμετρικό κύριο σύστημα (ΓΚΣ)* του δεδομένου φορέα. Το πλήθος των συνδέσμων, δηλαδή των δρομικών και στροφικών δεσμικών ράβδων που προστέθηκαν για να μηδενίσουν τους βαθμούς ελευθερίας του δεδομένου φορέα, ισούται με το πλήθος των υπεραριθμών γεωμετρικών μεγεθών, δηλαδή των αγνώστων μετακινήσεων (μετατοπίσεων και στροφών).

Έτσι, για τη συνεχή δοκό του σχήματος 3.1-1(α) μπορούμε, π.χ., να ορίσουμε ως κόμβους τα σημεία 1, 2, 3 και 4, οπότε η δοκός συντίθεται από τα τρία ευθύγραμμα δομικά στοιχεία 1-2, 2-3 και 3-4. Για να προκύψει το ΓΚΣ, οι τέσσερις αυτοί κόμβοι πρέπει να δεσμευθούν με πρόσθετους συνδέσμους (δρομικές και στροφικές δεσμικές ράβδους) έτσι ώστε να μετατραπούν σε πλήρεις πακτώσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1-1(β).

Σημείωση:

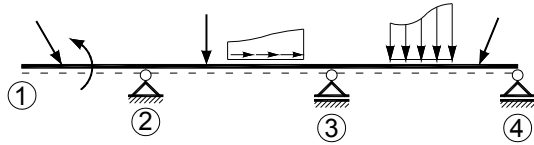
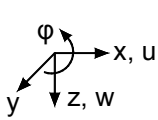
Η στροφική δεσμική ράβδος (που ονομάζεται και *δικινητή πάκτωση*) συμβολίζεται είτε με λοξή (δηλαδή παράλληλη με τον άξονα Y) διακεκομμένη γραμμή είτε με ένα "τετραγωνάκι" πάνω στον κόμβο. Στο βιβλίο αυτό προτιμάται το "τετραγωνάκι", το οποίο μάλιστα χρησιμοποιείται τόσο για τη δέσμευση της στροφής ενός κόμβου όσο και για τη δέσμευση της στροφής της χορδής ενός δομικού στοιχείου, όπως θα επεξηγηθεί αναλυτικότερα σε επόμενες παραγράφους.

Ο δεδομένος φορέας είναι επομένως οκτώ φορές γεωμετρικά αόριστος. Το πλήθος όμως των υπεραριθμών μετακινήσεων μπορεί να μειωθεί με διάφορους τρόπους όπως:

- με την αποκοπή των ισοστατικών τμημάτων του δεδομένου φορέα (βλ. ακόλουθη υποπαράγρ. Α),
- με την εισαγωγή προσθέτων απλοποιητικών παραδοχών, όπως π.χ. της παραδοχής της ατένειας (βλ. ακόλουθη υποπαράγρ. Β), και
- με τη χρησιμοποίηση γεωμετρικά αόριστων κυρίων συστημάτων (βλ. ακόλουθη υποπαράγρ. Γ).

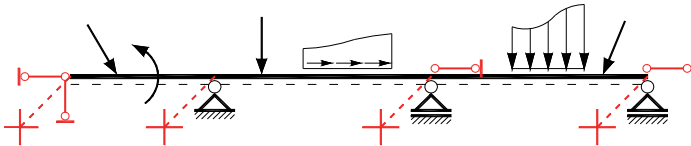
Υπενθύμιση:

Και στη ΜΔ μπορούν να χρησιμοποιηθούν στατικώς αόριστα, δηλαδή υπερστατικά, κύρια συστήματα για την απλοποίηση των υπολογισμών (βλ. υποπαράγρ. 2.5.1-Α). Αντίθετα, η απλοποιητική παραδοχή της ατένειας δεν έχει καμία επίπτωση στο πλήθος των υπεραριθμών εντασιακών μεγεθών της ΜΔ, όπως δεν έχει ιδιαίτερο νόημα η αφαίρεση ισοστατικών τμημάτων, αφού το ΣΚΣ είναι το ίδιο (εξ ορισμού) ισοστατικό.

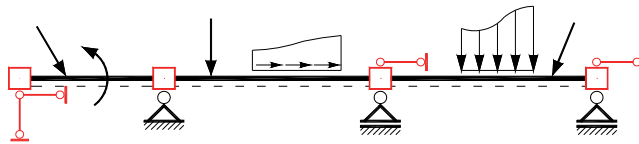


Γεωμετρικές, συνοριακές	$w_1 \neq 0$	$w_2 = 0$	$w_3 = 0$	$w_4 = 0$
και μεταβατικές συνθήκες	$u_1 \neq 0$	$u_2 = 0$	$u_3 \neq 0$	$u_4 \neq 0$
	$\varphi_1 \neq 0$	$\varphi_2 \neq 0$	$\varphi_3 \neq 0$	$\varphi_4 \neq 0$

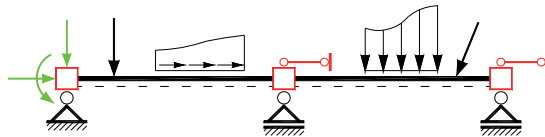
(α) Συνεχής δοκός με $EI=\text{πεπερ.}$, $GA_S=\text{πεπερ.}$, $EA=\text{πεπερ.}$



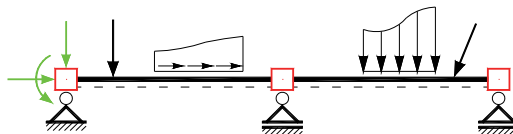
ή με διαφορετικό συμβολισμό της στροφικής δέσμμευσης (δικινητής πάκτωσης)



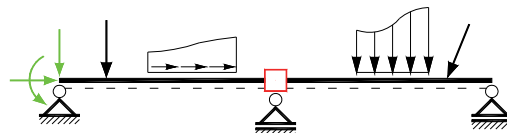
(β) ΓΚΣ του δεδομένου φορέα (α) → Πλήθος υπεραριθμών $N=8$



(γ) ΓΚΣ μετά την αποκοπή των ισοστατικών τμημάτων → Πλήθος υπεραριθμών $N=5$



(δ) ΓΚΣ με (πλέον των παραπάνω) θεώρηση ατενών δομικών στοιχείων ($EA \rightarrow \infty$)
→ Πλήθος υπεραριθμών $N=3$



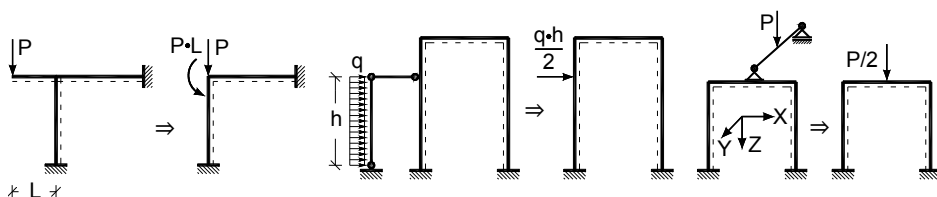
(ε) ΓΚΣ με (πλέον των παραπάνω) χρήση πινάκων μονόπακτης δοκού
→ Πλήθος υπεραριθμών: $N=1$

Σχ. 3.1-1 ΓΚΣ συνεχούς δοκού σε εξάρτηση από απλοποιήσεις και παραδοχές

A. Αποκοπή ισοστατικών τμημάτων

Για αριθμητικούς υπολογισμούς που γίνονται "με το χέρι", τα τυχόν υφιστάμενα ισοστατικά τμήματα του προς επίλυση φορέα (π.χ. πρόβολοι, αμφιέριστες δοκοί, τριαρθρωτά πλαίσια ή τόξα, κτλ., με εντασιακή κατάσταση εξαρχής προσδιορίσιμη βάσει των συνθηκών ισορροπίας) είναι σκόπιμο να αποκόπτονται από τον δεδομένο φορέα και να αντικαθίστανται από τις αντιδράσεις τους. Η έτσι επιτυγχανόμενη μείωση του πλήθους των αγνώστων μετακινήσεων και η αντίστοιχη εξοικονόμηση αριθμητικών πράξεων είναι βέβαια άνευ σημασίας, όταν η επίλυση γίνεται με βοήθεια κατάλληλου λογισμικού σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στην περίπτωση της δοκού του σχήματος 3.1-1(α) αποκόπτεται ο αριστερός πρόβολος και αντικαθίσταται από τις δύο δυνάμεις και τη ροπή που ασκούνται από αυτόν στον υπόλοιπο φορέα. Το ΓΚΣ απλοποιείται, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1-1(γ). Επιτυγχάνεται έτσι η απομείωση των αγνώστων μεγεθών από οκτώ σε πέντε.

Περαιτέρω παραδείγματα απλών περιπτώσεων, στις οποίες μπορεί (και ενδείκνυται) να γίνει αποκοπή των ισοστατικών τμημάτων, δίνονται στο σχήμα 3.1-2.



Σχ. 3.1-2 Παραδείγματα αποκοπής ισοστατικών τμημάτων προς μείωση των γεωμετρικών υπεραρίθμων

B. Μείωση των βαθμών ελευθερίας λόγω ατένειας

Κατά κανόνα, σε συνήθεις κατασκευές της δομικής πράξης όπου προεξάρχει η καμπτική επιπόνηση, η πεπερασμένη δυστένεια των δοκών δεν επηρεάζει αισθητά την εντασιακή και παραμορφωσιακή τους κατάσταση. Γι' αυτό και γίνεται συχνά η παραδοχή της ατένειας, τίθεται δηλαδή $EA \rightarrow \infty$, πράγμα που σημαίνει ότι αγνοούνται οι αξονικές παραμορφώσεις των δομικών στοιχείων κατά τους υπολογισμούς. Αντίθετα, όπως ήδη γνωρίζουμε (βλ. παράγρ. 2.3), σε φορείς που επιπονούνται έντονα από μεγάλες αξονικές δυνάμεις, σε φορείς που εμπεριέχουν δομικά στοιχεία με δυστένεια EA σχετικά μικρή έναντι εκείνης των υπολοίπων στοιχείων, π.χ. τένοντες ή καλώδια, και σε ορισμένες άλλες παρόμοιες περιπτώσεις, οι αξονικές παραμορφώσεις οφείλουν να λαμβάνονται υπόψη.

Η παραδοχή της ατένειας δημιουργεί εξαρτήσεις μεταξύ των μετατοπίσεων των κόμβων και κατά συνέπεια μειώνεται το πλήθος των αγνώστων μετατοπίσεων του φορέα. Κάνοντας για τη συνεχή δοκό του σχήματος 3.1-1(γ) την παραδοχή της ατένειας, προκύπτει το ΓΚΣ του σχήματος 3.1-1(δ), στο οποίο οι άγνωστες μετακινήσεις περιορίζονται σε τρεις.

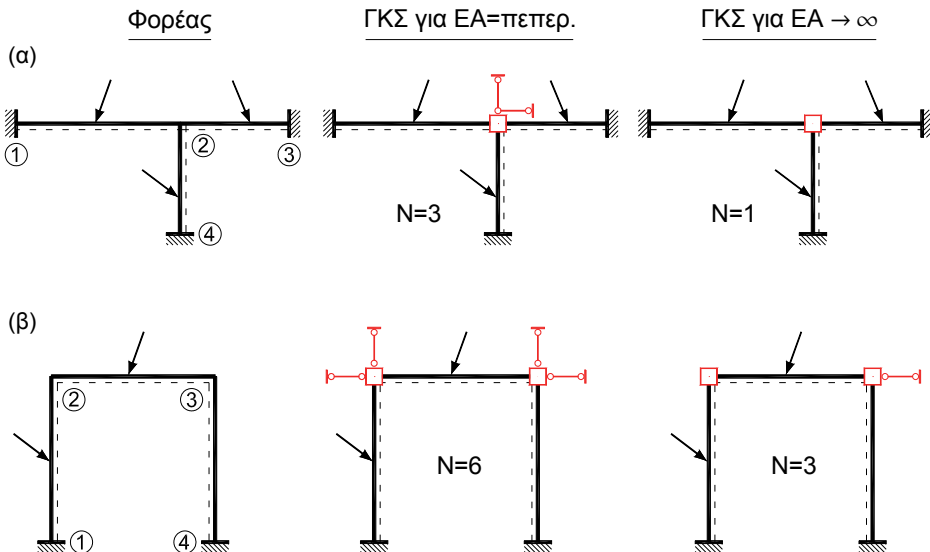
Σημείωση 1:

Σε αντίθεση με την παραδοχή της ατένειας, η παραδοχή της ατμησίας ($GA_S \rightarrow \infty$), δηλαδή η αγνόηση των διατμητικών παραμορφώσεων, δεν δημιουργεί εξαρτήσεις μεταξύ των μετακινήσεων (μετατοπίσεων και στροφών) των κόμβων και επομένως δεν έχει καμία επίπτωση στο πλήθος των υπεραρίθμων γεωμετρικών μεγεθών.

Σημείωση 2:

Η υπερστατικότητα ενός φορέα δεν μεταβάλλεται ούτε από την παραδοχή της ατένειας ούτε από την παραδοχή της ατμησίας. Επομένως, οι παραδοχές αυτές δεν έχουν καμία επίπτωση στο πλήθος των στατικώς υπεραρίθμων μεγεθών, όταν η επίλυση γίνεται με τη ΜΔ.

Περαιτέρω παραδείγματα της επιρροής της ατένειας στο πλήθος των αγνώστων μετακινήσεων δίνονται στα σχήματα 3.1-3 (α) και (β). Το έξι φορές υπερστατικό πλαίσιο του σχήματος 3.1-3(α) έχει έναν ελεύθερο κόμβο και επομένως, εφόσον θεωρήσουμε ότι έχει πεπερασμένη δυστένεια EA , είναι τρεις φορές γεωμετρικά αόριστο. Με την παραδοχή $EA \rightarrow \infty$, ο κόμβος 2 δεν μπορεί πλέον να μετατοπιστεί κατακόρυφως λόγω της ατένειας του στύλου και επίσης δεν μπορεί να μετατοπιστεί οριζοντίως λόγω της ατένειας του ζυγώματος. Παραμένει έτσι ως άγνωστο μέγεθος μετακίνησης μόνον η στροφή του κόμβου 2 και επομένως ο φορέας είναι πλέον μία μόνο φορά γεωμετρικά αόριστος.



Σχ. 3.1-3 Η μειωτική επίπτωση της παραδοχής της ατένειας στο πλήθος των γεωμετρικών υπεραρίθμων

Το τρεις φορές υπερστατικό πλαίσιο του σχήματος 3.1-3(β) είναι χωρίς την παραδοχή της ατένειας έξι φορές γεωμετρικά αόριστο. Με την παραδοχή $EA \rightarrow \infty$ η

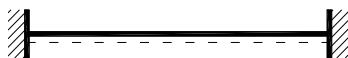
γεωμετρική του αοριστία περιορίζεται σε τρία μόνον άγνωστα μεγέθη. Πράγματι, λόγω της ατένειας των στύλων, οι άνω κόμβοι 2 και 3 δεν μπορούν πλέον να μετατοπιστούν κατακόρυφως και άρα δεν χρειάζονται πλέον οι δύο κατακόρυφες δεσμικές ράβδοι στο ΓΚΣ του ατενούς φορέα. Επίσης, λόγω της ατένειας του ζυγώματος, η απόσταση μεταξύ των κόμβων 2 και 3 παραμένει σταθερή, δηλαδή, οι κόμβοι 2 και 3 υφίστανται σε κάθε περίπτωση την ίδια ακριβώς οριζόντια μετατόπιση. Επομένως, η μία εκ των δύο οριζόντιων δεσμικών ράβδων στο ΓΚΣ (π.χ. η αριστερή) μπορεί να παραλειφθεί στο ΓΚΣ του ατενούς φορέα, ο οποίος έτσι προκύπτει τρεις φορές γεωμετρικά αόριστος.

Περισσότερα παραδείγματα της μειωτικής επίπτωσης της παραδοχής της ατένειας στο πλήθος των γεωμετρικών υπεραρίθμων θα δοθούν στην παράγραφο 3.3.1.

Γ. Βασικά στοιχεία - Πίνακες εντασιακών μεγεθών για τα βασικά στοιχεία

- Χρήση πινάκων για την αμφίπακτη δοκό (βασικό στοιχείο Ι):

Τα ΓΚΣ έχουν εξ ορισμού μηδενικές μετατοπίσεις και στροφές κόμβων, αποτελούνται δηλαδή από αμφίπακτα τμήματα δοκών. Για να μην γίνονται κάθε φορά προκαταρκτικοί υπολογισμοί (π.χ. με τη ΜΔ) για τον υπολογισμό της έντασης των (τριπλά υπερστατικών) αυτών αμφίπακτων τμημάτων, χρησιμοποιούνται για τη ΜΜ βοηθητικοί πίνακες, οι οποίοι περιέχουν τα απαιτούμενα εντασιακά μεγέθη για τις συχνότερα εμφανιζόμενες περιπτώσεις φόρτισης και καταναγκασμού της αμφίπακτης δοκού, η οποία εν προκειμένω χαρακτηρίζεται ως βασικό στοιχείο Ι:



Βασικό στοιχείο Ι

- Χρήση πινάκων για τη μονόπακτη δοκό με άρθρωση (βασικό στοιχείο ΙΙ):

Για να μειωθεί το πλήθος των υπεραρίθμων μετακινήσεων και να διευκολυνθούν έτσι οι επιλύσεις που γίνονται "με το χέρι", μπορούν να χρησιμοποιηθούν και πίνακες για γεωμετρικά αόριστα τμήματα φορέων, όπως, π.χ., για τη μονόπακτη δοκό, η οποία - με δεδομένους τους πίνακες αυτούς - θεωρείται ως **οιονεί γεωμετρικά ορισμένη** και χαρακτηρίζεται ως βασικό στοιχείο ΙΙ (ΙΙα για άρθρωση στο δεξιό άκρο, ΙΙβ για άρθρωση στο αριστερό άκρο):



Βασικό στοιχείο ΙΙα



Βασικό στοιχείο ΙΙβ

Με δεδομένους τους πίνακες για το βασικό στοιχείο ΙΙ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη συνεχή δοκό του σχήματος 3.1-1(α) αντί του **γνήσιου ΓΚΣ** (δ), που αποτελείται αποκλειστικά από αμφίπακτα τμήματα και είναι τρεις φορές

γεωμετρικά αόριστο, το **οιονεί ΓΚΣ** (ϵ), το οποίο είναι μία μόνο φορά γεωμετρικά αόριστο.

Σχετικά με τον χαρακτηρισμό ενός ΓΚΣ ως γνήσιου ΓΚΣ ή ως οιονεί ΓΚΣ:

Δεδομένου ότι για υπολογισμούς "με το χέρι" η ελαχιστοποίηση των γεωμετρικών υπεραρίθμων αποτελεί καίρια επιδίωξη, δεν χρειάζεται να γίνεται αυστηρή διάκριση μεταξύ των γνήσιων ΓΚΣ (που είναι πράγματι γεωμετρικώς ορισμένα) και των οιονεί ΓΚΣ (που είναι γεωμετρικώς αόριστα).

- Χρήση πινάκων για την αμφιαρθρωτή δοκό ή ράβδο (**βασικό στοιχείο III**):

Με το ίδιο σκεπτικό θεωρείται και η αμφιαρθρωτή δοκός ως οιονεί γεωμετρικά ορισμένη και χαρακτηρίζεται ως βασικό στοιχείο III:

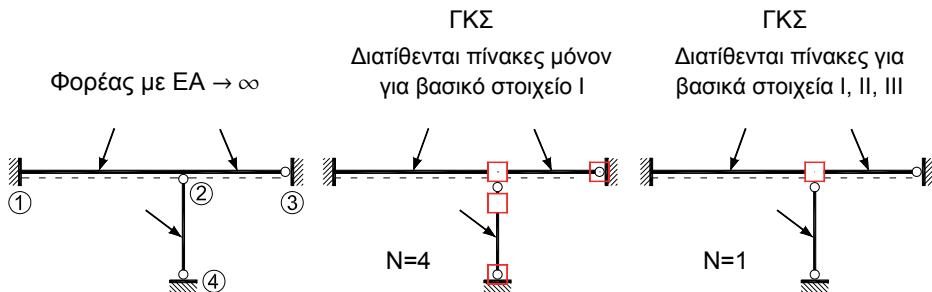


Βασικό στοιχείο III

Υπενθύμιση:

Στις περιπτώσεις που μία αμφιαρθρωτή δοκός δεν μεταφέρει ή δεν μπορεί (λόγω πρακτικά μηδενικής δυσκαμψίας $EI \rightarrow 0$) να μεταφέρει εγκάρσια φορτία χαρακτηρίζεται ως **ράβδος**.

Στο ακόλουθο σχήμα 3.1-4 φαίνεται η μειωτική επίπτωση που έχει η χρήση πινάκων μονόπακτης/αμφιαρθρωτής δοκού στο πλήθος των υπεραρίθμων μετακινήσεων ενός απλού ατενούς πλαισιακού φορέα.



