

## Κεφάλαιο Τέταρτο

## Κινηματική των Ρευστών

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται διεξοδικά η κίνηση των ρευστών στον χώρο (πεδίο ροής). Στην αρχή αναφέρονται τα είδη ροής, η ταξινόμηση των οποίων έχει σχέση είτε με ορισμένα "αισθητά" χαρακτηριστικά του πεδίου ροής, είτε με τη χωροχρονική μεταβολή των ιδιοτήτων του ρευστού. Στη συνέχεια εισάγονται οι έννοιες των ανύσματος θέσης (υλικού και χωρικού), γίνεται αναφορά στις μεθόδους περιγραφής των πεδίων ροής (Lagrange και Euler) και ορίζονται οι χρονικές παράγωγοι φυσικών μεγεθών (τοπική, υλική και ολική). Ακολουθούν οι ορισμοί ταχύτητας και επιτάχυνσης ροής και δίνονται οι εκφράσεις τους σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, επίσης, εισάγονται οι έννοιες των ρυθμών ροής μάζας και όγκου ρευστού διαμέσου απλών και κλειστών επιφανειών. Κατόπιν εξετάζονται οι τροχιές, οι ινώδεις φλέβες και οι ροϊκές γραμμές με τις οποίες παριστάνονται γραφικά τα πεδία ροής. Τέλος, εισάγεται η έννοια της ροϊκής συνάρτησης και γίνεται συσχέτιση αυτής με τη γεωμετρία ροής και την ογκομετρική παροχή του ρευστού.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ		ΣΕΛ.
4-1	Είδη Ροής Ρευστών .....	84
4-2	Ανύσματα Θέσης .....	94
4-3	Μέθοδοι Περιγραφής Πεδίων Ροής .....	95
4-4	Χρονικές Παράγωγοι Φυσικών Μεγεθών .....	98
4-5	Κίνηση Σωματιδίων Ρευστού σε Καμπύλη τροχιά .....	103
4-6	Ρυθμοί Ροής Μάζας και Όγκου Ρευστού .....	113
4-7	Γραφική Παράσταση Πεδίων Ροής .....	120
4-8	Η Έννοια της Ροϊκής Συνάρτησης .....	132
	Ανακεφαλαίωση .....	140
	Θέματα Σκέψης .....	141
	Ασκήσεις – Προβλήματα .....	144
	Προτεινόμενη Βιβλιογραφία .....	148

#### 4-1 Είδη Ροής Ρευστών

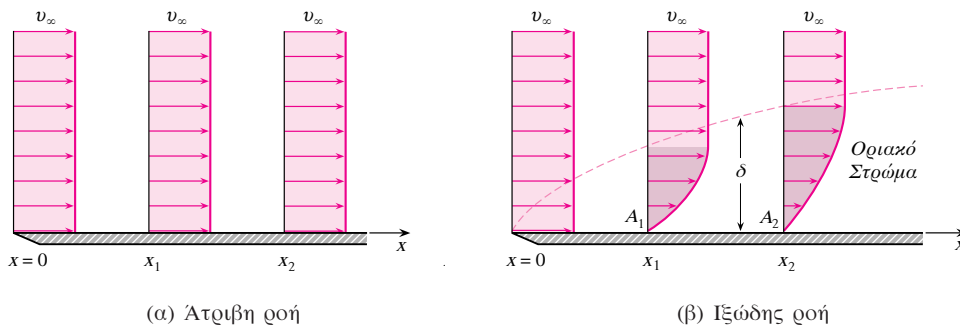
Με τον όρο **ροή** εννοούμε την κίνηση των ρευστών στο χώρο. Η περιοχή του χώρου στην οποία κινείται το ρευστό ονομάζεται **πεδίο ροής**. Ένα πεδίο ροής είναι πλήρως καθορισμένο, όταν δίνονται οι τιμές των **μεταβλητών** του σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  του πεδίου και για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Οι πιο σημαντικές από τις μεταβλητές του πεδίου ροής είναι η ταχύτητα  $\mathbf{v}$ , η πυκνότητα  $\rho$ , η πίεση  $p$  και η θερμοκρασία  $T$  του ρευστού. Επειδή τα ρευστά θεωρούνται **συνεχή μέσα**, καθεμία από τις μεταβλητές του πεδίου ροής, έστω η  $\Theta$ , μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά με μια συνάρτηση της μορφής:

$$\Theta = \Theta(x, y, z, t) \quad (4-1)$$

Μια δεδομένη ροή ρευστού μπορεί να ταξινομηθεί σε διάφορες κατηγορίες ή είδη, ανάλογα με το κριτήριο που χρησιμοποιείται κάθε φορά για το χαρακτηρισμό της. Τέτοια κριτήρια μπορεί να είναι η γεωμετρία ροής, η φύση του ρευστού και η χωρο-χρονική εξάρτηση των μεταβλητών του πεδίου ροής.