Σχ. 3.1-4 Μείωση γεωμετρικών υπεραρίθμων μέσω χρήσης πινάκων μονόπακτης/αμφιαρθρωτής δοκού

- Χρήση πινάκων για τη μονόπακτη δοκό με κινητή πάκτωση (**βασικό στοιχείο IV**):

Τέλος, σε αρκετές περιπτώσεις χρήσιμα είναι και τα πινακοποιημένα εντασιακά μεγέθη που αφορούν στη μονόπακτη δοκό με κινητή πάκτωση, η οποία χαρακτηρί-

ζεται εδώ ως βασικό στοιχείο IV:

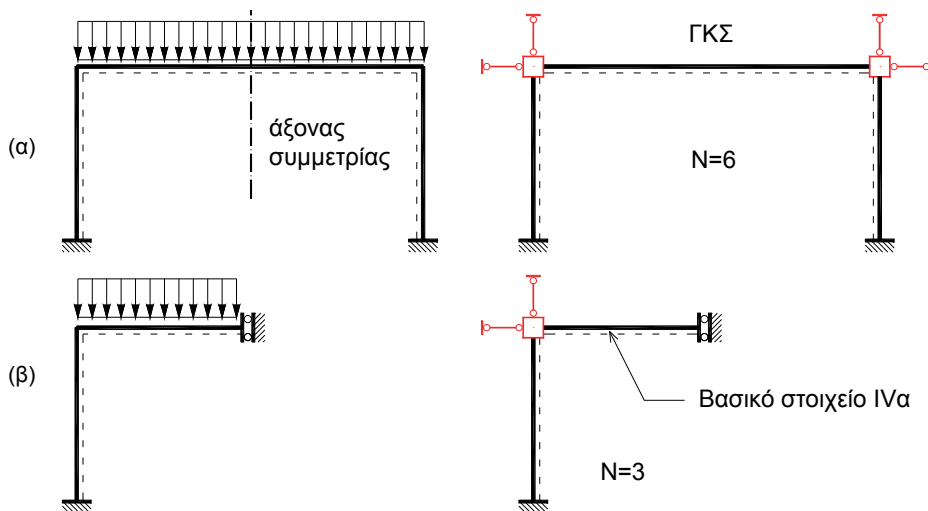


Βασικό στοιχείο IVα



Βασικό στοιχείο IVβ

Έτσι, π.χ., αν θελήσουμε να επιλύσουμε το συμμετρικό και συμμετρικά φορτιζόμενο πλαίσιο του σχήματος 3.1-5(α) αξιοποιώντας τη συμμετρία, μπορούμε να διεξάγουμε όλους τους υπολογισμούς στον μισό φορέα του σχήματος 3.1-5(β), ο οποίος προκύπτει από τον αρχικό λαμβάνοντας υπόψη ότι η οριζόντια μετατόπιση u_3 και η στροφή φ_3 του κέντρου του ζυγώματος είναι μηδενικές. Τρόποι αξιοποίησης της συμμετρίας ενός φορέα θα συζητηθούν αναλυτικά στις παραγράφους 3.6.2 έως 3.6.4.



Σχ. 3.1-5 Αξιοποίηση της συμμετρίας με χρήση του βασικού στοιχείου IVα

Παρατήρηση:

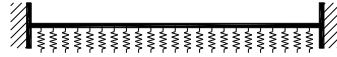
Με τη χρησιμοποίηση των οιονεί γεωμετρικά ορισμένων βασικών στοιχείων II, III και IV επιτυγχάνεται μείωση του πλήθους των υπερarίθμων γεωμετρικών μεγεθών και διευκολύνεται έτσι η "χειρωνακτική" επίλυση φορέων με τη MM. Είναι σαφές ότι η χρησιμοποίηση των στοιχείων αυτών περιπτεύει, όταν οι υπολογισμοί γίνονται με την "προγραμματιστική" παραλλαγή της MM (δηλαδή με τη Μέθοδο Στιβαρότητας, βλ. παράγρ. 1.6) σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Στην περίπτωση αυτή, αντίθετα, ζητούμενο είναι η μέγιστη δυνατή τυποποίηση. Γι' αυτό και χρησιμοποιείται κατά κανόνα ως βασικό στοιχείο μόνο το βασικό στοιχείο I (αμφίπακτη δοκός).

▪ Χρήση πινάκων για περαιτέρω δομικά στοιχεία:

Πίνακες υφίστανται ή μπορούν να καταρτιστούν και για ορισμένα άλλα δομικά στοιχεία που εμφανίζονται συχνά σε φορείς της πράξης, όπως π.χ. για την τοξωτή δοκό (συγκεκριμένης καμπυλότητας), για την αμφίπακτη ή μονόπακτη δοκό επί συνεχούς ελαστικής έδρασης, κ.ά. (Σχ. 3.1-6).



Τοξωτή αμφίπακτη δοκός



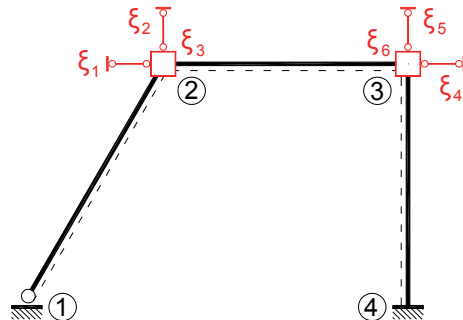
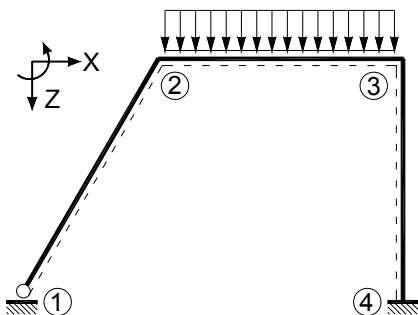
Ελαστικά εδραζόμενη αμφίπακτη δοκός

Σχ. 3.1-6 Βασικά στοιχεία τοξωτής και ελαστικά εδραζόμενης δοκού

3.1.2 Περαιτέρω ορισμοί και παρατηρήσεις σχετικά με το ΓΚΣ

A. Συμβολισμός των υπεραρίθμων μετακινήσεων

Γενικώς, τα υπεράριθμα μεγέθη ενός φορέα, όπως π.χ. του πλαισίου του σχήματος 3.1-7(α), περιλαμβάνουν τόσο μετατοπίσεις όσο και στροφές, διαφορετικά δηλαδή φυσικά μεγέθη, τα οποία μετρούνται με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Εντούτοις, για τη συστηματική παρουσίαση της διαδικασίας επίλυσης είναι εύλογο και βολικό τα μεγέθη αυτά να χαρακτηρίζονται με το ίδιο σύμβολο. Εδώ χρησιμοποιούμε το σύμβολο ξ_n , όπου ο δείκτης $n=1,2,\dots,N$ είναι ο αριθμός του αγνώστου μεγέθους μετακίνησης. Σε αντίθεση με τη ΜΔ, όπου τα υπεράριθμα εντασιακά μεγέθη συμβολίζονταν με το κεφαλαίο γράμμα X (όπως με κεφαλαία γράμματα συμβολίζονται γενικώς οι δυνάμεις και οι ροπές), στη ΜΜ επιλέγεται για τον συμβολισμό των υπεραρίθμων γεωμετρικών μεγεθών το πεζό γράμμα ξ (όπως με πεζά γράμματα συμβολίζονται γενικώς οι μετατοπίσεις και στροφές).



$\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_5$ = μετατοπίσεις [m]

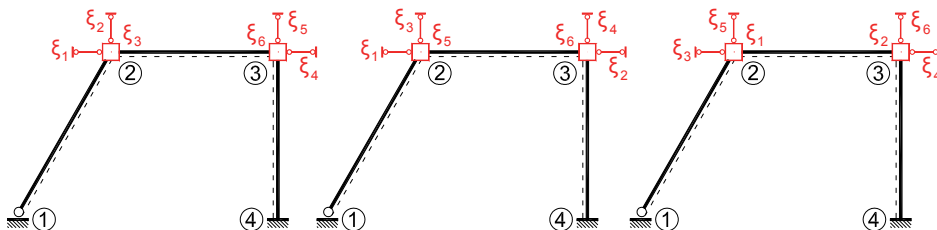
ξ_3, ξ_6 = στροφές [rad]

(α) Δεδομένος φορέας με αρίθμηση κόμβων (β) ΓΚΣ με αρίθμηση αγνώστων μετακινήσεων

Σχ. 3.1-7 Ενιαίος συμβολισμός υπεραρίθμων μετατοπίσεων και στροφών

Β. Σειρά αρίθμησης των υπεραρίθμων μετακινήσεων

Η σειρά αρίθμησης των πρόσθετων δεσμικών ράβδων, και συνεπώς των αγνώστων (υπεραρίθμων) μεγεθών μετακίνησης, είναι στη διακριτική ευχέρεια του μελετητή. Έτσι, για το πλαίσιο του σχήματος 3.1-7(α) δίνονται στο σχήμα 3.1-8 τρεις διαφορετικές αριθμήσεις των υπεραρίθμων μεγεθών, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυσή του με τη ΜΜ. Από το σχήμα 3.1-8 γίνεται σαφές ότι η αρίθμηση των πρόσθετων συνδέσμων κατά κανόνα δεν συμπίπτει - και δεν μπορεί άλλωστε πάντοτε να συμπίπτει - με την αρίθμηση των κόμβων του φορέα. Επομένως, δεν πρέπει να συγχέονται οι αριθμοί των κόμβων του φορέα με τους αριθμούς των υπεραρίθμων μεγεθών μετακίνησης. Επίσης, είναι αυτονόητο ότι η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μετακινήσεων έχει τυπικό (συμβατικό) χαρακτήρα και ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της επίλυσης, τα οποία αναφέρονται στο πραγματικό φυσικό φαινόμενο της επιπόνησης του φορέα. Εντούτοις, όπως θα δούμε στην παράγραφο 3.3.1-ΣΤ, η σειρά αρίθμησης των αγνώστων μεγεθών επηρεάζει τη δομή των επιλυουσών εξισώσεων (ακριβέστερα: τη δομή του μητρώου στιβαρότητας) και μπορεί να διευκολύνει ή να δυσχεράνει τη διαδικασία επίλυσης - χωρίς όμως αυτό να επηρεάζει τα ίδια τα αποτελέσματα.



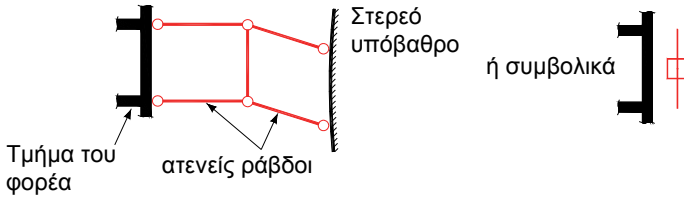
Σχ. 3.1-8 ΓΚΣ του πλαισίου του Σχ. 3.1-7(α) με διαφορετική αρίθμηση υπεραρίθμων μεγεθών

Γ. Δικινητές πακτώσεις χορδών αντί δομικών δεσμικών ράβδων

Οι δομικές δεσμικές ράβδοι, οι οποίες δεσμεύουν τις μετατοπίσεις κόμβων, μπορούν εύκολα (αν και όχι πάντοτε) να υποκατασταθούν από στροφικές δεσμικές ράβδους, οι οποίες δεσμεύουν τις στροφές των χορδών των δομικών στοιχείων (δοκών ή στύλων) που συντρέχουν στους κόμβους αυτούς. Η δέσμευση της στροφής της χορδής ενός γραμμικού δομικού στοιχείου (*Υπενθύμιση*: 'χορδή' = νοητή ευθεία που ενώνει τα δύο άκρα ενός γραμμικού δομικού στοιχείου) χαρακτηρίζεται ως **'δικινητή πάκτωση χορδής δοκού'**, διότι εμποδίζει μεν τη στροφή, χωρίς όμως να αποκλείει τις παράλληλες μετατοπίσεις του δομικού στοιχείου. Η δικινητή πάκτωση της χορδής μιας δοκού (για συντομία: 'η δικινητή πάκτωση της δοκού') επιτυγχάνεται με τη (νοητή) τοποθέτηση του "μηχανισμού" που απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα 3.1-9.

Υπενθύμιση:

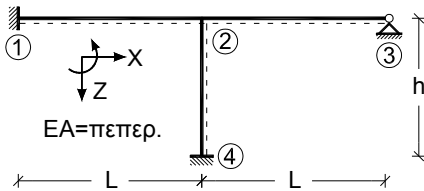
Οι στροφικές δεσμικές ράβδοι που τοποθετούνται στους κόμβους ενός φορέα για να δεσμεύσουν τη στροφή τους είναι και αυτές δικινητές πακτώσεις, διότι δεσμεύουν μόνον τη στροφή του κόμβου χωρίς να εμποδίζουν τις κατά Χ και Ζ μετατοπίσεις του.



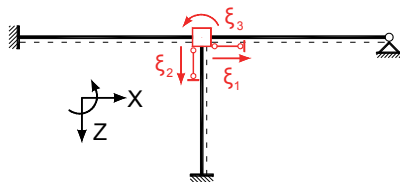
Σχ. 3.1-9 Μηχανισμός δικινητής πάκτωσης χορδής δοκού και συμβολισμός της

• Παραδείγματα εναλλακτικών ΓΚΣ με δικινητές πακτώσεις χορδών

Ο φορέας του σχήματος 3.1-10(α) έχει έναν ελεύθερο (μη εδραζόμενο) κόμβο (τον κόμβο 2), ο οποίος μπορεί να υποστεί οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση, καθώς και στροφή. Η παγίωση του οριζόντιου και του κατακόρυφου βαθμού ελευθερίας με δορμικές δεσμικές ράβδους και η δικινητή πάκτωση του στροφικού βαθμού ελευθερίας με μία στροφική δεσμική ράβδο οδηγούν στο ΓΚΣ του σχήματος 3.1-10(β). Υποτίθεται εδώ ότι είναι διαθέσιμα τα βασικά στοιχεία I και IIα.



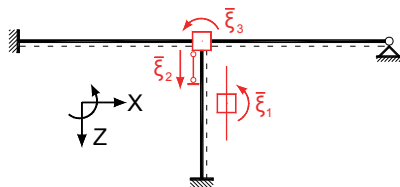
(α) Δεδομένος φορέας



Υπεράριθμες μετακινήσεις:

- μετατόπιση u_2 του κόμβου 2 κατά x : ξ_1
- μετατόπιση w_2 του κόμβου 2 κατά z : ξ_2
- στροφή φ_2 του κόμβου 2 : ξ_3

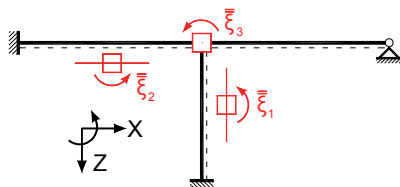
(β) ΓΚΣ με χρήση μίας στροφικής και δύο δορμικών δεσμικών ράβδων



Υπεράριθμες μετακινήσεις:

- στροφή χορδής ψ_{4-2} της δοκού 4-2: $\bar{\xi}_1 = -(\xi_1/h)$
- μετατόπιση w_2 του κόμβου 2 κατά z : $\bar{\xi}_2 = \xi_2$
- στροφή φ_2 του κόμβου 2 : $\bar{\xi}_3 = \xi_3$

(γ) ΓΚΣ με χρήση μίας δορμικής και δύο στροφικών δεσμικών ράβδων



Υπεράριθμες μετακινήσεις:

- στροφή χορδής ψ_{4-2} της δοκού 4-2: $\bar{\xi}_1 = -(\xi_1/h)$
- στροφή χορδής ψ_{1-2} της δοκού 1-2: $\bar{\xi}_2 = -(\xi_2/L)$
- στροφή φ_2 του κόμβου 2 : $\bar{\xi}_3 = \xi_3$

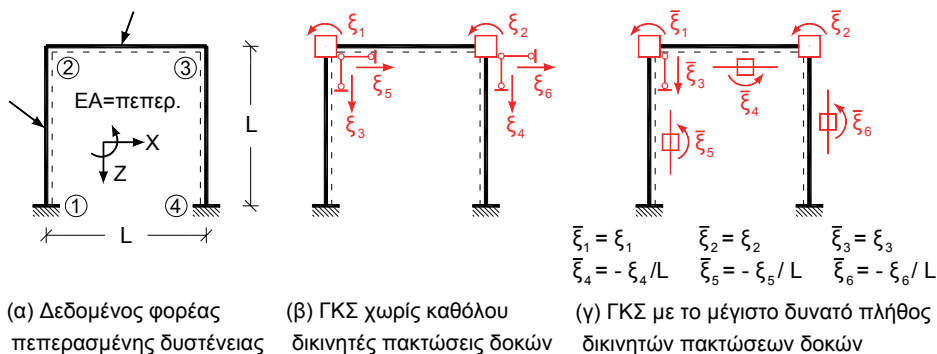
(δ) ΓΚΣ με αποκλειστική χρήση δικινητών πακτώσεων (δηλ. τριών στροφικών δεσμικών ράβδων)

Σχ. 3.1-10 Παραλλαγές ΓΚΣ με χρήση δικινητών πακτώσεων χορδής δοκού

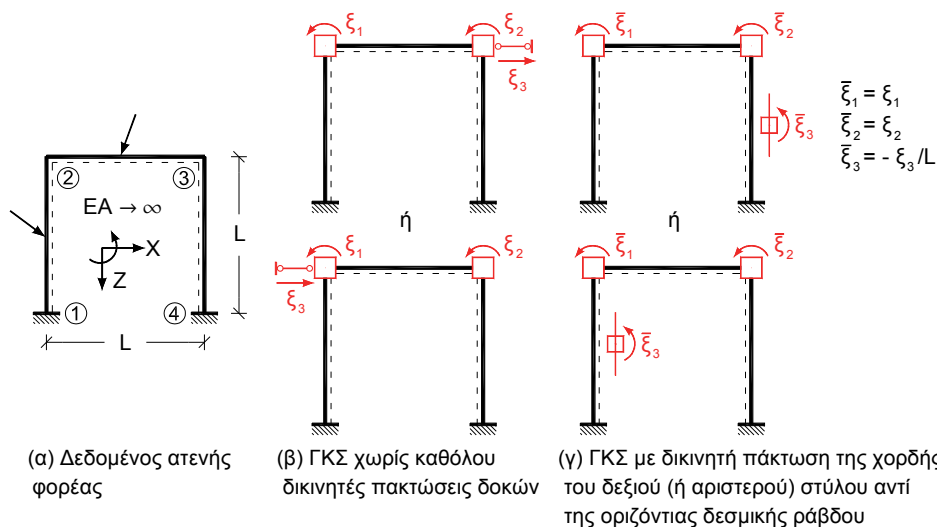
Εναλλακτικά, αντί της οριζόντιας δεσμικής ράβδου, ο οριζόντιος βαθμός ελευθερίας του κόμβου 2 μπορεί να παγιωθεί με τη δικινητή πάκτωση της χορδής του στύλου 4-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1-10 (γ). Ομοίως, ο κατακόρυφος δορικός σύνδεσμος, που δεσμεύει τον κατακόρυφο βαθμό ελευθερίας του κόμβου 2, μπορεί να αντικατασταθεί από τη δικινητή πάκτωση της χορδής της δοκού 1-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.1-10 (δ).

Στο σχήμα 3.1-10 δίνονται και οι γεωμετρικοί συσχετισμοί που υφίστανται μεταξύ των υπεραριθμών μεγεθών των τριών απεικονιζόμενων παραλλαγών του ΓΚΣ. Η επιλογή μίας εξ αυτών βρίσκεται στη διακριτική ευχέρεια του μελετητή, δεδομένου ότι προφανώς όλες οδηγούν σε ταυτόσημα τελικά αποτελέσματα.

Περαιτέρω παραδείγματα χρησιμοποίησης δικινητών πακτώσεων χορδής δοκών δίνονται στο σχήμα 3.1-11 (απλό πλαίσιο πεπερασμένης δυστένειας) και στο σχήμα 3.1-12 (για το ίδιο πλαίσιο με την πρόσθετη παραδοχή της ατένειας των δορικών του στοιχείων).



Σχ. 3.1-11 Παραλλαγές ΓΚΣ απλού πλαισίου πεπερασμένης δυστένειας ($EA=\text{πεπερ.}$)



Σχ. 3.1-12 Παραλλαγές ΓΚΣ απλού ατενούς πλαισίου ($EA \rightarrow \infty$)

Στα παραπάνω σχήματα 3.1-11 και 3.1-12 δίνονται και οι γεωμετρικές σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των υπεραριθμών μεγεθών των απεικονιζόμενων παραλλαγών των ΓΚΣ. Είναι αυτονόητο ότι τα τελικά αποτελέσματα είναι παντελώς ανεξάρτητα από το ΓΚΣ που θα χρησιμοποιηθεί στους υπολογισμούς.

Δ. Μέθοδος Μετακινήσεων ως Μέθοδος Γωνιών Στροφής

Αν για το ΓΚΣ χρησιμοποιηθούν αποκλειστικά δικινητές πακτώσεις (ΓΚΣ χωρίς καμία δομική δεσμική ράβδο), τότε τα άγνωστα μεγέθη μετακίνησης είναι όλα στροφές (κόμβων ή χορδών δοκών), όπως, π.χ., στα ΓΚΣ των σχημάτων 3.1-10(δ) και 3.1-12(γ). Στις περιπτώσεις αυτές η Μέθοδος υπεραριθμών Μετακινήσεων χαρακτηρίζεται ως **Μέθοδος Γωνιών Στροφής**. Για φορείς πεπερασμένης δυστένειας, η αποκλειστική χρήση δικινητών πακτώσεων δεν είναι πάντοτε δυνατή (βλ., π.χ., το πλαίσιο του σχήματος 3.1-11). Αντίθετα, είναι πάντα δυνατή για ατενείς φορείς. Αν μάλιστα ο ατενής φορέας δεν μπορεί να υποστεί μετατοπίσεις κόμβων (Σημ.: Αυτό συμβαίνει σε πάγιους και υπερπάγιους φορείς, βλ. παράγρ. 3.3.1-Δ), τα άγνωστα μεγέθη της ΜΜ είναι αποκλειστικά στροφές κόμβων (βλ., π.χ., ατενή φορέα του σχήματος 3.1-3γ). Στις περιπτώσεις αυτές η Μέθοδος Μετακινήσεων "εκφυλίζεται" σε **Μέθοδο Γωνιών Στροφής Κόμβων**.

Ε. Μονοσήμαντος καθορισμός του ΓΚΣ

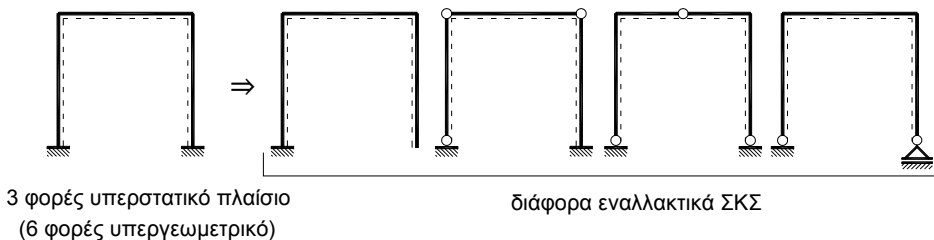
Σε αντίθεση με το ΣΚΣ, το ΓΚΣ φορέων (χωρίς την περιοριστική παραδοχή της ατένειας) μπορεί να καθορίζεται πάντοτε μονοσήμαντα. Το γεγονός αυτό συνιστά και ένα από τα πλεονεκτήματα της ΜΜ έναντι της ΜΔ, διότι διευκολύνει την τυποποίηση και τον προγραμματισμό της σε ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Παρατήρηση:

Σε φορείς πεπερασμένης δυστένειας προκύπτουν εναλλακτικά ΓΚΣ *μόνον* εάν αποφασιστεί η χρησιμοποίηση δικινητών πακτώσεων χορδών αντί της χρησιμοποίησης δομικών δεσμικών ράβδων παγίωσης κόμβων (π.χ., βλ. σχήμα 3.1-10 και σχήμα 3.1-11). Εναλλακτικά ΓΚΣ προκύπτουν επίσης σε ατενείς φορείς, στους οποίους, λόγω των εξαρτήσεων που υφίστανται μεταξύ των μετατοπίσεων των κόμβων τους, υπάρχει η δυνατότητα δέσμευσης των ίδιων μετατοπίσεων μέσω παγίωσης διαφορετικών κόμβων (π.χ., βλ. σχήμα 3.1-12).

Έτσι, π.χ., το ΓΚΣ του απλού ορθογωνικού πλαισίου του σχήματος 3.1-11(α) (που είναι έξι φορές γεωμετρικά αόριστο) προκύπτει μονοσήμαντα με δικινητή πάκτωση και οριζόντια και κατακόρυφη παγίωση των δύο ελεύθερων κόμβων του (βλ. Σχ. 3.1-11(β)). Αντίθετα, η επίλυση του πλαισίου αυτού (που είναι τρεις φορές στατικά αόριστο) με τη ΜΔ μπορεί να γίνει με άπειρα διαφορετικά ΣΚΣ. Μερικά από αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 3.1-13.

Γενικώς, οποιοσδήποτε ισοστατικός φορέας που προκύπτει από το δεδομένο τριπλά υπερστατικό πλαίσιο με κατάλυση τριών συνδέσμων είναι αποδεκτός ως ΣΚΣ υπό μία προϋπόθεση: η κατάλυση συνδέσμων να μην οδηγεί σε χαλαρό (κινηματικό) φορέα.



Σχ. 3.1-13 Διάφορα ΣΚΣ για επίλυση ενός υπερστατικού πλαισίου με τη ΜΔ

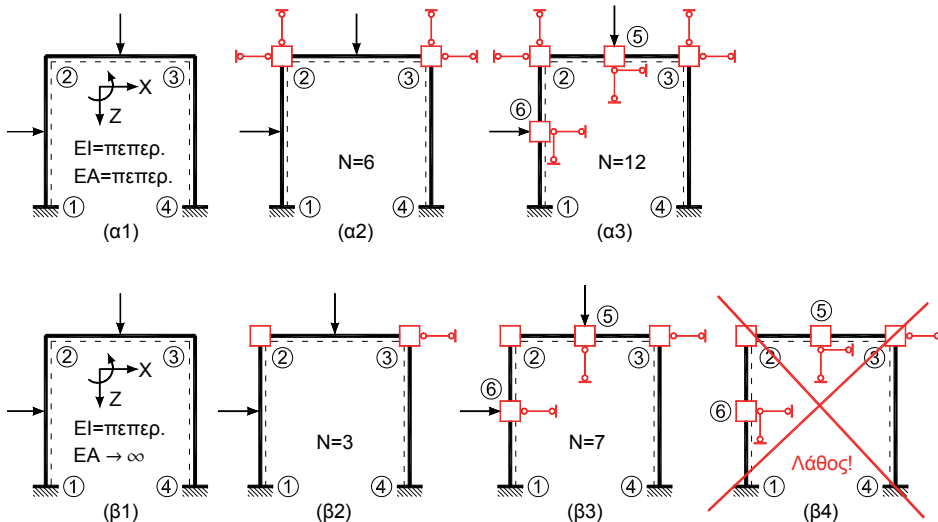
ΣΤ. Σχετικά με το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος συνδέσμων

Τα υπεράριθμα μεγέθη της ΜΜ είναι οι άγνωστες μετακινήσεις εκείνων των σημείων του εκάστοτε φορέα, τα οποία χαρακτηρίστηκαν από τον μελετητή ως οι κόμβοι του φορέα αυτού. Επομένως, το πλήθος των γεωμετρικών υπεραρίθμων μεγεθών εξαρτάται άμεσα από το πλήθος των κόμβων του φορέα. Ως κόμβοι όμως μπορούν να θεωρηθούν όλα τα σημεία ενός φορέα (που θεωρητικώς είναι άπειρα σε πλήθος), αρκεί το τμήμα του φορέα μεταξύ των σημείων αυτών να είναι ευθύγραμμο (ή γενικότερα: να αποτελεί πινακοποιημένο βασικό δομικό στοιχείο, βλ. παράγρ. 3.1.1). Εντούτοις, για επιλύσεις φορέων "με το χέρι" είναι σκόπιμο (προς εξοικονόμηση αριθμητικών πράξεων) να επιδιώκεται η ελαχιστοποίηση των αγνώστων υπεραρίθμων μεγεθών. Για τον σκοπό αυτόν, κατά τον καθορισμό των κόμβων (και για τον εν συνεχεία καθορισμό του ΓΚΣ) μεριμνούμε, ώστε να μην τοποθετηθούν περισσότεροι κόμβοι (και εν συνεχεία κατ' ανάγκη περισσότεροι σύνδεσμοι) από όσους επαρκούν για τη διεξαγωγή των υπολογισμών: Μας ενδιαφέρει, δηλαδή, το *ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος συνδέσμων*.

Έτσι, για το γνωστό μας πλαίσιο πεπερασμένης δυστένειας του σχήματος 3.1-14(α1) αρκεί η θεώρηση ως κόμβων των τεσσάρων μόνον σημείων του 1, 2, 3 και 4, η οποία οδηγεί σε ένα ΓΚΣ με έξι άγνωστα μεγέθη (Σχ. 3.1-14(α2)). Εντούτοις, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ως επιπλέον κόμβους, π.χ., και τα σημεία 5 και 6, όπου δρουν τα εξωτερικά φορτία, οπότε οι υπεράριθμες μετακινήσεις αυξάνονται από έξι σε δώδεκα (Σχ. 3.1-14(α3)). Η θεώρηση αυτή αυξάνει σημαντικά το υπολογιστικό κόστος, χωρίς όμως να δημιουργούνται περαιτέρω προβλήματα. Ως "αντιστάθμισμα", η επίλυση με τη ΜΜ μας δίνει άμεσα τις μετακινήσεις των σημείων εφαρμογής των δύο εξωτερικών φορτίων, οι οποίες στην περίπτωση του ΓΚΣ των έξι υπεραρίθμων θα έπρεπε να υπολογιστούν με κατάλληλες μεθόδους *μετά* την επίλυση του φορέα.

Ενώ όμως σε φορείς με πεπερασμένη δυστένεια ΕΑ και δυσκαμψία ΕΙ η τοποθέτηση πρόσθετων συνδέσμων, πέραν των κατ' ελάχιστον απαιτούμενων, για τον καθορισμό του ΓΚΣ δεν δημιουργεί πρόβλημα (πλην της αύξησης του πλήθους των αριθμητικών πράξεων), σε φορείς με ατενή ή/και άκαμπτα στοιχεία απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή. Έτσι, για το επίσης γνωστό μας *ατενές* πλαίσιο του σχήματος 3.1-14(β1) η θεώρηση ως κόμβων των τεσσάρων σημείων του 1, 2, 3 και 4 οδηγεί

σε ένα ΓΚΣ με τρία άγνωστα μεγέθη (Σχ. 3.1-14(β2)). Αν τώρα θελήσουμε να θεωρήσουμε ως επιπλέον κόμβους τα σημεία 5 και 6, τότε οι δεσμικές ράβδους που θα τοποθετήσουμε στους κόμβους αυτούς θα πρέπει να αντιστοιχούν σε *ανεξάρτητες* μετακινήσεις. Άρα: Η οριζόντια δεσμική ράβδος στον κόμβο 5 και η κατακόρυφη δεσμική ράβδος στον κόμβο 6 δεν χρειάζονται και *δεν πρέπει* να τοποθετηθούν, διότι οι δύο ήδη παγιωμένοι κόμβοι 2 και 3 σε συνδυασμό με την απένεια των στοιχείων καθιστά τους κόμβους 5 και 6 αμετάθετους κατά X και κατά Z αντίστοιχα (Σχ. 3.1-14(β3) και (β4)).



Σχ. 3.1-14 ΓΚΣ με το ελάχιστο πλήθος υπερarίθμων και άλλα αποδεκτά ΓΚΣ

Συνοψίζοντας τα παραπάνω μπορούμε να πούμε τα εξής:

Σε φορείς με πεπερασμένη δυστένεια EA και δυσκαμψία EI η τοποθέτηση πρόσθετων κόμβων, πέραν των κατ' ελάχιστον απαιτούμενων, για τον καθορισμό του ΓΚΣ είναι πάντα επιτρεπτή. Οι βαθμοί ελευθερίας (οι υπερarίθμες μετακινήσεις) κάθε πρόσθετου κόμβου δεσμεύονται με αντίστοιχες δεσμικές ράβδους (τρεις για κόμβους επίπεδων φορέων και έξι για κόμβους χωρικών φορέων).

Σε φορείς με ατενή ή/και άκαμπτα στοιχεία είναι επίσης επιτρεπτή η τοποθέτηση πρόσθετων κόμβων, οι οποίοι όμως πρέπει να δεσμευτούν με τρόπο που δεν δημιουργεί εξαρτήσεις μεταξύ των υπερarίθμων μετακινήσεων.

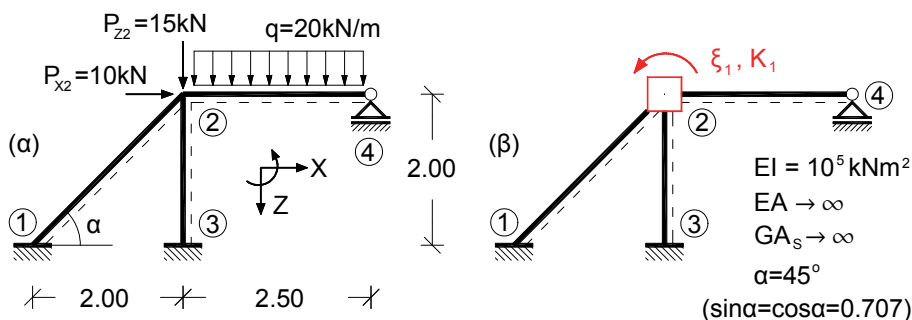
Περισσότερες διευκρινίσεις σχετικά με την ανεξαρτησία των υπερarίθμων μετακινήσεων σε ατενείς φορείς θα δοθούν στην παράγραφο 3.3.1-Γ.

3.4 Αριθμητικά παραδείγματα

Προς περαιτέρω εμπέδωση των προηγούμενων αναπτύξεων και διευκρίνιση ορισμένων επί μέρους σημείων, παρουσιάζονται στην παράγραφο αυτή οι αριθμητικές επιλύσεις τεσσάρων σχετικώς απλών πλαισιακών φορέων. Μια μεγαλύτερη σειρά απλών, αλλά και συνθετότερων αριθμητικών παραδειγμάτων επίλυσης φορέων με τη ΜΜ περιέχονται στον τόμο ΙΙβ του παρόντος συγγράμματος [Αβρ-ΙΙβ].

3.4.1 Πάγιο πλαίσιο

Ο δεδομένος πλαισιακός φορέας του σχήματος 3.4-1(α) είναι πάγιος, διότι ο κόμβος 2 συνδέεται με το στερεό υπόβαθρο μέσω των δύο μη συνευθειακών ατενών δοκών 1-2 και 3-2 και επομένως είναι αμετάθετος.



Σχ. 3.4-1 (α) Πάγιο ατενές πλαίσιο, (β) ΓΚΣ

• Βήμα 1: Καθορισμός του ΓΚΣ - Προσθήκη συνδέσμων

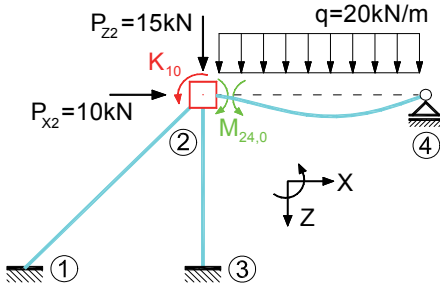
Το ΓΚΣ προκύπτει με την τοποθέτηση μιας δίκινητης πάκτωσης στον κόμβο 2 (Σχ. 3.4-1(β)). Έτσι, το μοναδικό άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος είναι η στροφή του κόμβου 2.

Συγκριτικά, η επίλυση του δεδομένου πλαισίου με τη ΜΔ θα απαιτούσε την εισαγωγή τεσσάρων υπεραριθμών εντασιακών μεγεθών, αφού αυτό είναι τέσσερις φορές υπερστατικό, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης.

• Βήμα 2 και Βήμα 4α: Κατάσταση "0" στο ΓΚΣ και υπολογισμός του K_{10}

Στην κατάσταση "0" το ΓΚΣ φορτίζεται με τα δεδομένα εξωτερικά φορτία (Σχ. 3.4-2). Ροπές αναπτύσσονται μόνο στο ζύγωμα 2-4 λόγω του εγκάρσιου συνεχούς φορτίου q . Τα μοναχικά φορτία P_{x2} και P_{z2} μεταφέρονται μέσω των ατενών δοκών 2-1 και 2-3 απευθείας στις στηρίξεις (στερεό υπόβαθρο έδρασης) χωρίς να προκαλούν καμπτική επιπρόνσηση των δομικών στοιχείων, αφού ο κόμβος 2 παραμένει αμετάθετος. Αμετάθετος παραμένει βέβαια λόγω της ατένειας και ο κόμβος 4, ασχέτως αν η έδρασή του είναι κύλιση.

Η επικόμβια ροπή $M_{24,0}$ λαμβάνεται από τον πίνακα 2α του Παραρτήματος για το βασικό στοιχείο ΙΙα. Το K_{10} προκύπτει από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών περί τον κόμβο 2.



$$M_{24,0} = \frac{q \cdot L_{24}^2}{8} = \frac{20 \cdot 2.5^2}{8} = 15.63 \text{ kNm}$$

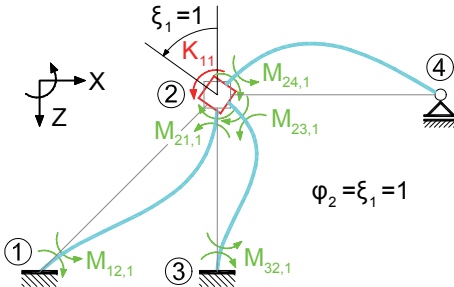
$$K_{10} - M_{24,0} = 0 \Rightarrow K_{10} - 15.63 = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 15.63 \text{ kNm}$$

Σχ. 3.4-2 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" - Υπολογισμός του συντελεστή φόρτισης K_{10}

• **Βήμα 3 και Βήμα 4β: Κατάσταση " $\xi_1=1$ " στο ΓΚΣ και υπολογισμός του K_{11}**

Στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " επιβάλλεται στον κόμβο 2 του ΓΚΣ μια μοναδιαία στροφή κατά την έννοια του καθολικού συστήματος αναφοράς. Η προκαλούμενη παραμόρφωση φαίνεται ποιοτικά στο σχήμα 3.4-3. Οι αναπτυσσόμενες ροπές στα άκρα των δομικών στοιχείων λαμβάνονται από τους πίνακες 1 και 2α του Παραρτήματος για τα βασικά στοιχεία Ι και ΙΙα αντίστοιχα. Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} προκύπτει από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών περί τον κόμβο 2.



$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \phi_2 = 70710.68 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \phi_2 = 141421.36 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{32,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \phi_2 = 100000 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \phi_2 = 200000 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{24,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \phi_2 = 120000 \text{ kNm/rad}$$

$$K_{11} - (M_{24,1} + M_{23,1} + M_{21,1}) = 0 \Rightarrow K_{11} - (120000 + 200000 + 141421.36) = 0$$

$$K_{11} = 461421.36 \text{ kNm/rad}$$

Σχ. 3.4-3 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " - Υπολογισμός του συντελεστή K_{11}

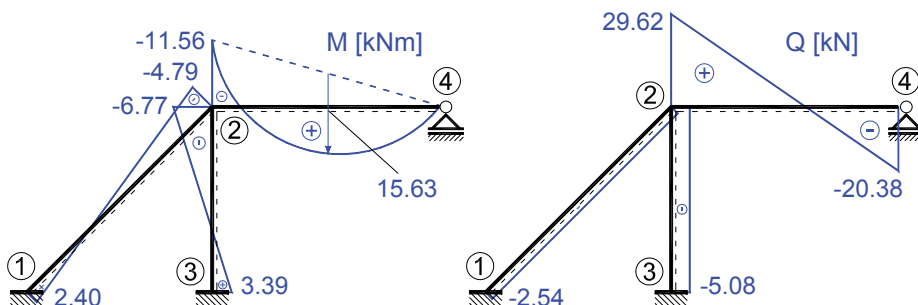
• **Βήμα 5: Κατάστρωση και επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας**

Ο υπολογισμός του ξ_1 γίνεται από την εξίσωση ισορροπίας $K_1=0$:

$$K_{10} + K_{11} \cdot \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\left(\frac{K_{10}}{K_{11}} \right) = -\left(\frac{15.63}{461421.36} \right) = -3.39 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

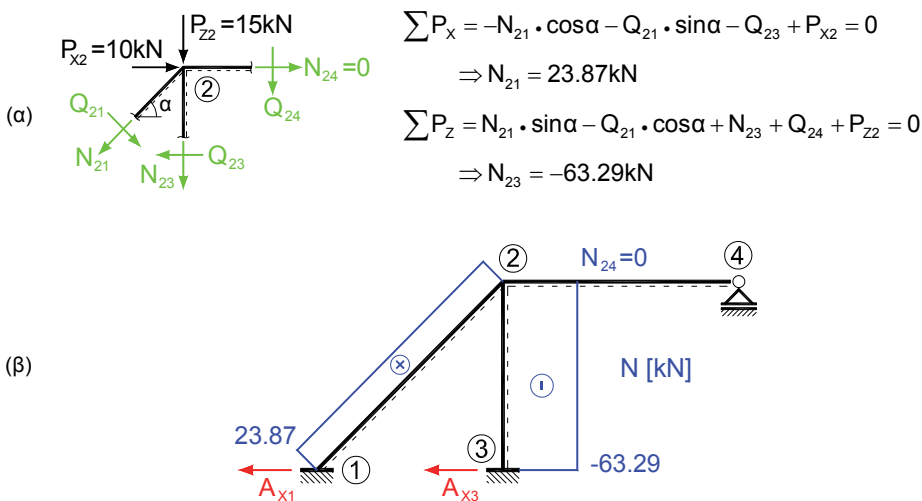
• **Βήμα 6: Υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών**

Με γνωστή τη στροφή ξ_1 , οι καμπτικές ροπές M_{ik} υπολογίζονται από τη σχέση επαλληλίας $M_{ik} = M_{ik,0} + M_{ik,1} \cdot \xi_1$. Ακολούθως υπολογίζονται οι τέμνουσες δυνάμεις Q_{ik} από τις ροπές με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας. Τα αντίστοιχα διαγράμματα δίνονται στο σχήμα 3.4-4.



Σχ. 3.4-4 Διαγράμματα M και Q του δεδομένου πάγιου φορέα

Για τον υπολογισμό των αξονικών δυνάμεων N_{ik} αρκούν οι συνθήκες ισορροπίας, αφού ο σχηματισμός ράβδων του δεδομένου φορέα είναι ισοστατικός (πάγιος φορέας). Με $N_{24}=0$ λόγω της κύλισης στον κόμβο 4, παίρνουμε από τις συνθήκες ισορροπίας $\sum P_{x(2)}=0$ και $\sum P_{z(2)}=0$ περί τον κόμβο 2 τις N_{21} , N_{23} (βλ. Σχ. 3.4-5(α)). Το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων δίνεται στο σχήμα 3.4-5(β).