#### ΑΤΡΙΒΗ ΚΑΙ ΙΞΩΔΗΣ ΡΟΗ

**Άτριβη** ονομάζεται η ροή ρευστών με **ιξώδες μηδέν** ( $\mu = 0$ ). Τα ρευστά αυτής της κατηγορίας χαρακτηρίζονται ως **ιδανικά\***. Επειδή στη φύση δεν υπάρχει κανένα ρευστό με μηδενικό ιξώδες, η έννοια της **άτριβης ροής είναι ιδεατή**. Όμως η υιοθέτησή της απλουστεύει σημαντικά τη θεωρητική διερεύνηση προβλημάτων ροής ρευστών και οδηγεί σε συμπεράσματα που συμβάλλουν σημαντικά στην κατανόηση της ροής των πραγματικών ρευστών. Το χαρακτηριστικό της άτριβης ροής είναι ότι δεν επηρεάζεται από την παρουσία στερεών, επειδή στα σημεία επαφής των ιδανικών ρευστών με στερεά δεν αναπτύσσονται διατμητικές δυνάμεις. Αυτό δείχνεται παραστατικά στο το Σχήμα 4-1α όπου απεικονίζεται το ποιοτικό διάγραμμα κατανομής της ταχύτητας ενός ιδανικού ρευστού το οποίο κινείται παράλληλα επάνω σε οριζόντια πλάκα. Το ρευστό φτάνει στην αρχή της πλάκας με ομοιόμορφη ταχύτητα  $v_\infty$ . Από την σύγκριση των τριών κατανομών της ταχύτητας (στις θέσεις  $x=0$ ,  $x_1$  και  $x_2$ ) συμπεραίνεται ότι η ταχύτητα του ιδανικού ρευστού παραμένει σταθερή (ίση με  $v_\infty$ ) σε όλο το μήκος της πλάκας. Έτσι, τα ιδανικά ρευστά φαίνεται να **ολισθαίνουν** επάνω στην επιφάνεια του στερεού με το οποίο έρχονται σε επαφή.



**Σχήμα 4-1** Ροή ιδανικού και πραγματικού ρευστού επάνω σε επίπεδη στερεή επιφάνεια.

\* Σε ορισμένα συγγράμματα Ρευστομηχανικής, ως **ιδανικά ρευστά** ορίζονται τα υλικά τα οποία έχουν ιξώδες μηδέν και σταθερή πυκνότητα. Όμως, για το βιβλίο αυτό, ιδανικό μπορεί να είναι και ένα συμπίεστο ρευστό. Τα ασυμπίεστα ιδανικά ρευστά αναφέρονται συχνά και ως **ρευστά Pascal**.

**Ιξώδης** ονομάζεται η ροή πραγματικών ρευστών. Τα πραγματικά ρευστά έχουν όλα ιξώδες, ανεξάρτητα αν αυτό είναι μικρό ή μεγάλο. Αντίθετα προς την άτριβη ροή, η ιξώδης ροή επηρεάζεται σημαντικά από την παρουσία στερεού, όπως φαίνεται παραστατικά στο Σχήμα 4-1β. Από τη σύγκριση των τριών γραφημάτων (στις θέσεις  $x = 0$ ,  $x_1$  και  $x_2$ ) συμπεραίνεται ότι η κατανομή της ταχύτητας παύει να είναι ομοιόμορφη, όπως συμβαίνει στην άτριβη ροή. Παρατηρούμε ότι στα σημεία επαφής του ρευστού με την πλάκα η ταχύτητα είναι μηδέν. Η παρατήρηση αυτή, που είναι γενική, αποτελεί βασική οριακή συνθήκη για την ανάλυση ιξώδους ροής, η οποία είναι γνωστή ως **συνθήκη μη ολίσθησης**. Σύμφωνα με τη συνθήκη αυτή, η οποία έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά, τα πραγματικά ρευστά στα σημεία επαφής τους με στερεά αποκτούν την ταχύτητα του στερεού. Η συνθήκη μη ολίσθησης οφείλεται στην ιξώδη φύση των ρευστών και δεν έχει καμία σχέση με το είδος του υλικού ή την υφή της επιφάνειας του στερεού. Η συνθήκη μη ολίσθησης ισχύει όταν ισχύει και η υπόθεση του συνεχούς μέσου [§2-2].