Σχ. 3.4-5 Συνθήκες ισορροπίας δυνάμεων στον κόμβο 2 για τον υπολογισμό των N (α) και διάγραμμα N του δεδομένου πάγιου φορέα (β)

• **Βήμα 7: Έλεγχοι αποτελεσμάτων**

Περιοριζόμαστε εδώ στον ισορροπιακό έλεγχο $\sum P_x = 0$ για ολόκληρο τον φορέα:

$$\text{Αντιδράσεις:} \quad A_{x1} = N_{12} \cdot \cos \alpha + Q_{12} \cdot \sin \alpha = 15.08 \text{ kN}$$

$$(\text{βλ. Σχ. 3.4-5}) \quad A_{x3} = Q_{32} = -5.08 \text{ kN}$$

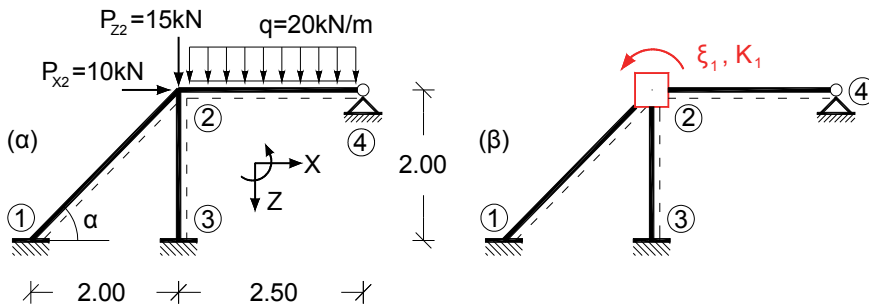
$$\text{Έλεγχος:} \quad \sum P_x = P_{x2} - A_{x1} - A_{x3} = 10 - 15.08 + 5.08 = 0$$

Ο ισορροπιακός έλεγχος ικανοποιείται.

3.4.2 Υπερπάγιο πλαίσιο

Τί αλλάζει στη στατική συμπεριφορά του πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου 3.4.1, αν δεσμεύσουμε την κύλιση του κόμβου 4 καθιστώντας έτσι τον φορέα υπερπάγιο (Σχ. 3.4-6(α)); [Σημ.: Το πλαίσιο καθίσταται υπερπάγιο διότι ο κόμβος 2, παρόλο που είναι ήδη αμετάθετος λόγω της σύνδεσής του με το στερεό υπόβαθρο μέσω των δύο μη συνευθειακών ατενών δοκών 1-2 και 3-2, στηρίζεται τώρα επιπλέον ακλόνητα οριζοντίως μέσω της ατενούς δοκού 2-4].

Η επίλυση του υπερπαγίου αυτού πλαισίου παρουσιάζεται εδώ προκειμένου να τονιστούν, με βάση ένα συγκεκριμένο απλό παράδειγμα, τα σημεία στα οποία αυτή διαφοροποιείται έναντι της επίλυσης του παγίου πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου.



Σχ. 3.4-6 (α) Υπερπάγιο ατενές πλαίσιο, (β) ΓΚΣ

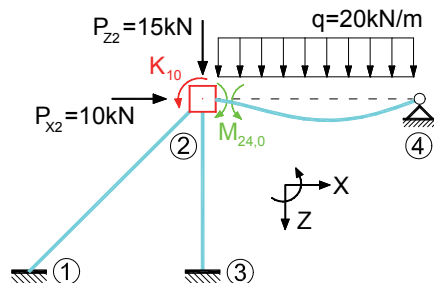
• **Βήμα 1: Καθορισμός του ΓΚΣ - Προσθήκη συνδέσμων**

Το ΓΚΣ προκύπτει με την τοποθέτηση μιας δικινητής πάκτωσης στον κόμβο 2 του φορέα (Σχ. 3.4-6(β)). Όπως για το πάγιο πλαίσιο της προηγούμενης παραγράφου (βλ. Σχ. 3.4-1(α)), το μοναδικό άγνωστο γεωμετρικό μέγεθος είναι και εδώ η στροφή του κόμβου 2. Δηλαδή, η επιπλέον οριζόντια παγίωση δεν μετέβαλε τον βαθμό γεωμετρικής αοριστίας του ατενούς φορέα.

Αντίθετα, η επίλυση του δεδομένου υπερπαγίου πλαισίου με τη ΜΔ θα απαιτούσε την εισαγωγή πέντε υπεραριθμών εντασιακών μεγεθών έναντι τεσσάρων για το πάγιο πλαίσιο της προηγούμενης παραγράφου.

• **Βήμα 2 και Βήμα 4α: Κατάσταση "0" στο ΓΚΣ και υπολογισμός του K_{10}**

Στην κατάσταση "0" το ΓΚΣ φορτίζεται με τα δεδομένα εξωτερικά φορτία (Σχ. 3.4-7). Δεδομένου ότι ο κόμβος 2 παραμένει λόγω της ατένειας των δομικών στοιχείων αμετάθετος, η παραμόρφωση του ΓΚΣ είναι ακριβώς ίδια με εκείνη του ΓΚΣ του παγίου πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου.



$$M_{24,0} = \frac{q \cdot L_{24}^2}{8} = \frac{20 \cdot 2.5^2}{8} = 15.63 \text{ kNm}$$

$$K_{10} - M_{24,0} = 0 \Rightarrow K_{10} - 15.63 = 0$$

$$\Rightarrow K_{10} = 15.63 \text{ kNm}$$

Σχ. 3.4-7 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση "0" - Υπολογισμός του συντελεστή φόρτισης K_{10}

Διαπιστώνουμε ότι η κατάσταση "0" του υπερπάγιου πλαισίου μας ταυτίζεται παραμορφωσιακά με την κατάσταση "0" του πάγιου πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου, αφού ο κόμβος 2 παραμένει και στα δύο πλαίσια αμετάθετος λόγω της ατένειας των στοιχείων 2-1 και 2-3, άσχετα από την ύπαρξη κύλισης ή ακλόνητης στήριξης στον κόμβο 4. Για τον ίδιο λόγο οι δύο καταστάσεις "0" είναι ταυτόσημες και ως προς την αναπτυσσόμενη σ' αυτές καμπτική ένταση (ίδιες ροπές και ίδιες τέμνουσες δυνάμεις).

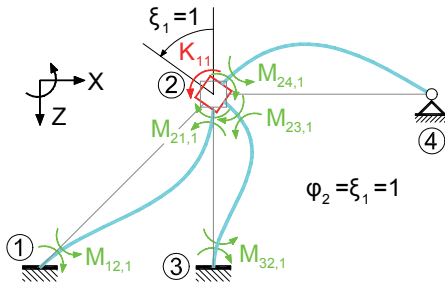
Αντίθετα, οι δύο καταστάσεις "0" διαφοροποιούνται ως προς τις αναπτυσσόμενες αξονικές δυνάμεις. Π.χ., άμεσα βλέπουμε ότι η $N_{24,0}$ του πάγιου πλαισίου είναι μηδενική λόγω της κύλισης στον κόμβο 4, ενώ δεν μπορεί να ισχύει το ίδιο για την $N_{24,0}$ του υπερπάγιου πλαισίου.

Εντούτοις, όπως γνωρίζουμε από την παράγραφο 3.3, η διαδικασία επίλυσης ατενών φορέων δεν απαιτεί τη γνώση των αξονικών δυνάμεων στις επί μέρους καταστάσεις "0" και " $\xi_n=1$ ".

• **Βήμα 3 και Βήμα 4β: Κατάσταση " $\xi_1=1$ " στο ΓΚΣ και υπολογισμός του K_{11}**

Στην κατάσταση " $\xi_1=1$ " επιβάλλεται στον κόμβο 2 του ΓΚΣ μια μοναδιαία στροφή κατά την έννοια του καθολικού συστήματος αναφοράς. Η προκαλούμενη παραμόρφωση δίνεται ποιοτικά στο σχήμα 3.4-8. Οι αναπτυσσόμενες ροπές στα άκρα των δομικών στοιχείων λαμβάνονται από τους πίνακες 1 και 2α του Παραρτήματος για τα βασικά στοιχεία Ι και ΙΙα αντίστοιχα. Ο συντελεστής στιβαρότητας K_{11} προκύπτει από τη συνθήκη ισορροπίας ροπών περί τον κόμβο 2.

Και εδώ διαπιστώνουμε ότι η κατάσταση " $\xi_1=1$ " του υπερπάγιου πλαισίου μας ταυτίζεται τόσο παραμορφωσιακά όσο και ως προς την αναπτυσσόμενη καμπτική ένταση με την κατάσταση " $\xi_1=1$ " του πάγιου πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου.



$$M_{12,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 70710.68 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{21,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{12}} \right) \cdot \varphi_2 = 141421.36 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{32,1} = 2 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 100000 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{23,1} = 4 \cdot \left(\frac{EI}{L_{23}} \right) \cdot \varphi_2 = 200000 \text{ kNm/rad}$$

$$M_{24,1} = 3 \cdot \left(\frac{EI}{L_{24}} \right) \cdot \varphi_2 = 120000 \text{ kNm/rad}$$

$$K_{11} - (M_{24,1} + M_{23,1} + M_{21,1}) = 0 \Rightarrow K_{11} - (120000 + 200000 + 141421.36) = 0$$

$$K_{11} = 461421.36 \text{ kNm/rad}$$

Σχ. 3.4-8 Παραμόρφωση και ένταση του ΓΚΣ στην κατάσταση “ $\xi_1=1$ ” - Υπολογισμός του συντελεστή K_{11}

• Βήμα 5: Κατάστρωση και επίλυση της εξίσωσης ισορροπίας

Οι ταυτόσημες επί μέρους παραμορφωσιακές και εντασιακές (ως προς την κάμψη) καταστάσεις του πάγιου και του υπερπάγιου πλαισίου συνεπάγονται ταυτόσημους συντελεστές στιβαρότητας και φόρτισης. Επομένως, η υπεράριθμη γωνία στροφής ξ_1 προκύπτει και αυτή ίδια:

$$K_{10} + K_{11} \cdot \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -(K_{10}/K_{11}) = -(15.6/461421.36) = -3.38 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

• Βήμα 6: Υπολογισμός των τελικών εντασιακών μεγεθών

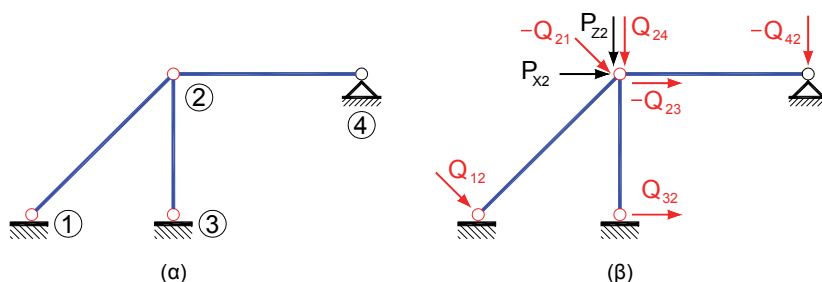
Με βάση τα παραπάνω, οι καμπτικές ροπές M_{ik} και οι τέμνουσες δυνάμεις Q_{ik} του υπερπάγιου πλαισίου μας ταυτίζονται με εκείνες του πάγιου πλαισίου της προηγούμενης παραγράφου (βλ. Σχ. 3.4-4). Ως μόνο σημείο διαφοροποίησης του υπερπάγιου από το πάγιο πλαίσιο δεν απομένει πλέον παρά μόνο ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων.

Πράγματι, οι αξονικές δυνάμεις N δεν είναι τώρα δυνατόν να υπολογιστούν μόνο με τη βοήθεια των συνθηκών ισορροπίας, διότι ο φορέας είναι υπερπάγιος και ο σχηματισμός ράβδων του υπερστατικού. Για τον υπολογισμό των N απαιτείται η άρση της παραδοχής της ατένειας και η επίλυση του μία φορά υπερστατικού σχηματισμού ράβδων με τη ΜΔ. Η ακολουθητέα διαδικασία περιγράφηκε στην παράγραφο 3.3.6 (υποπαράγραφοι Β και Γ) και συγκεκριμενοποιείται στο παράδειγμά μας ως εξής:

- Θεωρούμε τον σχηματισμό ράβδων που προκύπτει από τον δεδομένο υπερπάγιο φορέα με εισαγωγή καμπτικών αρθρώσεων σε όλους τους

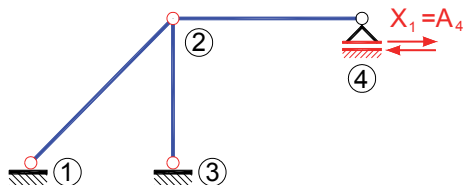
κόμβους του (Σχ. 3.4-9(α)). Ο σχηματισμός ράβδων είναι ένα μία φορά υπερστατικό δικτύωμα.

- ii. Προσάγουμε ως εξωτερικά φορτία στους κόμβους του δικτυώματος τις ήδη γνωστές τελικές επικόμβιες τέμνουσες δυνάμεις όλων των δομικών στοιχείων καθώς και τις εξωτερικές μοναχικές δυνάμεις P_{x2} και P_{z2} . Οι τελευταίες, όπως διαπιστώσαμε στο βήμα 2, δεν προκαλούν καμπτική επιπρόνσηση του ατενούς φορέα, αλλά επειδή μεταφέρονται μέσω των αξονικών δυνάμεων των δοκών στις στηρίξεις συνεισφέρουν στη διάταση του φορέα (Σχ. 3.4-9(β)).
- iii. Αίρουμε την παραδοχή της ατένειας και επιλέγουμε την αριθμητική τιμή της δυστένειας. Εδώ έστω $EA=10^5$ kN.
- iv. Επιλύουμε τον μία φορά υπερστατικό σχηματισμό ράβδων του σχήματος 3.4-9(β) με τη ΜΔ.



Σχ. 3.4-9 (α) Σχηματισμός ράβδων, (β) Φόρτιση με κομβικές δυνάμεις (επικόμβιες τέμνουσες και εξωτερικά κομβικά φορτία) για τον υπολογισμό των N

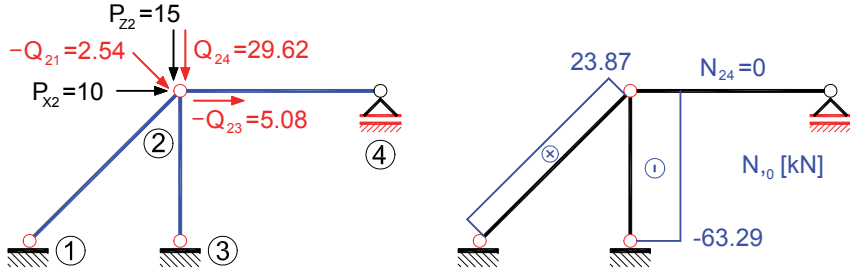
Ως ΣΚΣ για την επίλυση του υπερστατικού σχηματισμού ράβδων επιλέγεται το ισοστατικό δικτύωμα του σχήματος 3.4-10, το οποίο προκύπτει με κατάλυση της οριζόντιας στήριξης του κόμβου 4. Επομένως, το υπεράριθμο μέγεθος X_1 είναι η οριζόντια αντίδραση A_4 στη στήριξη αυτή.



Σχ. 3.4-10 ΣΚΣ για την επίλυση του υπερστατικού σχηματισμού ράβδων με τη ΜΔ

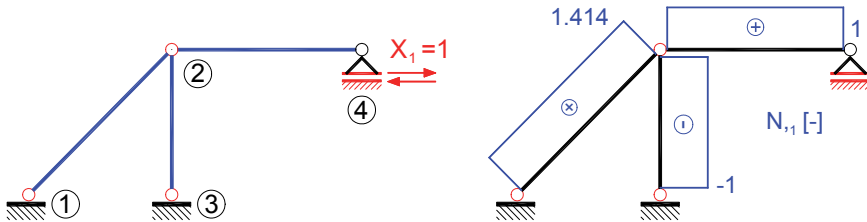
Για την επίλυση του υπερστατικού σχηματισμού ράβδων με τη ΜΔ απαιτείται η επίλυση του ΣΚΣ αρχικά με εξωτερικά φορτία τις κομβικές δυνάμεις του σχήματος 3.4-9(β) (Κατάσταση "0", βλ. Σχ. 3.4-11) και κατόπιν για τη μοναδιαία δύναμη $X_1=1$ στον καταλυθέντα σύνδεσμο (Κατάσταση " $X_1=1$ ", βλ. Σχ. 3.4-12).

Ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων $N_{ik,0}$ γίνεται πολύ απλά με την κατάρθρωση των συνθηκών ισορροπίας των οριζοντίων και κατακόρυφων δυνάμεων που δρουν στον κόμβο 2, λαμβάνοντας υπόψη ότι $N_{24,0}=0$. Έτσι προκύπτει το διάγραμμα αξονικών δυνάμεων που δίνεται στο σχήμα 3.4-11.



Σχ. 3.4-11 Κατάσταση "0" στο ΣΚΣ - Αξονικές δυνάμεις $N_{ik,0}$ (σύγκρ. Σχ. 3.4-5)

Αντίστοιχα προκύπτει το διάγραμμα των αξονικών δυνάμεων $N_{ik,1}$ λόγω μοναδιαίας δύναμης $X_1=1$ (βλ. σχήμα 3.4-12)



Σχ. 3.4-12 Κατάσταση " $X_1=1$ " στο ΣΚΣ - Αξονικές δυνάμεις $N_{ik,1}$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των συντελεστών ενδοσιμότητας δ_{10} και δ_{11} , οι οποίοι εδώ παριστούν την οριζόντια μετατόπιση που εμφανίζεται στη στήριξη 4 λόγω της εξωτερικής φόρτισης με τις κομβικές δυνάμεις και λόγω της μοναδιαίας δύναμης $X_1=1$ αντιστοίχως. Ο υπολογισμός αυτός πραγματοποιείται με την ΑΣΔΕ (αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων ή αρχή των νοητών δυνάμεων ή αρχή των δυνατών φορτίων) χρησιμοποιώντας τα ήδη γνωστά διαγράμματα αξονικών δυνάμεων $N_{ik,0}$ και $N_{ik,1}$:

$$\delta_{10} = \int_0^{L_{12}} N_{1,1} \cdot \left(\frac{N_{1,0}}{EA_{12}} \right) dx + \int_0^{L_{24}} N_{1,1} \cdot \left(\frac{N_{1,0}}{EA_{24}} \right) dx + \int_0^{L_{32}} N_{1,1} \cdot \left(\frac{N_{1,0}}{EA_{32}} \right) dx$$

$$\Rightarrow \delta_{10} = [23.87 \cdot 1.414 \cdot 2.828 + (-63.29) \cdot (-1) \cdot 2] \cdot 10^{-5} = 222.03 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

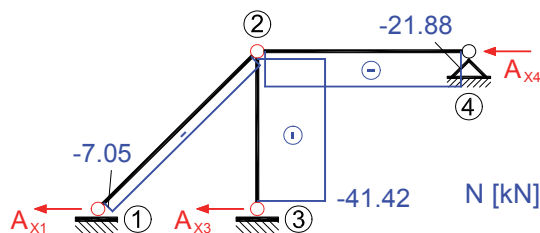
$$\delta_{11} = \int_0^{L_{12}} \left(\frac{N_{1,1} \cdot N_{1,1}}{EA_{12}} \right) dx + \int_0^{L_{24}} \left(\frac{N_{1,1} \cdot N_{1,1}}{EA_{24}} \right) dx + \int_0^{L_{32}} \left(\frac{N_{1,1} \cdot N_{1,1}}{EA_{32}} \right) dx$$

$$\Rightarrow \delta_{11} = [1.414^2 \cdot 2.828 + (-1)^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 2.5] \cdot 10^{-5} = 10.15 \cdot 10^{-5} \text{ m/kN}$$

Ο υπολογισμός της υπεράριθμης αντίδρασης $X_1=A_4$ επιτυγχάνεται με κατάστροψη της εξίσωσης συμβιβαστού των παραμορφώσεων, η φυσική σημασία της οποίας έγκειται στο γεγονός ότι στον πραγματικό φορέα η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 4 είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -(\delta_{10}/\delta_{11}) \Rightarrow X_1 = -21.88 \text{ kN}$$

Με γνωστή την $A_4=X_1$, ο υπολογισμός των αξονικών δυνάμεων του υπερστατικού σχηματισμού ράβδων γίνεται με τη βοήθεια της αρχής της επαλληλίας: $N_{ik}=N_{ik,0}+N_{ik,1} \cdot X_1$. Οι αξονικές αυτές δυνάμεις του υπερστατικού σχηματισμού ράβδων είναι οι ζητούμενες αξονικές δυνάμεις του δεδομένου υπερπάλγιου ατενούς φορέα του σχήματος 3.4-6(α). Το διάγραμμα τους δίνεται στο σχήμα 3.4-13.



Σχ. 3.4-13 Διάγραμμα τελικών αξονικών δυνάμεων του υπερπάλγιου φορέα (προσεγγιστικά)

Υπενθυμίζεται στο σημείο αυτό ότι οι υπολογισθείσες αξονικές δυνάμεις έχουν προσεγγιστικό χαρακτήρα, διότι οι τέμνουσες δυνάμεις Q_{ik} που προσήχθησαν ως εξωτερικά φορτία στους κόμβους του σχηματισμού ράβδων είχαν υπολογιστεί με την παραδοχή της ατένειας ($EA \rightarrow \infty$), ενώ για τον εκ των υστέρων υπολογισμό των αξονικών δυνάμεων αναίρεθηκε η παραδοχή αυτή (βλ. παράγρ. 3.3.6-Γ).

• Βήμα 7: Έλεγχος αποτελεσμάτων

Περιοριζόμαστε εδώ στον ισοροπιακό έλεγχο $\Sigma P_x=0$ για ολόκληρο τον φορέα:

$$\text{Αντιδράσεις:} \quad A_{X1} = N_{12} \cdot \cos\alpha + Q_{12} \cdot \sin\alpha = -6.78 \text{ kN}$$

$$(\text{βλ. Σχ. 3.4-13}) \quad A_{X3} = Q_{32} = -5.08 \text{ kN}$$

$$A_{X4} = 21.88 \text{ kN}$$

$$\text{Έλεγχος:} \quad \Sigma P_x = P_{x2} - A_{X1} - A_{X3} - A_{X4} = 10 + 6.78 + 5.08 - 21.88 = 0$$

Ο ισοροπιακός έλεγχος ικανοποιείται.

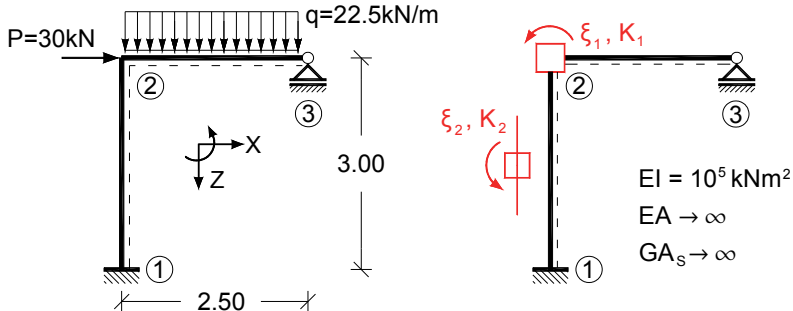
3.4.3 Κινητό πλαίσιο με μοναχικό και συνεχές φορτίο

Ο δεδομένος πλαισιακός φορέας του σχήματος 3.4-14(α) είναι μία φορά κινητός, διότι ο σχηματισμός ράβδων του είναι απλή κινηματική αλυσίδα, δηλαδή μία φορά χαλαρός, όπως άμεσα προκύπτει μετά την εισαγωγή πλήρων αρθρώσεων στους κόμβους 1 και 2.

• Βήμα 1: Καθορισμός του ΓΚΣ - Προσθήκη συνδέσμων

Το ΓΚΣ προκύπτει με παγίωση της στροφής του κόμβου 2 και ταυτόχρονη παγίωση της στροφής της χορδής 1-2 (Σχ. 3.4-14(β)). Εναλλακτικά, αντί της στροφής της χορδής, θα μπορούσε να δεσμευτεί η οριζόντια μετατόπιση του κόμβου 2 (ή 3).

Συγκριτικά, η επίλυση του δεδομένου πλαισίου με τη ΜΔ θα απαιτούσε την εισαγωγή ενός μόνο υπεραριθμού εντασιακού μεγέθους, αφού το πλαίσιο είναι μία φορά υπερστατικό, όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης.



Σχ. 3.4-14 (α) Κινητό ατενές πλαίσιο και (β) ΓΚΣ

• Βήμα 2: Εξωτερικές δράσεις στο ΓΚΣ (κατάσταση "0")

Το ΓΚΣ φορτίζεται με τα δεδομένα φορτία q και P (Σχ. 3.4-15(α)). Ροπές αναπτύσσονται μόνο στο ζυγύωμα 2-3 λόγω του εγκάρσιου φορτίου q . Το οριζόντιο μοναχικό φορτίο P παραλαμβάνεται άμεσα από τη δικινητή πάκτωση του στύλου 1-2 και δεν προκαλεί καμπτική ένταση στο ΓΚΣ. Η $M_{24,0}$ λαμβάνεται από τον πίνακα 2α του Παραρτήματος.

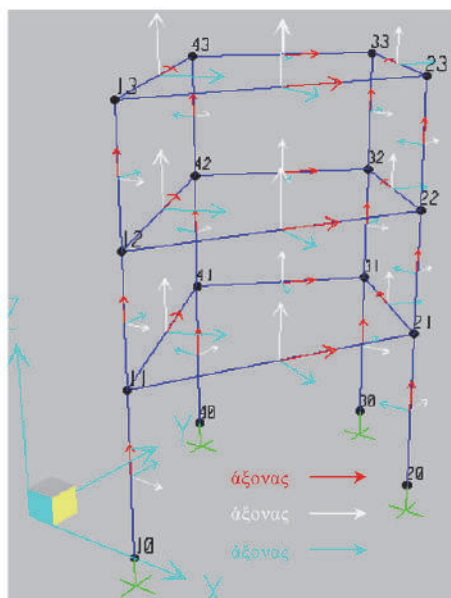
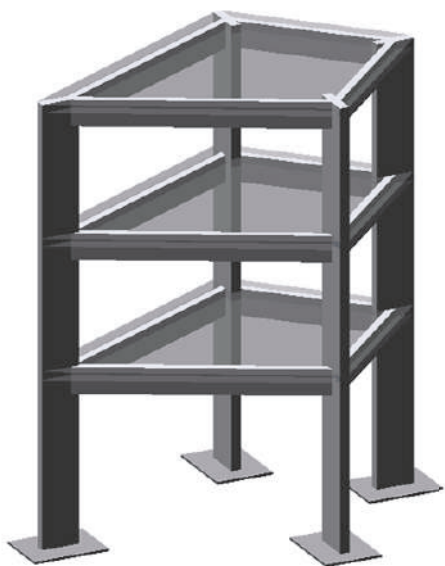
• Βήμα 3: Μοναδιαίες καταστάσεις στο ΓΚΣ (" $\xi_n=1$ ")

- Κατάσταση " $\xi_1=1$ "

Στον κόμβο 2 του ΓΚΣ επιβάλλεται μια μοναδιαία στροφή κατά την έννοια του καθολικού συστήματος αναφοράς. Η προκαλούμενη παραμόρφωση φαίνεται ποιοτικά στο σχήμα 3.4-15(β). Οι αναπτυσσόμενες ροπές στα άκρα των δομικών στοιχείων λαμβάνονται από τους πίνακες 1 και 2α του Παραρτήματος.

- Κατάσταση " $\xi_2=1$ "

Στη χορδή του στύλου 1-2 του ΓΚΣ επιβάλλεται μια μοναδιαία στροφή κατά την έννοια του καθολικού συστήματος αναφοράς. Η προκαλούμενη παραμόρφωση φαίνεται ποιοτικά στο σχήμα 3.4-15(γ). Οι αναπτυσσόμενες ροπές στα άκρα του στύλου 1-2 λαμβάνονται από τον πίνακα 1 του Παραρτήματος.



4

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

4. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΗΤΡΩΙΚΗ ΣΤΑΤΙΚΗ

Ο όρος *Μητρική Στατική* συμπεριλαμβάνει γενικώς το σύνολο των διαφόρων μητρικών μεθόδων ανάλυσης που αφορούν σε στατικά προβλήματα. Εντούτοις, στο παρόν βιβλίο ο όρος χρησιμοποιείται με στενότερη έννοια για να υποδηλώσει συνοπτικά τη σχεδόν αποκλειστικά σήμερα χρησιμοποιούμενη στη δομική πράξη μητρική μέθοδο στατικής ανάλυσης γραμμικών και άλλων φορέων που είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ) υπό τη μορφή της Άμεσης Μεθόδου Στιβαρότητας (ΑΜΣ) πάνω στη βάση της κλασικής Μεθόδου Μετακινήσεων (ΜΜ).

Πριν ξεκινήσουμε τη συστηματική παρουσίαση της μητρικής αυτής μεθόδου ανάλυσης κατασκευών, θα παρεμβάλουμε μία σύντομη Ιστορική σημείωση, στην οποία θα παρουσιαστεί η εξελικτική μετάβαση από τις "χειρωνακτικές" κλασικές μεθόδους στη Μητρική Στατική και στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων που προϋποθέτουν τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Ιστορική σημείωση

- Από τις κλασικές μεθόδους της Στατικής στη Μητρική Στατική

Από τη σύντομη σκιαγράφηση της εξελικτικής πορείας των κλασικών μεθόδων της Στατικής που δόθηκε στην παράγραφο 1.1 φάνηκε ότι οι βασικές αρχές των δύο κλασικών μεθόδων (ΜΔ και ΜΜ) είχαν ολοκληρωθεί ήδη στις αρχές του 20^{ου} αιώνα. Έως και τα μέσα του 20^{ου} αιώνα η ΜΔ και η ΜΜ κάλυπταν τις ανάγκες της πράξης σε μεγάλο βαθμό, κυρίως βέβαια για γραμμικούς φορείς. Για επιφανειακούς φορείς (δίσκους, πλάκες, κελύφη) τα πράγματα ήταν δυσκολότερα. Οι προσπάθειες εδώ επικεντρώνονταν αρχικά στην εξεύρεση ακριβών λύσεων για τις διαφορικές εξισώσεις που περιέγραφαν το εκάστοτε πρόβλημα και έτσι, εκ των πραγμάτων, περιορίζονταν σε φορείς σχετικά απλής γεωμετρίας, για τους οποίους συχνά συντάσσονταν και βοηθητικοί πίνακες κατάλληλοι για χρήση στην πράξη. Προσεγγιστικές μέθοδοι (π.χ. με βάση τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών) αναπτύχθηκαν επίσης, αλλά η εφαρμογή τους προσέκρουε συχνά στην έλλειψη επαρκών υπολογιστικών μέσων.

Άλλωστε, και για την επίλυση υπερστατικών γραμμικών φορέων υπήρχε ως πρακτικό όριο το πλήθος N των υπεράριθμων μεγεθών. Για συστήματα με πολλαπλή στατική ή γεωμετρική αοριστία έπρεπε να επιλυθεί ένα αντίστοιχα μεγάλο σύστημα γραμμικών εξισώσεων, γεγονός που αποτελούσε την εποχή εκείνη (μέχρι και τη δεκαετία του 1950) μια επίπονη, "χειρωνακτική" εργασία (ακόμη και για $N=10$), δεδομένου ότι το κυριότερο διαθέσιμο υπολογιστικό μέσο ήταν ο σχεδόν άγνωστος πλέον σήμερα *λογαριθμικός κανόνας* και ενδεχομένως η *μηχανική αριθμομηχανή* (βλ. Σχ. 4-1, άνω). Όπως αναφέρθηκε στην Ιστορική σημείωση της παραγράφου 1.1, οι προσπάθειες για παράκαμψη της επίλυσης μεγάλων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων οδήγησε (μεταξύ άλλων) στην ανάπτυξη των λεγόμενων *θαμιστικών* ('επαναληπτικών') μεθόδων, όπως είναι, π.χ., η και σήμερα ακόμη διδασκόμενη σε πολλά ανά τον κόσμο Πολυτεχνεία *μέθοδος Cross*.

Η κατάσταση αυτή αρχίζει να αλλάζει κατά τα τελευταία χρόνια πριν από τον 2^ο παγκόσμιο πόλεμο. Δημιουργείται η ανάγκη υπολογισμού κατασκευών, οι οποίες οδηγούν σε συστήματα εξισώσεων με πολύ μεγάλο πλήθος αγνώστων και των οποίων



Λογαριθμικός
κανόνας
(~1650-1970)



Μηχανική αριθμομηχανή (~1870-1970)



Οι πρώτοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές-
mainframes (~1950-1980) - Χωρίς οθόνη και
με χρήση διάτρητης κάρτας ως μέσου
εισαγωγής δεδομένων στον υπολογιστή.



1980: Apple IIe με κεντρική μονάδα (RAM 64kB), ενσωματωμένο πληκτρολόγιο, οθόνη καθοδικής λυχνίας, εξωτερικές μονάδες δισκετών (164kB).



1980: Commodore 64 με κεντρική μονάδα (RAM 64kB), ενσωματωμένο πληκτρολόγιο, οθόνη καθοδικής λυχνίας, εξωτερικές μονάδες δισκετών (164 kB).



Σύγχρονοι προσωπικοί υπολογιστές (αριστερά: laptop και netbook, δεξιά: desktop computer)

Σχ. 4-1 Από τον λογαριθμικό κανόνα στους σύγχρονους υπολογιστές

η πολυπλοκότητα δυσχέρανε σε μεγάλο βαθμό την εφαρμογή των υφιστάμενων τότε μεθόδων ανάλυσης. Πρώτα στην αεροναυπηγική, όπου πάντα υπήρχε η συνεχής προσπάθεια για μείωση του ίδιου βάρους των αεροσκαφών με ταυτόχρονη μεγιστοποίηση της αντοχής τους, αλλά στη συνέχεια και στον δομοστατικό τομέα δημιουργείται η απαίτηση για νέες, πιο ακριβείς και πιο γενικές στην εφαρμογή τους μεθόδους στατικού, αλλά και δυναμικού, υπολογισμού γραμμικών και επιφανειακών φορέων.

Οι ανάγκες αυτές αρχίζουν να βρίσκουν διέξοδο χάρη στην κατασκευή των πρώτων προγραμματιζόμενων ηλεκτρονικών υπολογιστών, με τη βοήθεια των οποίων γίνεται δυνατή η επεξεργασία μεγάλων συστημάτων γραμμικών εξισώσεων σε ανεκτό χρόνο. Ας σημειωθεί ότι ο πρώτος προγραμματιζόμενος ηλεκτρονικός υπολογιστής, ο Univac I, εμφανίστηκε στην αγορά το καλοκαίρι του 1951, εγκαινιάζοντας τους υπολογιστές τύπου mainframe, οι οποίοι τότε δεν διέθεταν ούτε οθόνη ούτε πληκτρολόγιο εισαγωγής δεδομένων. Τα τελευταία εισάγονταν προς επεξεργασία μέσω διάτρητων καρτών (βλ. Σχ. 4-1), ενώ ο προγραμματισμός των mainframes ήταν κατ' αρχάς δυνατός μόνο από ειδικούς με χρήση "γλώσσας μηχανής". Μόλις το 1957 εμφανίστηκε η Fortran I ως γλώσσα προγραμματισμού υψηλού επιπέδου για τον υπολογιστή IBM 704, η οποία μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ευρύτερα από μηχανικούς και επιστήμονες για την εκπόνηση δικών τους προγραμμάτων. Οι πρώτοι "προσωπικοί υπολογιστές" με τη σημερινή έννοια του όρου (Apple, Commodore κ.ά.) εμφανίστηκαν μόλις προς το τέλος της δεκαετίας του 1970 (βλ. Σχ. 4-1) και είχαν δυνατότητες που φαντάζουν πλέον αστείες συγκρινόμενες με τις επιδόσεις των σύγχρονων προσωπικών υπολογιστών. Αλλά και για τους πρώτους mainframe υπολογιστές η επίλυση, π.χ., ενός συστήματος 100 γραμμικών εξισώσεων άγγιζε τα όρια των δυνατοτήτων τους.

Η γρήγορη ανάπτυξη των προγραμματιζόμενων ηλεκτρονικών υπολογιστών μετά το 1950, σε συνδυασμό με τις απαιτήσεις των μηχανικών για καλύτερες μεθόδους υπολογισμού οδήγησαν από τα τέλη της δεκαετίας του 1940 στην ανάπτυξη των *μητρικών μεθόδων της Στατικής*. Διότι αφενός οι γραμμικοί συσχετισμοί μεγεθών που κυριαρχούσαν στη Στατική μπορούν να περιγραφούν εύκολα και αποτελεσματικά με τη βοήθεια μητρώων και αφετέρου οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές αποτελούν το ιδανικό μέσο για την επεξεργασία μητρώων και τη διενέργεια όλων των σχετικών αριθμητικών πράξεων.

Όπως σημειώθηκε στη Ιστορική σημείωση της παραγράφου 1.1, πρώτα "μετεξελίσσεται" η κλασική Μέθοδος Δυνάμεων στη μητρική *Μέθοδο Ενδοσιμότητας* και σχεδόν αμέσως ακολουθεί η "μετεξέλιξη" της κλασικής Μεθόδου Μετακινήσεων στη μητρική *Μέθοδο Στιβαρότητας*:

- *Κλασική Μέθοδος Δυνάμεων* → *Μητρική Μέθοδος Ενδοσιμότητας*

Οι πρώτες εργασίες με χρήση μητρώων αφορούν στη ΜΔ. Πρώτος ο Levy¹ το 1947 χρησιμοποιεί μητρώα ενδοσιμότητας κατά τον υπολογισμό αεροναυπηγικών κατασκευών. Τις θεωρητικές βάσεις της εργασίας του επεκτείνουν στα αμέσως

¹ Levy S., Computation of Influence Coefficients for Aircraft Structures with Discontinuities and Sweepback, J. Aeronaut.Sci., vol. 14, no.10, pp. 547-560, October 1947.

επόμενα χρόνια τόσο ο ίδιος τόσο και άλλοι ερευνητές¹, αναπτύσσοντας έτσι τη ΜΔ στην πλήρη μητρική της μορφή (*Μέθοδος Ενδοσιμότητας, Flexibility Method*).

- *Κλασική Μέθοδος Μετακινήσεων → Μητρική Μέθοδος Στιβαρότητας*

Με μικρή χρονική διαφορά εμφανίζεται και η ΜΜ στην πλήρη μητρική της μορφή (*Μέθοδος Στιβαρότητας, Stiffness Method*). Πρώτος και πάλι ο Levy² [1953], που τον απασχολούσε το πρόβλημα υπολογισμού των πτερυγίων μορφής δέλτα, δείχνει τα προτερήματα που έχει η χρήση των μητρών στιβαρότητας της ΜΜ αντί των μητρών ενδοσιμότητας της ΜΔ.

Όπως ήδη σημειώθηκε στην Ιστορική σημείωση της παραγράφου 1.1, η ανάπτυξη των μητρικών μεθόδων αποκορυφώνεται πολύ γρήγορα και ολοκληρώνεται επί της ουσίας περί το τέλος της δεκαετίας του 1950 με τις πρωτοποριακές πραγματείες του Έλληνα *Ιωάννη Αργύρη*³. Ο Αργύρης, που είχε υπόβαθρο σπουδών Πολιτικού Μηχανικού, αναπτύσσει τις δύο κλασικές δομοστατικές μεθόδους (που χρησιμοποιούνταν και στην αεροναυπηγική βιομηχανία⁴) συστηματικά και με συνέπεια στη μητρική τους μορφή βασιζόμενος σε θεμελιώδη ενεργειακά θεωρήματα και αναδεικνύοντας παράλληλα τη δυαδικότητά τους (βλ. Πίν. 3.9-2).

Οι μητρικές αυτές διατυπώσεις οδήγησαν στη φάση αυτή σε μια συστηματικοποίηση των κλασικών μεθόδων (ΜΔ και ΜΜ), χωρίς όμως εξαρχής να προχωρήσουν σε μια συνεπή διακριτοποίηση του φορέα και στη θεώρηση μεμονωμένων (πεπερασμένων) δομικών στοιχείων, αν και ο σπόρος του σκεπτικού αυτού ενυπάρχει στις εργασίες του Αργύρη. Το βήμα όμως από αυτή τη Μητρική Στατική, η οποία στην αρχή δεν ήταν παρά η μητρικά διατυπωμένη κλασική διαδικασία επίλυσης με τη ΜΔ ή τη ΜΜ, στη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (ΜΠΣ), ήταν πλέον τώρα μικρό.

- Από τη Μητρική Στατική στη ΜΠΣ με βάση τη φυσική εμποττία του μηχανικού

Ο κεντρική ιδέα της ΜΠΣ συνίσταται στην προσομοίωση ενός συνεχούς φορέα, του οποίου η μηχανική συμπεριφορά περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις, μέσω ενός διακριτοποιημένου προσομοιώματός του, του οποίου η μηχανική συμπεριφορά περιγράφεται από ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Με τη διακριτοποίηση του συνεχούς φορέα παρακάμπτεται η μεγάλη δυσκολία ή και αδυναμία επίλυσης διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν φορείς της δομικής πράξης, οι οποίοι κατά κανόνα έχουν πολύπλοκη γεωμετρία και σύνθετες συννοριακές συνθήκες. Η δυσκολία ή

¹ Βλ., π.χ., Wehle L. B., Lansing W., A Method for Reducing the Analysis of Complex Redundant Structures to a Routine Procedure, J. Aeronaut. Sci., vol. 19, no. 10, pp. 677-684, October 1952. Επίσης: Denke P. H., A Matrix Method of Structural Analysis, Proc. 2nd U.S. Matl. Congr. Appl. Mech., Am. Soc. Mech. Engr., pp. 445-457, June 1954.

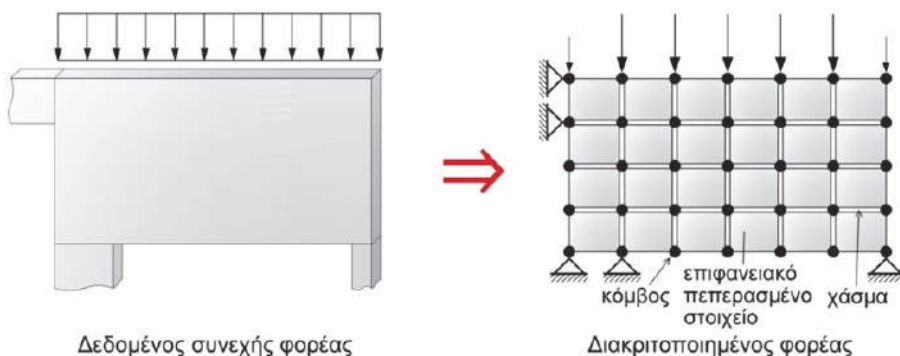
² Levy S., Structural Analysis and Influence Coefficients for Delta Wings, J. Aeronaut. Sci., vol. 20, pp. 677-684, 1953.