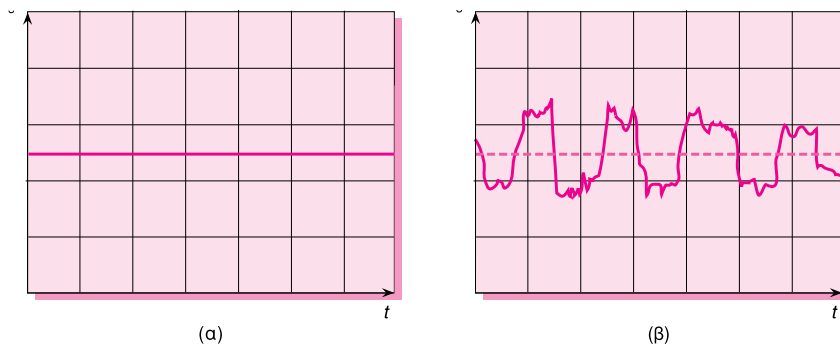
Η περιοχή του πεδίου ροής στην οποία συμβαίνει μεταβολή της ταχύτητας, από μηδέν στην επιφάνεια της πλάκας μέχρι την ταχύτητα  $u_\infty$  του αδιατάρακτου ρεύματος, ονομάζεται **οριακό στρώμα** [Κεφ. 12]. Το πάχος  $\delta$  του οριακού στρώματος αυξάνεται συνεχώς κατά την κατεύθυνση της ροής.

## ■ ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

**Στρωτή** ονομάζεται η ιξώδης ροή κατά την οποία τα σωματίδια ρευστού κινούνται ομαλά και κατά στρώματα ή στιβάδες. Σε κάθε στρώμα η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη σε όλη την έκταση της εγκάρσιας διατομής του στρώματος, συνεπώς, δεν υπάρχει συνιστώσα ταχύτητας κατά τη διεύθυνση την κάθετη προς τη φορά κίνησης του ρευστού. Άρα, στη στρωτή ροή δε συμβαίνει **μακροσκοπική** ανάμειξη των γειτονικών στρωμάτων ρευστού, δηλαδή ανταλλαγή μάζας με τη μορφή σωματιδίων. Η επικοινωνία μεταξύ των γειτονικών στρωμάτων ρευστών γίνεται μόνο σε μοριακό επίπεδο (**μοριακή ανάμειξη**), λόγω της θερμικής κίνησης των μορίων.

**Τυρβώδης** ονομάζεται η ιξώδης ροή κατά την οποία τα σωματίδια ρευστού κινούνται σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις κατευθύνσεις κατά εντελώς τυχαίο τρόπο. Η κίνηση των σωματιδίων του ρευστού μοιάζει σε μεγάλο βαθμό με τη θερμική κίνηση των μορίων. Έτσι κατά την τυρβώδη ροή εκτός από **μοριακή**, συμβαίνει και **μακροσκοπική ανάμειξη** των γειτονικών "στρωμάτων" του ρευστού, η οποία είναι πολύ πιο έντονη από την πρώτη. Το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυρβώδους ροής είναι ότι οι ιδιότητες του ρευστού σε τυχόν σημείο του πεδίου ροής διακυμαίνονται συνεχώς κατά εντελώς τυχαίο τρόπο. Στο Σχήμα 4-2 απεικονίζεται η μεταβολή της **τοπικής ταχύτητας**  $v$  του ρευστού με το χρόνο  $t$  στην περίπτωση των δύο ειδών ιξώδους ροής. Παρατηρούμε ότι στη στρωτή ροή η τοπική ταχύτητα δε μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου. Αντίθετα στην τυρβώδη ροή, η τοπική ταχύτητα του ρευστού παρουσιάζει, ακανόνιστη, συνεχή διακύμανση μεγάλης συχνότητας.