³ Argyris J., Energy theorems and structural analysis. In: Aircraft Engineering 26 (Oct-Nov 1954) and 27 (April-May 1955), και Argyris, J., Die Matrizen-theorie der Statik, Ingenieurarchiv XXV, 1957.

⁴ Ο Αργύρης ήταν παράλληλα τεχνικός σύμβουλος της αεροναυπηγικής εταιρείας Boeing, από τα ερευνητικά εργαστήρια της οποίας ξεπήδησε το 1956 η ιδέα των πεπερασμένων στοιχείων και το 1959 η Άμεση Μέθοδος Στιβαρότητας).

αδυναμία αυτή αφορά κυρίως -όχι όμως αποκλειστικά- επιφανειακούς φορείς. Επειδή μάλιστα η ανάγκη ακριβέστερων επιλύσεων προς εξοικονόμηση βάρους και κόστους χωρίς μείωση της ασφάλειας ήταν ιδιαίτερα μεγάλη σε αεροναυπηγικές κατασκευές, η ανάπτυξη της ΜΠΣ ξεκίνησε από τον χώρο της αεροναυπηγικής και αφορούσε σε επιφανειακούς φορείς.

Η πρώτη εργασία στην οποία παρουσιάζεται ένα επιφανειακό πεπερασμένο στοιχείο με τη σημερινή σημασία του όρου δημοσιεύεται το 1956 από τους Turner/Clough/Martin/Topp¹, οι οποίοι απασχολούμενοι, όπως και ο Levy, με το πρόβλημα του υπολογισμού πτερυγίων μορφής δέλτα, αναζητούσαν τρόπους ακριβέστερου προσδιορισμού των μητρώων στιβαρότητας δίσκων/πλάκων τριγωνικής μορφής, προκειμένου να τα χρησιμοποιήσουν όχι μόνο σε στατικές αλλά και σε δυναμικές αναλύσεις. Στην εργασία αυτή αναπτύσσεται το θεμελιώδες σκεπτικό της ΜΠΣ όπως την εφαρμόζουμε σήμερα: Πρώτα διαχωρίζεται (διακριτοποιείται) ο θεωρούμενος σύνθετος φορέας (δίσκος, πλάκα, κέλυφος) σε επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους σε διακριτά μόνο σημεία που χαρακτηρίζονται ως κόμβοι (Σχ. 4-2). Κατόπιν, για κάθε πεπερασμένο στοιχείο e αναπτύσσεται το κατάλληλο μητρώο στιβαρότητας $\mathbf{K}^e$ κάνοντας χρήση συναρτήσεων παρεμβολής, μέσω των οποίων προσεγγίζεται το πεδίο μετακινήσεών του. Τέλος, από τα επί μέρους μητρώα στιβαρότητας $\mathbf{K}^e$ των πεπερασμένων στοιχείων υπολογίζεται το μητρώο στιβαρότητας $\mathbf{K}$ του διακριτοποιημένου φορέα. Η όλη διαδικασία οδηγεί σε ένα συμμετρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων ανάλογο με εκείνο της κλασικής Μεθόδου Μετακινήσεων: $\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{p}$, όπου $\mathbf{u}$ οι άγνωστες μετακινήσεις και $\mathbf{p}$ η εξωτερική φόρτιση (Η σχέση $\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{p}$ της ΜΠΣ είναι ταυτόσημη με τις εξισώσεις ισορροπίας $\mathbf{K}\boldsymbol{\xi}+\mathbf{K}_0=0$ της ΜΜ, αν στην εξ. (3.9-1δ) θέσουμε $\mathbf{u}=\boldsymbol{\xi}$ και $\mathbf{p}=-\mathbf{K}_0$).



Σχ. 4-2 Διακριτοποίηση δίσκου με ορθογωνικά επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία

Την αρχική αυτή εργασία των Turner/Clough/Martin/Topp ακολουθούν στα αμέσως επόμενα χρόνια οι εργασίες των Turner², των Αργύρη/Kelsey¹, του Clough² και άλλων,

¹ Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C., Topp L. J., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aeronaut. Sci., vol. 23, no.9, pp. 805-824, September 1956.

² Turner M. J., The direct stiffness method of structural analysis, Structures and Materials Panel Paper, AGARD2 Meeting, Aachen, Germany, 1959.

οι οποίες συμπληρώνουν και συστηματικοποιούν τη νέα μέθοδο ανάλυσης. Λόγω του, κατά κάποια έννοια, "άμεσου" τρόπου με τον οποίο σχηματίζεται το μητρώο στιβαρότητας **K** (Ο τρόπος αυτός θα παρουσιαστεί στις παραγράφους 4.3.3-B και 4.4.4-B για δικτυωτούς και πλαισιακούς φορείς αντίστοιχα), η μέθοδος παίρνει το όνομα "*Άμεση Μέθοδος Στιβαρότητας*" [ΑΜΣ, στα αγγλικά: "Direct Stiffness Method", βλ. εργασία Turner (1959)]. Μπορεί να ειπωθεί ότι η ΑΜΣ αποτελεί, ως μέθοδος υπολογισμού, παράδειγμα απλότητας, σαφήνειας και κομψότητας. Καθιστά μάλιστα τη μετάβαση από τις μητρικές μεθόδους ανάλυσης στη γενική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ευκολότερα κατανοητή.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο όρος "πεπερασμένο στοιχείο" χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1960 στην εργασία του Clough³, ο οποίος στα ακόλουθα χρόνια συνεισέφερε πολλά από τη θέση του καθηγητή στο πανεπιστήμιο του Berkeley/California για την εφαρμογή της μεθόδου στο χώρο του Πολιτικού Μηχανικού. Άξιες αναφοράς είναι επίσης οι εργασίες του Melosh³, ο οποίος συστηματικοποίησε την ανάπτυξη μητρώων στιβαρότητας πάνω στη βάση παραλλακτικών αρχών, του Wilson⁴, ο οποίος ανέπτυξε το πρώτο "ανοικτό" και ελεύθερο προς χρήση πρόγραμμα ανάλυσης βάσει της ΜΠΣ και του Irons⁵, ο οποίος εισήγαγε τα λεγόμενα "ισοπαραμετρικά" πεπερασμένα στοιχεία. Με τις εργασίες αυτές πρακτικά ολοκληρώνεται επί της ουσίας η ΑΜΣ, της οποίας η ευρύτερη διάδοση στο χώρο των μηχανικών οφείλεται σε μεγάλο βαθμό και στις δημοσιεύσεις του Gallagher⁶.

Η προαναφερθείσα εργασία των Turner/Clough/Martin/Topp (1956) αποτέλεσε τη γενεσιουργό αρχή μιας θυελλώδους εξέλιξης της ΜΠΣ, η οποία μπορεί μεν να ξεπήδησε από την ανάγκη επίλυσης αεροναυπηγικών προβλημάτων, γρήγορα όμως υπερέβη τα αρχικά, στενά όρια της Αεροελαστικότητας και της Στατικής, βρίσκοντας, λόγω της προσαρμοστικότητάς της, εφαρμογή σε οποιονδήποτε τεχνικό τομέα που αντιμετωπίζει προβλήματα με μεγάλες υπολογιστικές απαιτήσεις.

- Η ΜΠΣ με βάση ενεργειακά θεωρήματα και τον λογισμό των μεταβολών

Με μικρή χρονική υστέρηση αρχίζουν να ασχολούνται συστηματικά με τη ΜΠΣ και ερευνητές στο πεδίο της Θεωρητικής Μηχανικής, σε μια προσπάθεια τοποθέτησης της νέας μεθόδου σε άψογες μαθηματικές βάσεις. Η εξέλιξη αυτή ξεκίνησε από τη διαισθητικά κατανοητή διαπίστωση ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της ΜΠΣ βελτιωνόταν όταν η διακριτοποίηση του φορέα γινόταν πυκνότερη, όταν δηλαδή αύξανε

¹ Argyris J. H. and Kelsey S., Energy Theorems and Structural Analysis, Butterworth Scientific Publications, London, 1960.

² Clough R.W., The finite element method in plane stress analysis, J. Str. Div., ASCE, Proc. 2nd Conf. on Electronic Computations, pp. 345-378, 1960.

³ Melosh R. J., Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, J. Am. Inst. Aeron. Astron., vol. 1, pp. 1631-1637, 1963.

⁴ Wilson E. L., Finite element analysis of two-dimensional structures, PhD dissertation, Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, 1963.

⁵ Irons B. M., Comments on 'Matrices for the direct stiffness method' by Melosh, J. Am. Inst. Aeron. Astron., vol. 2, pp. 403, 1964.

⁶ Gallagher R. H., A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis, Pergamno, Oxford, 1964.

το πλήθος πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόβλημα αυτό της σύγκλισης των αποτελεσμάτων προς την ακριβή λύση λειτούργησε ως καταλύτης οδηγώντας στην επαναδιατύπωση της μεθόδου με βάση όχι πλέον την εποπτεία του μηχανικού, αλλά τις εργικές/ενεργειακές αρχές της Μηχανικής και τα θεωρήματα του λογισμού των μεταβολών (Για περισσότερα βλ. Ντισιώτας Γ., Ελαστοστατική, τόμ. 2, εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1978).

Η μαθηματοποίηση της ΜΠΣ από τη δεκαετία του 1960 και μετά οδήγησε σε μια συνεχή διεύρυνσή της και παράλληλα σε μια πληρέστερη θεωρητική τεκμηρίωσή της. Το αρχικό, αναπτυσσόμενο από μηχανικούς, εποπτικό σκεπτικό της μεθόδου με βάση τα φυσικά δομικά (πεπερασμένα) στοιχεία στα οποία διαχωρίζεται ο φορέας μπόρεσε να αντικατασταθεί από ένα πιο αφηρημένο μαθηματικό υποκατάστατο: από μία μικρή υποπεριοχή του πεδίου (π.χ. του δομικού φορέα) για την οποία η λύση (π.χ. οι μετακινήσεις) προσεγγίζεται με τη βοήθεια κατάλληλων συναρτήσεων παρεμβολής (συναρτήσεις μορφής). Με τη νέα αυτή πολύ γενικότερη θεώρηση η ΜΠΣ υπερέβη όχι μόνο τα στενά όρια της Στατικής των Κατασκευών, αλλά και ολόκληρης της Μηχανικής των Στερεών Σωμάτων. Για την εφαρμογή της αρκεί η μαθηματική διατύπωση του εκάστοτε προβλήματος με τη μορφή ενός συναρτησιακού που πρέπει να στασιμοποιηθεί/ελαχιστοποιηθεί. Η επίλυση του προβλήματος στασιμοποίησης/ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού αυτού ακολουθεί την τυπική διαδικασία επίλυσης της ΜΠΣ, χωρίς την ανάγκη ανάπτυξης κάποιου "φυσικού" πεπερασμένου στοιχείου. Π.χ., σε προβλήματα διάδοσης θερμότητας ή σε προβλήματα αεροδυναμικής δεν απαιτείται η ανάπτυξη ενός "πεπερασμένου στοιχείου θερμοκρασίας" ή ενός "πεπερασμένου στοιχείου αέρα". Οι θεωρητικότερες αυτές ιδέες που γονιμοποίησαν σε εντυπωσιακό βαθμό την εφαρμογή της ΜΠΣ έγιναν ευρύτερα γνωστές με τη δημοσίευση του βιβλίου των Zienkiewicz και Cheung¹, οι οποίοι κατέδειξαν την εφαρμοσιμότητα της ΜΠΣ σε όλα τα προβλήματα που μπορούν να διατυπωθούν υπό τη μορφή μιας παραλλακτικής αρχής. Σημειώνεται ότι το προαναφερθέν βιβλίο ήταν το πρώτο σύγγραμμα που πραγματεύθηκε συστηματικά την ΜΠΣ.

- Οι παραλλαγές της ΜΠΣ

Το βασικό σκεπτικό της ΜΠΣ συνίσταται επί της ουσίας στον διαχωρισμό του φορέα (πεδίου) σε επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία (υποπεριοχές) συνδεδεμένα μεταξύ τους μόνο στους κόμβους τους (σε διακριτά σημεία). Η διατύπωση όμως της μεθόδου μπορεί να γίνει με διαφορετικούς τρόπους, οι οποίοι οδηγούν σε αντίστοιχες παραλλαγές της. Γενικά μπορεί κανείς να διακρίνει τρεις διαφορετικές παραλλαγές της ΜΠΣ:

Γ1. Η ΜΠΣ ως μέθοδος ενδοσιμότητας αποτελεί εξέλιξη της κλασικής μεθόδου υπεραριθμικών δυνάμεων και της μητρικής διατύπωσής της (βλ. Πίν. 3.9-2). Η ανάπτυξή της βασίζεται στην αρχή των συμπληρωματικών δυνατών έργων ή στην αρχή της ελάχιστης τιμής του συμπληρωματικού ελαστικού δυναμικού ή σε άλλα συναφή ενεργειακά θεωρήματα. Τα πρωτογενή άγνωστα μεγέθη είναι μεγέθη έντασης και συνεπώς οι συναρτήσεις παρεμβολής που χρησιμοποιούνται για την

¹ Zienkiewicz O. C. and Cheung Y. K., The Finite Element Method in Continuum and Structural Mechanics, MacGraw Hill, 1967.

περιγραφή της συμπεριφοράς των πεπερασμένων στοιχείων είναι συναρτήσεις τάσεων/δυνάμεων.

Γ2. Η ΜΠΣ ως μέθοδος σιβαρότητας αποτελεί εξέλιξη της κλασικής μεθόδου υπεραρίθμων μετακινήσεων και της μητρικής διατύπωσής της (βλ. Πίν. 3.9-2). Η ανάπτυξή της βασίζεται στην αρχή των δυνατών έργων ή στην αρχή της ελάχιστης τιμής του ελαστικού δυναμικού ή σε άλλα συναφή ενεργειακά θεωρήματα. Τα πρωτογενή άγνωστα μεγέθη είναι μεγέθη παραμόρφωσης και συνεπώς οι συναρτήσεις παρεμβολής που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της συμπεριφοράς των πεπερασμένων στοιχείων είναι συναρτήσεις παραμορφώσεων/μετακινήσεων.

Γ3. Η ΜΠΣ ως μικτή/υβριδική μέθοδος χρησιμοποιεί συναρτήσεις παρεμβολής που περιέχουν όχι μόνο μεγέθη παραμορφώσεων/μετακινήσεων, αλλά και μεγέθη τάσεων/δυνάμεων. Η ανάπτυξή της βασίζεται σε κάποια κατάλληλα τροποποιημένη (μικτή/υβριδική) ενεργειακή αρχή. Η θεώρηση αυτή οδηγεί στα λεγόμενα μικτά ή υβριδικά πεπερασμένα στοιχεία και σε συστήματα εξισώσεων με άγνωστα μεγέθη όχι μόνο παραμορφώσεις/μετακινήσεις, αλλά και τάσεις/δυνάμεις. Σημειώνεται όμως ότι με κατάλληλη απαλοιφή των άγνωστων μεγεθών έντασης κατά τον υπολογισμό των μητρώων των στοιχείων μπορεί στο τελικό προς επίλυση σύστημα εξισώσεων να εμφανίζονται ως άγνωστα μεγέθη μόνο οι μετακινήσεις των κόμβων του φορέα.

- Η ραγδαία ανάπτυξη της ΜΠΣ μετά το 1970

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν τις προαναφερθείσες εξελίξεις η ΜΠΣ γνώρισε μια φρενήρη ανάπτυξη με εφαρμογές σε όλους σχεδόν τους τεχνολογικούς τομείς. Στην ανάπτυξη και στην ευρεία διάδοσή της συνέβαλε βέβαια καθοριστικά η επίσης αλματώδης ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, χωρίς τους οποίους η χρήση της ΜΠΣ θα ήταν πρακτικά αδύνατη. Αν η δεκαετία 1950 μπορεί να χαρακτηριστεί ως η γενεσιουργός φάση της ΜΠΣ και η δεκαετία του 1960 ως η φάση ανάπτυξης των θεωρητικών της βάσεων, τότε η δεκαετία του 1970 μπορεί να θεωρηθεί ως η περίοδος ωρίμανσης της μεθόδου. Το βιβλίο του Bathe¹ αντανάκλα την τεχνογνωσία της περιόδου αυτής, η οποία στην πράξη αποτυπώνεται στη δημιουργία αξιόλογων, μεγάλων και πολύπλευρων προγραμμάτων Η/Υ όχι μόνο για την ανάλυση κατασκευών, αλλά και γενικότερα για την επίλυση κάθε είδους προβλημάτων της Μηχανικής με πεπερασμένα στοιχεία.

Μετά το 1980 η ΜΠΣ μαθηματικοποιείται περαιτέρω και επεκτείνεται σε προβλήματα πέραν της Μηχανικής, αποκτά περισσότερες παραλλαγές όσον αφορά στη διατύπωση εξειδικευμένων πεπερασμένων στοιχείων και εμπλουτίζεται με διάφορες νέες εξειδικευμένες αριθμητικές τεχνικές (π.χ. στοχαστικά πεπερασμένα στοιχεία για τη διαχείριση προβλημάτων που εμπεριέχουν αβέβαιες ή τυχατικές παραμέτρους). Εντούτοις, μικρό μόνο ποσοστό των εξελίξεων αυτών αφορά σε πρακτικά θέματα άμεσης εφαρμογής στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού.

¹ Bathe K.-J., Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1982 (βλ. επίσης και τις νεώτερες εκδόσεις του βιβλίου).

Αυτό που αξίζει να τονιστεί -και ήδη σημειώθηκε στο τέλος της Ιστορικής σημείωσης της παραγράφου 1.1- είναι ότι η παραλλαγή της ΜΠΣ που επικράτησε γενικώς -αλλά και ειδικότερα στο πεδίο της στατικής και δυναμικής ανάλυσης δομικών κατασκευών ενδιαφέροντος Πολιτικού Μηχανικού- είναι η μέθοδος στιβαρότητας, στην οποία τα πρωτογενή άγνωστα μεγέθη είναι οι μετακινήσεις των κόμβων του φορέα και η οποία βασίζεται στην αρχή της ελάχιστης τιμής του δυναμικού ή, γενικότερα, στην αρχή των δυνατών έργων (βλ. Πίν. 3.9-2). Παράλληλα όμως χρησιμοποιούνται σε ορισμένες περιπτώσεις και άλλες "γενικευμένες" παραλλακτικές αρχές, όπως π.χ. των Washizu¹ και Hu² ή των Hellinger-Reissner³.

Βασικός λόγος για την επικράτηση της μεθόδου στιβαρότητας -και μάλιστα υπό τη μορφή της ΑΜΣ- είναι ότι υπερτερεί έναντι των άλλων ως προς την προγραμματιστική της κωδικοποίηση. Πράγματι, έχοντας μελετήσει στα προηγούμενα κεφάλαια τη ΜΔ και τη ΜΜ, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι η μητρική προσαρμογή της ΜΔ προσκρούει στη δυσκολία του αυτοματοποιημένου καθορισμού ενός στατικού κυρίου συστήματος, αφού για έναν δεδομένο υπερστατικό φορέα υπάρχουν προς επιλογή άπειρα στατικά κύρια συστήματα. Αντίθετα, το γεωμετρικό κύριο σύστημα που απαιτείται για τη μητρική εφαρμογή της ΜΜ είναι ένα και μοναδικό και ο προσδιορισμός του αυτοματοποιείται στον Η/Υ χωρίς καμία προγραμματιστική δυσκολία.

Όσον αφορά στις υβριδικές μεθόδους, αυτές παρουσιάζουν πλεονεκτήματα σε ορισμένα προβλήματα επιφανειακών φορέων, στους οποίους άλλωστε κατά κύριο λόγο βρίσκουν εφαρμογή. Ως μία ανάλογη διαδικασία από τον χώρο των ελαστικών γραμμικών φορέων μπορεί να αναφερθεί η *συνδυασμένη ταυτόχρονη εφαρμογή* της ΜΔ και της ΜΜ για την επίλυση του ίδιου φορέα.

Σημειώνεται πάντως ότι τα ευρέως διαθέσιμα σύγχρονα επαγγελματικά προγράμματα ανάλυσης κατασκευών με τη ΜΠΣ βασίζονται -με ελάχιστες μόνο εξαιρέσεις- στη μέθοδο στιβαρότητας, με την οποία και αποκλειστικά θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο.

- Η ΜΠΣ και ο ρόλος του ηλεκτρονικού υπολογιστή

Οι δυνατότητες των σύγχρονων ισχυρών υπολογιστών, που είναι πλέον προσιτοί σε όλους, έθεσαν οριστικά στο περιθώριο μία από τις βασικές παλαιότερες επιδιώξεις των μηχανικών, που ήταν η όσο το δυνατόν δραστικότερη μείωση του όγκου των αριθμητικών πράξεων. Έτσι, μία ολόκληρη σειρά μεθόδων υπολογισμού που αναπτύχθηκαν στο παρελθόν με μοναδικό σκοπό την ελαχιστοποίηση του πλήθους των αγνώστων μεγεθών του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων ή ακόμη και την πλήρη αποφυγή επίλυσης εξισώσεων (όπως π.χ. η περίφημες θαμιστικές μέθοδοι Cross και Kani) έπαυσαν σταδιακά να έχουν ιδιαίτερη σημασία στην πράξη.

Επίσης αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι με την αύξηση των δυνατοτήτων των υπολογιστών διευρύνονταν και οι εφαρμογές της ΜΠΣ, τόσο όσον αφορά στο μέγεθος

¹ Washizu K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, 3rd ed., 1982.

² Hu H. C., Variational Principles of Theory of Elasticity with Applications, Science Press, Beijing, 1984.

³ Reissner E., On a Variational Theorem in Elasticity, J. Math. Phys. 27 (1948).

των επιλυόμενων προβλημάτων (επίπεδο αμιγές πλαίσιο → χωρικό αμιγές πλαίσιο → μικτοί κτιριακοί φορείς με γραμμικά και επιφανειακά στοιχεία), όσο και στο είδος τους (στατική ανάλυση → δυναμική ανάλυση, γραμμική θεωρία → μη γραμμική θεωρία).

· *Η επικράτηση της ΜΠΣ ως Άμεση Μέθοδος Στιβαρότητας πάνω στη βάση της ΜΜ*

Όπως προαναφέρθηκε, ως μέθοδος ανάλυσης εφαρμόζεται σχεδόν αποκλειστικά σήμερα η ΜΠΣ ως Μέθοδος Στιβαρότητας υπό τη μορφή της ΑΜΣ πάνω στη βάση της κλασικής ΜΜ. Με τη ΜΠΣ μπορεί να επιλυθεί αποτελεσματικά οποιοσδήποτε δομικός φορέας της πράξης υπό οποιαδήποτε φόρτιση, ειδικά δε σε μεγάλες και σύνθετες κατασκευές η εφαρμογή της ΜΠΣ είναι επιβεβλημένη. Στη διάθεση του μηχανικού-μελετητή υπάρχουν αξιόλογα προγράμματα, που βασισμένα στην ΑΜΣ δίνουν δυνατότητες επίλυσης όχι μόνο προβλημάτων της γραμμικής Στατικής και Δυναμικής, αλλά και προβλημάτων θεωρίας 2^{ης} τάξης, μεγάλων μετακινήσεων, ελαστικής ευστάθειας, αλληλεπίδρασης εδάφους-ανωδομής, ανελαστικής συμπεριφοράς υπό στατική ή δυναμική φόρτιση και άλλων πολλών, που ακόμη και στο κοντινό παρελθόν ήταν δύσκολο να αντιμετωπιστούν ικανοποιητικά.

· *Οι απαιτήσεις της ΜΠΣ (γνώσεις του μελετητή, δυνατότητες του λογισμικού)*

Παρόλο όμως το υψηλό επίπεδο ανάπτυξης της ΜΠΣ και των αντίστοιχων προγραμμάτων, δεν πρέπει να λησμονείται ότι η ΜΠΣ είναι γενικώς μια προσεγγιστική μέθοδος (με εξαίρεση την εφαρμογή της σε γραμμικούς φορείς, εφόσον η διαφορική εξίσωση του προς επίλυση προβλήματος έχει ακριβή λύση), η οποία απαιτεί από τον χρήστη μεγάλη κατανόηση των παραδοχών της και των περιορισμών της. Κατά συνέπεια, τα σχετικά προγράμματα ανάλυσης δομικών φορέων μπορούν να χρησιμοποιηθούν με δόκιμο τρόπο μόνο από καλούς γνώστες της μεθόδου, ενώ η χρήση τους ως black-boxes, δηλαδή ως απλές "μηχανές" εισαγωγής δεδομένων και λήψης αποτελεσμάτων, είναι σε κάθε περίπτωση επισφαλής. Ως προσεγγιστική μέθοδος η ΜΠΣ έχει τα δικά της όρια απόδοσης και αξιοπιστίας, των οποίων η υπέρβαση μπορεί να οδηγήσει σε μέγιστα λάθη, που δυστυχώς δεν είναι πάντοτε εύκολα αντιληπτά. Το γεγονός αυτό επιτείνει

- (α) την απαίτηση για όλο και περισσότερες δυνατότητες γραφικής απεικόνισης και επεξεργασίας εισαγομένων και αποτελεσμάτων, με στόχο τη μέγιστη δυνατή εμποτεία και την ευχέρεια διενέργειας ελέγχων εκ μέρους του χρήστη μηχανικού, και
- (β) την απαίτηση για περαιτέρω βελτίωση της ευκολίας χρήσης των προγραμμάτων σε όλα τα στάδια των υπολογισμών, με στόχο την ευελιξία και τη γρήγορη διόρθωση/τροποποίηση των δεδομένων.

· *Η μετάθεση βάρους από τη διενέργεια υπολογισμών στη ρεαλιστικότερη προσομοίωση της κατασκευής*

Σήμερα, το πλήθος των προς επίλυση εξισώσεων δεν παίζει ουσιαστικά κανένα ρόλο στις συνήθεις περιπτώσεις της δομικής πράξης, καθώς ο μηχανικός είναι απαλλαγμένος από τον υπολογιστικό φόρτο. Οι όποιοι υπολογισμοί γίνονται με ταχύτητα και ακρίβεια από τον ηλεκτρονικό υπολογιστή, δίνοντας έτσι στον μηχανικό τη δυνατότητα να επικεντρώσει την προσοχή του σε θέματα ουσίας, όπως είναι

- (α) η ρεαλιστικότερη προσομοίωση της κατασκευής και της φόρτισης, και
- (β) η διενέργεια περισσότερων (παραμετρικών) επιλύσεων με παραλλαγές της αρχικής προσομοίωσης προς διαπίστωση τυχόν ευαισθησιών της κατασκευής υπό συγκεκριμένες φορτίσεις ("αναλύσεις ευαισθησίας").

Έτσι, το κέντρο βάρους των στατικών/δυναμικών υπολογισμών, ή γενικότερα της Στατικής Μελέτης, έχει μετατοπισθεί από τη διενέργεια αριθμητικών υπολογισμών στην κατανόηση των παραδοχών και των βασικών αρχών των υπολογιστικών μεθόδων πάνω στις οποίες στηρίζονται τα προγράμματα, καθώς επίσης και στον έλεγχο και την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Προς τούτο, η γνώση των "κλασικών" μεθόδων υπολογισμού "με το χέρι" -αν και όπως ήδη ειπώθηκε δεν χρησιμοποιούνται πρωτογενώς για την εκπόνηση των μελετών- είναι απαραίτητη, διότι οι μέθοδοι αυτές αποτελούν τη βάση αφενός για την κατανόηση των σύγχρονων υπολογιστικών μεθόδων και αφετέρου για τη διενέργεια υπολογιστικών ελέγχων και χονδρικών απλουστευμένων υπολογισμών.

Στόχος της προηγηθείσας σύντομης ιστορικής ανασκόπησης των μεθόδων επίλυσης δομικών φορέων -από τις κλασικές Μεθόδους Δυνάμεων και Μετακινήσεων στη σήμερα εφαρμοζόμενη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων- ήταν να διεγείρει το ενδιαφέρον του αναγνώστη για το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου και να συμβάλει στη συνειδητοποίηση της στενής σχέσης μεταξύ παλαιών (κλασικών) και σύγχρονων μεθόδων ανάλυσης κατασκευών.

4.1 Αντικείμενο και στόχοι του κεφαλαίου 4

Όπως αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου, ο όρος *Μητρική Στατική*, αν και συμπεριλαμβάνει το σύνολο των διαφόρων μητρικών μεθοδολογιών και μεθόδων που αφορούν σε στατικά προβλήματα, χρησιμοποιείται στο παρόν βιβλίο με στενότερη έννοια για να υποδηλώσει τη ΜΠΣ υπό τη μορφή της ΑΜΣ και τις σχετικές με αυτή μητρικές διαδικασίες που εφαρμόζονται για την επίλυση γραμμικών φορέων. Συνεπώς, η εδώ παρουσίαση της Μητρικής Στατικής, αν και εισαγωγικού επιπέδου, ακολουθεί τη γενικότερη λογική της ΜΠΣ, η οποία αποτελεί την κυρίαρχουσα σήμερα γενική μέθοδο ανάλυσης κατασκευών κάθε είδους και μορφής. Τίθενται έτσι στο παρόν κεφάλαιο οι βάσεις για περαιτέρω εμβάθυνση στη ΜΠΣ¹ και στην εφαρμογή της τόσο σε γραμμικούς όσο και σε επιφανειακούς φορείς (δίσκοι, πλάκες, κελύφη) και φορείς όγκου.

Όπως διαφάνηκε από την προηγηθείσα ιστορική ανασκόπηση, η ΜΠΣ μπορεί να παρουσιαστεί

- είτε με μαθηματικοποιημένο και γενικευμένο τρόπο, έχοντας ως θεωρητική βάση διάφορα ενεργειακά θεωρήματα ή παραλλακτικές αρχές,

¹ Π.χ., βλ.: Αβραμίδης Ι., Αθανατοπούλου Α., Μορφίδης Κ., *Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων [Προσομοίωση και Ανάλυση Κατασκευών - Μια Πρακτική Εισαγωγή]*, Εκδ. "σοφία", Θεσσαλονίκη 2017.

- είτε με απλούστερο τρόπο, χρησιμοποιώντας τη φυσική εποπτεία του μηχανικού και ορισμένες βασικές γνώσεις της Κλασικής Στατικής.

Στο κεφάλαιο αυτό, που έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, θα ακολουθηθεί ο δεύτερος τρόπος και θα παρουσιαστεί συστηματικά και λεπτομερώς η ΜΠΣ για την επίλυση γραμμικών φορέων υπό στατική φόρτιση. Ιδιαίτερα θα τονιστεί η διατύπωση της ΜΠΣ υπό τη μορφή της Άμεσης Μεθόδου Στιβαρότητας (ΑΜΣ), η οποία αποτελεί τη βάση για την κωδικοποίηση της ΜΠΣ στα σύγχρονα προγράμματα Η/Υ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι γραμμικοί φορείς (ακριβέστερα: τα γραμμικά προσομοιώματα δομικών φορέων) αποτελούν από διδακτική άποψη μία καλή επιλογή για την εισαγωγική παρουσίαση της ΜΠΣ, διότι μπορούν να επιλυθούν τόσο με τις κλασικές μεθόδους της Στατικής, όσο και με τη ΜΠΣ κάνοντας χρήση μιας απλής αριθμομηχανής (εφόσον βέβαια αποτελούνται από λίγα μόνο δομικά στοιχεία). Η διπλή αυτή δυνατότητα τους καθιστά κατάλληλους ως παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση της μετάβασης από τις "χειρωνακτικές" επιλύσεις με τις κλασικές μεθόδους, που γνωρίσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, στη σύγχρονη, πλήρως αυτοματοποιημένη επίλυσή τους βάσει της ΜΠΣ με χρήση Η/Υ.

Κατ' αρχάς, στην § 4.2, θα γίνει μια συνοπτική -χάριν εποπτείας- αναφορά στο βασικό σκεπτικό της ΜΠΣ και στα βασικά βήματα που περιλαμβάνει η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα με τη ΜΠΣ.

Στη συνέχεια, στην § 4.3, θα παρουσιαστούν και θα επεξηγηθούν λεπτομερώς τα βήματα αυτά με τη βοήθεια ενός πολύ απλού επίπεδου δικτυώματος, το οποίο -χάριν ευκολότερης κατανόησης και δυνατότητας παρακολούθησης των αριθμητικών πράξεων- αποτελείται από 3 μόνο ράβδους.

Κατόπιν, στην § 4.4, η διαδικασία επίλυσης θα επαναληφθεί με τις αναγκαίες προσαρμογές και επεκτάσεις που απαιτεί η εφαρμογή της ΜΠΣ σε πλαίσιακούς φορείς. Και πάλι -χάριν ανετότερης κατανόησης και παρακολούθησης- θα χρησιμοποιηθεί ένα απλό επίπεδο πλαίσιο.

Τέλος, η παρούσα εισαγωγή στη Μητρική Στατική θα κλείσει με την § 4.5, όπου θα παρουσιαστούν οι τρόποι με τους οποίους εφαρμόζεται η ΜΠΣ σε πλαίσιακούς φορείς με εσωτερικές αρθρώσεις.

Σε όλες τις προαναφερθείσες παραγράφους δίνονται κατάλληλα αριθμητικά παραδείγματα καθώς και ασκήσεις με λεπτομερή παρουσίαση των λύσεών τους.

4.2 Το βασικό σκεπτικό και τα βασικά βήματα της ΜΠΣ

Όπως γνωρίζουμε από την Κλασική Στατική, τα στατικά μεγέθη (εντασιακά και παραμορφωσιακά) οφείλουν να ικανοποιούν κατά τη στατική επίλυση οποιουδήποτε φορέα τρεις βασικές συνθήκες, οι οποίες είναι οι εξής (βλ. § 2.1.3):

- Οι συνθήκες ισορροπίας (ή στατικές συνθήκες) των μεγεθών έντασης (εξωτερικών και εσωτερικών). Αυτές εκφράζουν την ισορροπία μεταξύ των επιβαλλόμενων φορτίων και των λόγω αυτών αναπτυσσόμενων μεγεθών έντασης, δηλαδή των φορτίων διατομής στα δομικά στοιχεία του φορέα και των αντιδράσεων στις στηρίξεις του (στατικές συνοριακές συνθήκες).
- Οι συνθήκες συμβιβαστού (ή γεωμετρικές συνθήκες)¹ των μεγεθών παραμόρφωσης (εξωτερικών και εσωτερικών). Αυτές εκφράζουν τη γεωμετρική συμβατότητα μεταξύ των μετακινήσεων των διαφόρων σημείων του φορέα και των παραμορφώσεων των δομικών στοιχείων του, λαμβανομένων βέβαια υπόψη των συνθηκών στήριξης (γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες).
- Οι συνθήκες υλικής συμπεριφοράς (ή καταστατικοί νόμοι του υλικού). Αυτές συνδέουν τις παραμορφώσεις με τις εντάσεις. Ειδικότερα, στην περίπτωση γραμμικών φορέων, συνδέουν τις παραμορφώσεις ενός δομικού στοιχείου με τα φορτία διατομής του.

Υπενθυμίζεται ότι μέσα στα όρια της γραμμικής θεωρίας οι συνθήκες ισορροπίας καταστρώνονται στον απαραμόρφωτο φορέα (θεωρία 1^{ης} τάξης), οι συνθήκες συμβιβαστού γραμμικοποιούνται θεωρώντας τις μετακινήσεις απειροστές (π.χ., $\cos\varphi \approx 1$, $\tan\varphi \approx \varphi$, κτλ.) και το υλικό θεωρείται γραμμικά ελαστικό. Η τελευταία παραδοχή εκφράζεται από τον νόμο του Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), ο οποίος για γραμμικούς φορείς διατυπώνεται (υπό ορισμένες πρόσθετες παραδοχές) ως εξής: $N = EA\varepsilon$ για αξονική, $M = EI\kappa$ για καμπτική, $Q = GA_{\Sigma}\gamma$ για διατμητική και $M_T = GI_T\zeta$ για στρεπτική καταπόνηση.

Κατάλληλα συνδυαζόμενες, οι παραπάνω τρεις βασικές συνθήκες (οι οποίες με κατάλληλη προσαρμογή ισχύουν και στη Δυναμική των Κατασκευών) οδηγούν στη διατύπωση των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν το εκάστοτε πρόβλημα.

Δεδομένου ότι οι διαφορικές εξισώσεις σε λίγες μόνο απλές περιπτώσεις φορέων απλής γεωμετρίας και φόρτισης μπορούν να επιλυθούν αναλυτικά, για την επίλυση των κατά κανόνα σύνθετων φορέων της δομικής πράξης απαιτείται η εφαρμογή προσεγγιστικών μεθόδων, όπως η ΜΠΣ. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη Ιστορική σημείωση, η βασική ιδέα της ΜΠΣ συνίσταται στην υποδιαίρεση (διακριτοποίηση) του πεδίου ισχύος της διαφορικής εξίσωσης (δηλ. του δομικού φορέα) σε ένα πεπερασμένο πλήθος υποπεριοχών (δηλ. δομικών στοιχείων πεπερασμένων διαστάσεων → πεπερασμένα στοιχεία), οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους σε συγκεκριμένα μόνο σημεία που ονομάζονται κόμβοι,

¹ Ο θεωρητικός σωστός χαρακτηρισμός των σχέσεων μετακινήσεων-παραμορφώσεων είναι "γεωμετρικές συνθήκες" ή "κινηματικές συνθήκες". Οι σχέσεις αυτές καταχρηστικά μόνο χαρακτηρίζονται ως "συνθήκες συμβιβαστού" (βλ. σχετικά [Αβρ-Ι], § 3.3.4)

σχηματίζοντας έτσι τον *διακριτοποιημένο φορέα*. Στους γραμμικούς φορείς, όπου οι κόμβοι αποτελούν ούτως ή άλλως τα μόνα σημεία επαφής μεταξύ των πεπερασμένων στοιχείων, η "τοπολογία" των κόμβων χαρακτηρίζεται ως "φυσική". Αντίθετα, σε επιφανειακούς φορείς ή φορείς όγκου, η επαφή δύο γειτονικών στοιχείων παύει πλέον να είναι συνεχής (βλ. Σχ. 4-2). Αντί της αναζήτησης μιας ακριβούς λύσης για όλα τα σημεία του πεδίου (φορέα), τα οποία είναι άπειρα, η προσεγγιστική επίλυση περιορίζεται στον υπολογισμό των ζητούμενων αγνώστων μεγεθών (π.χ. των μετακινήσεων στη μέθοδο στιβαρότητας) μόνο στους κόμβους. Ο υπολογισμός των άγνωστων κομβικών μεγεθών επιτυγχάνεται με την ικανοποίηση των προαναφερθεισών τριών βασικών συνθηκών της Στατικής σε όλους τους κόμβους.

Προς τούτο, κάθε πεπερασμένο στοιχείο αποσπάται από τον διακριτοποιημένο φορέα, εξετάζεται ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα και η μηχανική του συμπεριφορά αποτυπώνεται με τη βοήθεια του *μητρώου στιβαρότητας* και του *διανύσματος φορτίου* του. Τα μητρώα αυτά προσδιορίζονται

- είτε αναλυτικά (δηλ. με ακριβή επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει το εκάστοτε πρόβλημα, εφόσον το πεπερασμένο στοιχείο έχει "απλή" γεωμετρία και φόρτιση)
- είτε, αν ο αναλυτικός προσδιορισμός δεν είναι εφικτός, προσεγγιστικά, με τη βοήθεια κατάλληλων *συναρτήσεων παρεμβολής* ή μορφής που προσεγγίζουν το ακριβές πεδίο μετακινήσεων.

Στην πρώτη περίπτωση, οι τρεις προαναφερθείσες βασικές συνθήκες της Στατικής ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του πεπερασμένου στοιχείου, οπότε το μητρώο στιβαρότητάς του χαρακτηρίζεται ως "ακριβές". Αντίθετα, στη δεύτερη και γενικότερη περίπτωση, οι συνθήκες αυτές δεν ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του στοιχείου αλλά μόνο "κατά μέσον όρο" μέσω της ικανοποίησης ενός ενεργειακού θεωρήματος ή μιας παραλλακτικής αρχής.

Στη συνέχεια, κάθε πεπερασμένο στοιχείο τοποθετείται και πάλι στη θέση που κατείχε στον διακριτοποιημένο φορέα και συνδέεται με τα γειτονικά του στοιχεία μόνο στους κόμβους (*σύνθεση* του διακριτοποιημένου φορέα). Ικανοποιούνται έτσι οι συνθήκες συμβιβαστού για τον διακριτοποιημένο φορέα.

Τέλος, σε κάθε κόμβο εξισώνονται τα εξωτερικά φορτία που δρουν σ' αυτόν με τις αντίστοιχες εσωτερικές δυνάμεις των στοιχείων που συντρέχουν στον κόμβο. Ικανοποιούνται έτσι οι συνθήκες ισορροπίας στους κόμβους του διακριτοποιημένου φορέα.

Η επίλυση των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν από την παραπάνω διαδικασία οδηγεί στον προσδιορισμό των άγνωστων κομβικών μετακινήσεων, από τις οποίες στη συνέχεια προκύπτουν με αντιδρομικό υπολογισμό όλα τα υπόλοιπα ζητούμενα εντασιακά και παραμορφωσιακά μεγέθη των πεπερασμένων στοιχείων (π.χ. τα φορτία διατομής των στοιχείων, η ελαστική τους γραμμή κτλ.).

Τονίζεται ότι στην περίπτωση των γραμμικών φορέων (με "φυσική τοπολογία" κόμβων) και εφόσον χρησιμοποιούνται ακριβή μητρώα στιβαρότητας και διανύσματα φόρτισης για τα πεπερασμένα στοιχεία τους, η επίλυση με τη ΜΠΣ μπορεί να χαρακτηριστεί ως "ακριβής", κατά την ίδια έννοια που θεωρούνται ακριβείς οι επιλύσεις με τις κλασικές Μεθόδους Δυνάμεων και Μετακινήσεων.

Η παραπάνω περιγραφείσα διαδικασία μπορεί να χωριστεί -χάριν της συστηματικής μελέτης που θα ακολουθήσει- σε 5 διακριτά βήματα (στάδια), που περιγράφονται στον πίνακα 4.2-1 για την περίπτωση της στατικής επίλυσης γραμμικών φορέων.