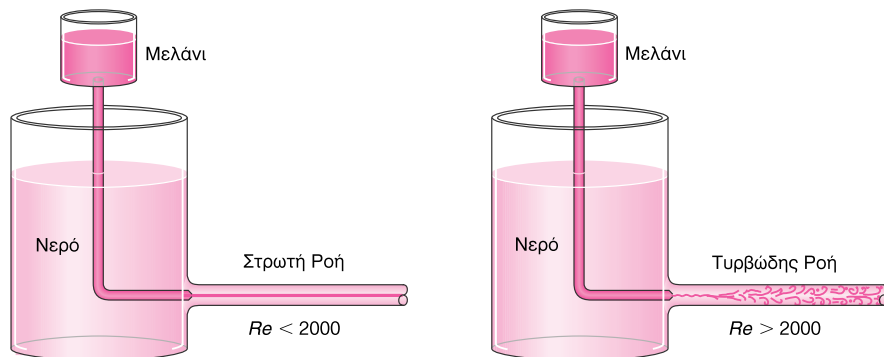
**Επισήμανση:** Η τυχαία διακύμανση των ιδιοτήτων του ρευστού καθιστά αδύνατη την πλήρη αναλυτική περιγραφή της τυρβώδους ροής, σε αντίθεση προς τη στρωτή ροή η οποία περιγράφεται θεωρητικά πλήρως. Η τυχαία διακύμανση των ιδιοτήτων στην τυρβώδη ροή θεωρείται ότι μπορεί να περιγραφεί αναλυτικά με τη χρησιμοποίηση στατιστικών μέσων όρων [Κεφ. 11].



Σχήμα 4-2 Μεταβολή της τοπικής ταχύτητας με τον χρόνο για: (α) στρωτή και (β) τυρβώδη ροή.

**Πειραματική Μελέτη Ξώδους Ροής:** Η ύπαρξη των δύο ειδών ξώδους ροής διαπιστώθηκε για πρώτη φορά από τον Hagen (το 1839). Ο Hagen παρατήρησε ότι κατά την ξώδη ροή ρευστών σε αγωγό κυκλικής διατομής, το είδος και τα βασικά χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονταν όταν η ταχύτητα του ρευστού γινόταν μεγαλύτερη από μια ορισμένη τιμή. Όμως, ο Hagen δεν κατάφερε να αναγνωρίσει τη βασική παράμετρο που επηρέαζε το είδος της ροής. Αυτό έγινε πολύ αργότερα (το 1883) από τον Reynolds, ο οποίος ήταν ουσιαστικά ο πρώτος ερευνητής που ασχολήθηκε συστηματικά με την πειραματική μελέτη της ξώδους ροής ρευστών σε αγωγούς κυκλικής διατομής. Για τη διασαφήνιση των δύο τύπων ροής, ο Reynolds χρησιμοποίησε τη συσκευή που εικονίζεται στο Σχήμα 4-3, η οποία προς τιμή αυτού φέρει το όνομά του.

Η **συσσκευή Reynolds** αποτελείται από μια δεξαμενή νερού στην οποία συνδέεται ένας οριζόντιος γυάλινος σωλήνας, στον οποίο διοχετεύεται το νερό της δεξαμενής με ρυθμιζόμενη παροχή (άρα και ταχύτητα). Το στόμιο αυτού του σωλήνα φέρει στρογγυλευμένα χείλη για την επίτευξη ομαλότερης ροής. Στην είσοδο του σωλήνα (και στο κέντρο του) καταλήγει ένας δεύτερος σωλήνας μικρής διαμέτρου με συγκλίνον το τμήμα εξόδου (ακροφύσιο). Το άλλο άκρο αυτού του σωλήνα προσαρμόζεται στον πυθμένα μιας μικρής δεξαμενής στην οποία περιέχεται ένα έντονα χρωματισμένο υγρό (π.χ. μελάνι). Έτσι από το στόμιο του ακροφυσίου εξέρχεται συνεχώς χρωματισμένο υγρό, τα σωματίδια του οποίου κινούνται κατά μήκος του άξονα του γυάλινου σωλήνα. Για μικρές ταχύτητες του νερού διαμέσου του γυάλινου σωλήνα, το χρωματισμένο υγρό σχηματίζει μια ευθεία νηματοειδή φλέβα η οποία περιβάλλεται, συμμετρικά, από



Σχήμα 4-3 Αρχή λειτουργίας της συσκευής που χρησιμοποίησε ο Reynolds.