Τα 5 αυτά βήματα καθώς και οι διάφορες έννοιες που χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω σύντομη περιγραφή θα επεξηγηθούν λεπτομερώς στις αμέσως επόμενες παραγράφους με τη βοήθεια απλών στατικών φορέων.

Πίνακας 4.2-1 Τα 5 βασικά βήματα της ΜΠΣ (υπό τη μορφή της ΑΜΣ)

Βήμα 1^ο

Διακριτοποίηση του (μηχανικού προσομοιώματος του) φορέα και της φόρτισής του, δηλ. καθορισμός του υπολογιστικού προσομοιώματος (διακριτοποιημένος φορέας) αποτελούμενου από E πεπερασμένα στοιχεία. Στην περίπτωση των γραμμικών φορέων τα πεπερασμένα στοιχεία είναι κατά κανόνα ευθύγραμμα τμήματα με σταθερή διατομή σε όλο το μήκος τους.

Βήμα 2^ο

Θεώρηση των επί μέρους πεπερασμένων στοιχείων και των φορτίων τους, δηλ. σχηματισμός του μητρώου στιβαρότητας K^e και του διανύσματος φόρτισης s^e του κάθε πεπερασμένου στοιχείου ($e=1, \dots, E$).

Βήμα 3^ο

Σύνθεση του διακριτοποιημένου φορέα και της φόρτισής του από τα επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία του λαμβάνοντας υπόψη τις στηρίξεις του, δηλαδή σχηματισμός του μητρώου στιβαρότητας K_R και του μητρώου φόρτισης p_R .

Βήμα 4^ο

Επίλυση του προκύπτοντος αλγεβρικού συστήματος γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας $K_R u_R = p_R$ και υπολογισμός των άγνωστων μετακινήσεων u_R στους κόμβους του φορέα.

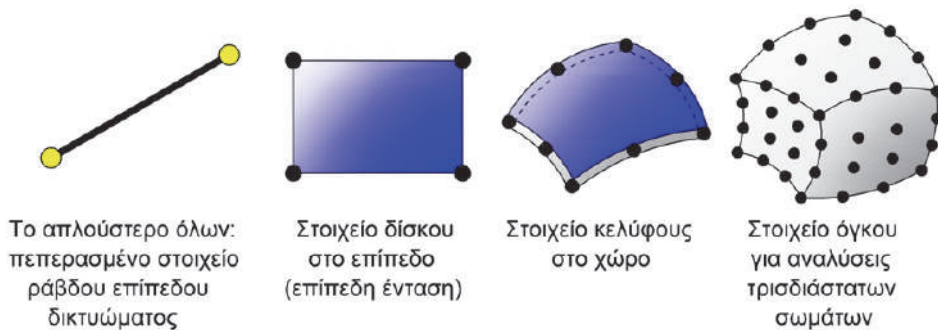
Βήμα 5^ο

Αντιδρομικός υπολογισμός όλων των υπόλοιπων ζητούμενων τελικών μεγεθών έντασης (π.χ. αντιδράσεις στηρίξεων και φορτία διατομής) και παραμόρφωσης (π.χ. ελαστική γραμμή).

4.3 Συστηματική εισαγωγική παρουσίαση της ΜΠΣ για γραμμικούς φορείς με τη βοήθεια ενός απλού επίπεδου δικτύωματος

4.3.1 Επιλογή του εισαγωγικού παραδείγματος

Αναμφίβολα, το απλούστερο δομικό πεπερασμένο στοιχείο είναι η ευθύγραμμη ράβδος, η οποία διαθέτει δύο κόμβους και μπορεί εξ ορισμού να μεταφέρει μόνο αξονικά φορτία. Στο άλλο άκρο, το πολυπλοκότερο ίσως πεπερασμένο στοιχείο (όσον αφορά στο πλήθος των κόμβων που διαθέτει) είναι το καμπύλο τρισδιάστατο στοιχείο (στοιχείο όγκου) που απεικονίζεται στο σχήμα 4.3.1-1. Ενδιάμεσως τοποθετούνται όλα τα υπόλοιπα στοιχεία, όπως π.χ. το στοιχείο επίπεδου δίσκου με 4 κόμβους ή το στοιχείο κελύφους με 8 κόμβους.



Σχ. 4.3.1-1 Απλά και σύνθετα πεπερασμένα στοιχεία

Το ενδιαφέρον σημείο είναι ότι η "μεταχείριση" των πεπερασμένων στοιχείων στο πλαίσιο της ΜΠΣ είναι επί της ουσίας ακριβώς ίδια, είτε πρόκειται για το απλούστερο είτε για το πολυπλοκότερο στοιχείο. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι για διδακτικούς λόγους αρκεί κατ' αρχάς η χρησιμοποίηση φορέων αποτελούμενων από τα απλούστερα δυνατά στοιχεία, δηλαδή από ράβδους. Τέτοιοι φορείς είναι τα γνωστά από την Κλασική Στατική *δικτύωματα* (βλ. Σχ. 4.3.1-2), των οποίων οι κόμβοι είναι εξ ορισμού "ιδανικές" αρθρώσεις, όπου και αποκλειστικά ενεργούν τα εξωτερικά φορτία. Αν όλοι οι κόμβοι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, το δίκτυωμα χαρακτηρίζεται ως *επίπεδο*, διαφορετικά ως *χωρικό* (*χωροδίκτυωμα*).

Σημείωση σχετικά με την προσομοίωση πραγματικών δικτυωμάτων:

Δεδομένου ότι το πρώτο σκέλος της ανάλυσης μιας πραγματικής κατασκευής είναι η προσομοίωσή της μέσω ενός μηχανικού προσομοιώματος (βλ. § 1.3.1), θα γίνει εδώ μια σύντομη αναφορά στην προσομοίωση που χρησιμοποιείται συνήθως στην πράξη για τον υπολογισμό πραγματικών δικτυωμάτων. Γενικά, ως *δίκτυωμα* χαρακτηρίζεται ένας δομικός φορέας αποτελούμενος από ευθύγραμμα μέλη, ο οποίος παραμένει στερεός (κινηματικά ευσταθής) ακόμη και αν δεχθούμε ότι όλοι οι κόμβοι του είναι ιδανικές καμπτικές αρθρώσεις. Από τον ορισμό αυτόν διαφαίνεται ότι τα πραγματικά δικτύωματα, όπως π.χ. οι κύριες δοκοί της γέφυρας του σχήματος 4.3.1-2 (α), δεν αποτελούνται οπωσδήποτε από αμφιαρθρωτές ράβδους και ότι οι κόμβοι τους δεν είναι πάντοτε ιδανικές καμπτικές αρθρώσεις. Έτσι, π.χ., σε πολλά πραγματικά μεταλλικά δικτύωματα οι συνδέσεις των γραμμικών στοιχείων στους κόμβους γίνονται με συγκόλληση,

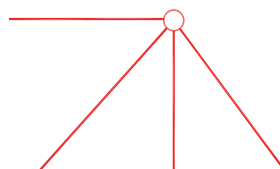
κοχλίωση ή ήλωση, οπότε προφανώς οι κόμβοι δεν μπορούν να θεωρηθούν ως ιδανικές αρθρώσεις. Επιπλέον, συχνά οι άξονες των ευθύγραμμων μελών δεν τέμνονται στο ίδιο σημείο, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.3.1-2(β)/αριστερά. Εξάλλου, η φόρτιση των πραγματικών δικτυωμάτων (π.χ. το ίδιο βάρος τους) δεν περιορίζεται μόνο σε συγκεντρωμένες δυνάμεις που ενεργούν αποκλειστικά στους κόμβους τους.

Είναι λοιπόν σαφές, ότι το "ιδανικό" δικτύωμα (Σχ. 4.3.1-2(γ)) αποτελεί μία εξιδανίκευση, δηλ. ένα απλουστευμένο μηχανικό προσομοίωμα της πραγματικής δικτυωτής κατασκευής και, συνεπώς, απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων που δίνει η επίλυση ενός ιδανικού δικτυώματος με τις εσωτερικές δυνάμεις που αναπτύσσονται σε πραγματικά δικτυώματα δεν είναι δυνατή. Εντούτοις, η πράξη έδειξε ότι για τον γενικό σχεδιασμό μιας δικτυωτής κατασκευής, όπως π.χ. για την κατ' αρχάς επιλογή των διατομών των μελών της, τα αποτελέσματα του απλουστευμένου προσομοιώματος επαρκούν κατά κανόνα πλήρως. Το γεγονός αυτό τεκμηριώνεται βέβαια και θεωρητικά. Γι' αυτό και η Στατική των Κατασκευών ασχολείται συστηματικά με τη μελέτη "ιδανικών" δικτυωμάτων και συνήθως παραλείπεται ο επιθετικός προσδιορισμός τους ως "ιδανικών".

Για περισσότερα περί προσομοίωσης δικτυωτών φορέων βλ. [Αβρ-Ι], § 7.7.1.

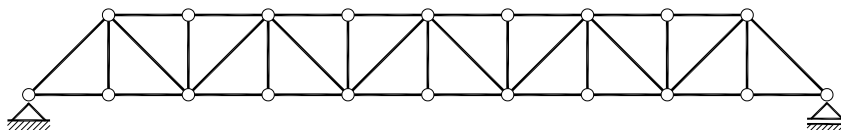


(α) Μεταλλική σιδηροδρομική γέφυρα με δύο κύριες δικτυωτές δοκούς



Εξιδανίκευση των συνδέσεων

(β) Πραγματικός κόμβος μεταλλικού δικτυώματος και η προσομοίωσή του ως *ιδανικής* άρθρωσης



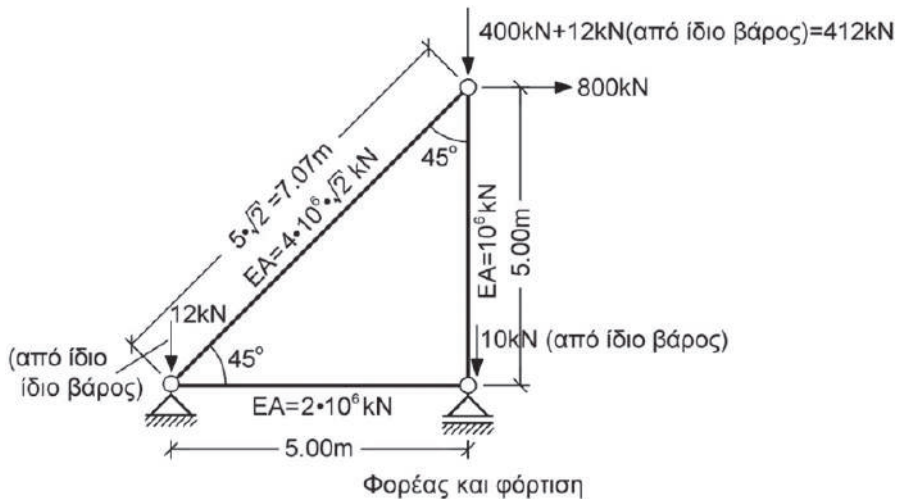
(γ) Προσομοίωση του πραγματικού δικτυώματος ως "*ιδανικού*" δικτυώματος

Σχ. 4.3.1-2 Δικτυωτές κατασκευές και η προσομοίωσή τους ως "*ιδανικών*" δικτυωμάτων

Μετά από αυτήν τη διευκρινιστική παρατήρηση, μένει να επιλέξουμε ένα κατάλληλο για τους σκοπούς μας δικτύωμα. Προκειμένου η εισαγωγική παρουσίαση της διαδικασίας επίλυσης με τη ΜΠΣ να μην επισκιαστεί από τη γεωμετρική πολυπλοκότητα του φορέα και για να είναι δυνατή η άμεση παρακολούθηση των αριθμητικών πράξεων, θα πρέπει το δικτύωμα που θα χρησιμοποιήσουμε να είναι όσο το δυνατόν απλό. Για τον σκοπό αυτόν επιλέγεται εδώ το απλούστερο δυνατό επίπεδο δικτύωμα, το οποίο αποτελείται από 3 μόνο ράβδους σταθερής διατομής και στηρίζεται ισοστατικά. Χάριν περαιτέρω απλούστευσης, οι ράβδοι θεωρούνται αφόρτιστες, αλλά το ίδιο βάρος τους (θεωρούμενο ίσο με 2kN ανά τρέχον μέτρο ράβδου) κατανέμεται ισομερώς στους εκατέρωθεν κόμβους. Επιπλέον, το δικτύωμα φορτίζεται με μία οριζόντια και μία κατακόρυφη δύναμη στον ελεύθερο κόμβο του. Τα γεωμετρικά, ελαστικά και φορτιστικά δεδομένα του δίνονται στο σχήμα 4.3.1-3.

Παρατήρηση:

Ακόμη απλούστερος θα ήταν βέβαια ένας φορέας αποτελούμενος από δύο ράβδους εν σειρά (στην ίδια ευθεία) με κατάλληλη στήριξη. Εντούτοις, ένας τέτοιος φορέας, αν και χρησιμοποιείται συχνά ως εισαγωγικό παράδειγμα, παρακάμπτει ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της ΜΠΣ, το οποίο είναι -όπως θα δούμε πιο κάτω- ο μετασχηματισμός από το τοπικό στο καθολικό σύστημα αναφοράς και αντιστρόφως.



Σχ. 4.3.1-3 Εισαγωγικό παράδειγμα: Το απλούστερο δυνατό "ιδανικό" δικτύωμα

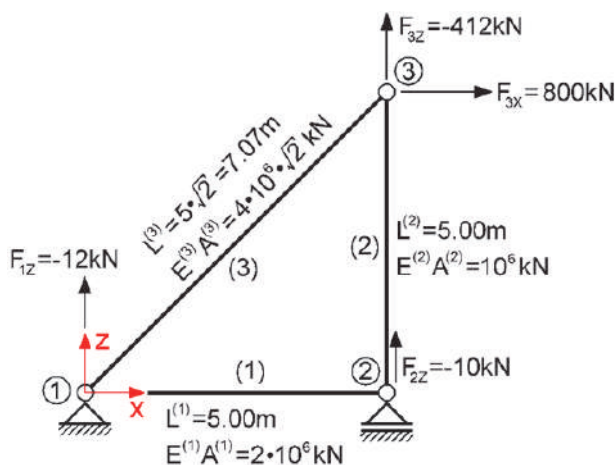
Το απλό αυτό εισαγωγικό παράδειγμα που επιλέξαμε είναι ένας ισοστατικός φορέας και, συνεπώς, για τον υπολογισμό των εντασιακών του μεγεθών (δηλ. των αξονικών δυνάμεων των ράβδων) αρκεί η στοιχειώδης εφαρμογή των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας. Παρομοίως, τα παραμορφωσιακά του μεγέθη (δηλ. οι μετακινήσεις των κόμβων του) προκύπτουν με στοιχειώδη τρόπο από τις αξονικές δυνάμεις των ράβδων. Καθίσταται έτσι ιδιαίτερα εύκολος ο έλεγχος των αποτελεσμάτων που θα δώσει η εφαρμογή της ΜΠΣ.

4.3.2 Βήμα 1^ο: Η διακριτοποίηση του φορέα (δικτυώματος) και της φόρτισης

Α. Καθορισμός και αρίθμηση των κόμβων και στοιχείων του φορέα

Στα δικτυώματα, αλλά και γενικότερα στους γραμμικούς φορείς με ευθύγραμμα δομικά στοιχεία σταθερής διατομής, ο καθορισμός και η αρίθμηση των κόμβων και των πεπερασμένων στοιχείων δεν παρουσιάζει καμία δυσκολία. Σημειώνεται όμως ότι σε επιφανειακούς φορείς, αλλά και σε γραμμικούς φορείς με δομικά στοιχεία μεταβλητής διατομής (που δεν αποτελούν αντικείμενο του παρόντος βιβλίου), η επιλογή των κόμβων απαιτεί εμπειρία και προσοχή. Στο παράδειγμά μας υπάρχουν τρεις κόμβοι (=αρθρώσεις) που αριθμούνται ως 1, 2 και 3 (Σχ. 4.3.2-1).

Μεταξύ των κόμβων είναι τοποθετημένες οι τρεις ράβδοι που συνιστούν τα πεπερασμένα στοιχεία του φορέα και αριθμούνται ως (1), (2) και (3). Τα μήκη των στοιχείων συμβολίζονται ως $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ και $L^{(3)}$, τα εμβαδά των διατομών τους ως $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ και $A^{(3)}$, και το μέτρο ελαστικότητας του καθενός ως $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ και $E^{(3)}$ (Σημ.: Στις περισσότερες περιπτώσεις της πράξης ο προς επίλυση φορέας αποτελείται από το ίδιο υλικό, π.χ. χάλυβα ή οπλισμένο σκυρόδεμα, οπότε το μέτρο ελαστικότητας E λαμβάνεται ίδιο για όλα τα πεπερασμένα στοιχεία). Ο άνω δείκτης, που είναι ο αριθμός κάθε στοιχείου, τοποθετείται μέσα σε παρενθέσεις για να μην συγχέεται με εκθέτη. Το εμβαδόν A και το μέτρο ελαστικότητας E καθενός πεπερασμένου στοιχείου θεωρούνται σταθερά καθ' όλο το μήκος του.



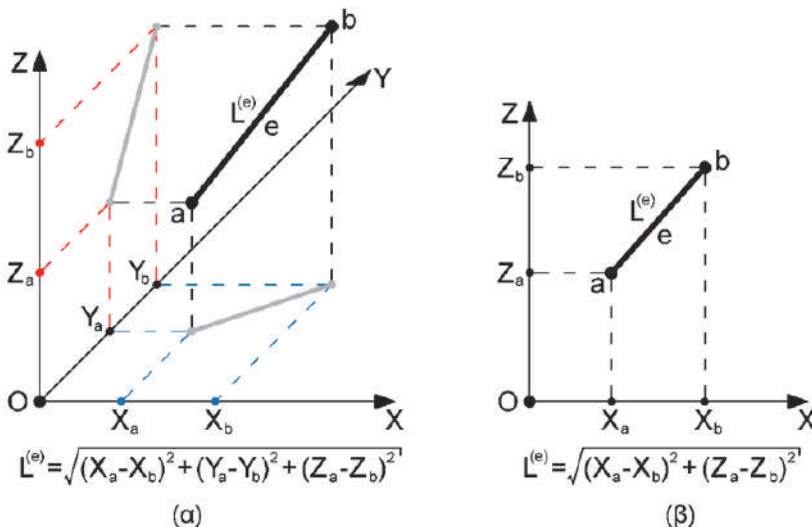
Σχ. 4.3.2-1 Αρίθμηση κόμβων και στοιχείων του διακριτοποιημένου φορέα

Τονίζεται ότι η σειρά αρίθμησης τόσο των κόμβων όσο και των πεπερασμένων στοιχείων έχει τυπικό (συμβατικό) χαρακτήρα και ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της επίλυσης, τα οποία αναφέρονται στο πραγματικό, φυσικό φαινόμενο της επιπόνησης του φορέα.

Β. Καθορισμός του καθολικού συστήματος αναφοράς

Η χρησιμοποίηση συστημάτων αναφοράς, καθώς και οι συνδεόμενες με αυτά συμβάσεις προσήμων των διαφόρων στατικών μεγεθών, δημιουργούν πολύ συχνά προβλήματα, τόσο κατά την εκμάθηση και κατανόηση της ΜΠΣ, όσο και κατά τη χρήση προγραμμάτων Η/Υ. Για τον λόγο αυτόν κρίνονται σκόπιμες οι παρακάτω παρατηρήσεις, οι οποίες σε επόμενες παραγράφους θα συμπληρωθούν με πρόσθετες επισημάνσεις.

Σημειώνεται κατ' αρχάς ότι στην Κλασική Στατική, κατά την επίλυση ενός φορέα "με το χέρι", κάνουμε χρήση των εξαρχής δεδομένων μηκών των στοιχείων του. Αντίθετα, σε επιλύσεις φορέων με προγράμματα Η/Υ, ο χρήστης δεν εισάγει πρωτογενώς τα μήκη των στοιχείων. Η γεωμετρία ενός προς επίλυση φορέα περιγράφεται μέσω των θέσεων των κόμβων του, οι οποίες προσδιορίζονται μέσω των συντεταγμένων τους σε ένα τρισδιάστατο *καρτεσιανό (ορθοκανονικό, δεξιόστροφο)* σύστημα αναφοράς $\{O, X, Y, Z\}$ ή απλούστερα $\{X, Y, Z\}$ ή X - Y - Z , το οποίο ονομάζεται *καθολικό σύστημα αναφοράς* (Χαρακτηρίζεται συχνά και ως *γενικό σύστημα αναφοράς* ή *σύστημα αναφοράς του φορέα*). Το σημείο O είναι η αρχή του συστήματος και οι τρεις άξονές του συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα X, Y, Z (Σχ. 4.3.2-2(α)). Ως *κατακόρυφος* άξονας επιλέγεται συνήθως ο άξονας Z , με θετική φορά "προς τα επάνω", ενώ οι δύο άλλοι άξονες X και Y ορίζουν ένα "οριζόντιο" επίπεδο. Από τις τιμές των συντεταγμένων των κόμβων αρχής a και τέλους b , οι οποίοι ορίζουν το εκάστοτε γραμμικό στοιχείο, υπολογίζεται αυτόματα το μήκος του στοιχείου αυτού, όπως και άλλα χρήσιμα δεδομένα (π.χ. η γωνία κλίσης του άξονα του στοιχείου ως προς τους καθολικούς άξονες X, Y ή Z).



Σχ. 4.3.2-2 Καθολικό σύστημα αναφοράς (α) στον χώρο, (β) για τη μελέτη επίπεδων φορέων