το κινούμενο νερό. Αυτό δείχνει ότι το νερό κινείται στον σωλήνα κατά στρώματα τα οποία έχουν μορφή ομοαξονικών κυλινδρικών δακτυλίων. Οι ταχύτητες δύο γειτονικών στρωμάτων είναι διαφορετικές, χωρίς σωματίδια νερού του ενός στρώματος να μεταφέρονται στο άλλο. Αυτό δείχνει ότι, στις μικρές ταχύτητες, η ροή του νερού είναι στρωτή. Με την αύξηση της ταχύτητας, η ροή του χρωματισμένου υγρού διαταράσσεται και η έγχρωμη φλέβα από ευθεία μετατρέπεται σε κυματοειδή. Παραπέρα αύξηση της ταχύτητας του νερού, επιτείνει τη διαταραχή μέχρι σημείου όπου η νηματοειδής έγχρωμη φλέβα να διασπάται σε πλήθος στροβίλων ή δινών, η κίνηση των οποίων είναι ακανόνιστη. Οι δίνες αυτές αναμειγνύονται, πλευρικά, καλύπτοντας τελικά ολόκληρη τη διατομή του σωλήνα, με αποτέλεσμα τον ομοιόμορφο χρωματισμό του νερού στο τελευταίο τμήμα του γυάλινου σωλήνα. Η παρατηρούμενη ανάμειξη μεταξύ των γειτονικών "στρωμάτων" του νερού αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό γνώρισμα της τυρβώδους ροής. Ο Reynolds χρησιμοποιώντας σωλήνες διαφορετικών διαμέτρων και νερό σε διάφορες θερμοκρασίες, κατάφερε να διασαφηνίσει πλήρως τα δύο είδη ιξώδους ροής και να παρουσιάσει μια *αδιάστατη ομάδα* γεωμετρικών και φυσικών μεταβλητών, η οποία και φέρει το όνομά του, ως κριτήριο που χαρακτηρίζει το είδος της ιξώδους ροής. Ο **αριθμός Reynolds,  $Re$** , ορίζεται ως ο λόγος δυνάμεων αδρανείας προς ιξώδεις δυνάμεις:

$$Re = \frac{\text{Δυνάμεις αδρανείας}}{\text{Ιξώδεις δυνάμεις}} \quad (4-2)$$

Για ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής, ο αριθμός Reynolds δίνεται από τη σχέση:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \quad (4-3)$$

όπου  $d$  είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού,  $v$  η μέση ταχύτητα,  $\rho$  η πυκνότητα,  $\mu$  το δυναμικό ιξώδες και  $\nu$  το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

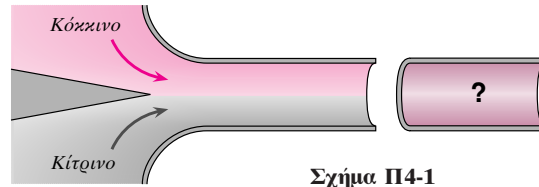
Η μετατροπή της ιξώδους ροής από στρωτή σε τυρβώδη θεωρείται ότι γίνεται όταν ο αριθμός Reynolds υπερβεί μια κρίσιμη τιμή,  $Re = Re_c$ , που ονομάζεται **κρίσιμος αριθμός Reynolds**. Στις εφαρμογές, όπως και στο παρόν βιβλίο, ως ανώτερο όριο ευστάθειας της στρωτής ροής σε αγωγό θεωρείται η τιμή  $Re_c = 2000$ . Στις συνήθεις ροές σε αγωγούς, η αλλαγή της ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται στην περιοχή αριθμών Reynolds από 2000 έως 4000. Υπό ορισμένες συνθήκες, η ροή σε αγωγό μπορεί να παραμείνει στρωτή και για  $Re > 2000$ , αλλά μια τέτοια κατάσταση είναι ασταθής και, με τη μικρότερη διαταραχή, μεταπίπτει σε τυρβώδη. Για  $Re < 2000$ , οι εξωτερικές διαταραχές της ροής, όσο σοβαρές και αν είναι αυτές, αποσβέννυνται και η ροή στον αγωγό (σε σχετικά μεγάλες αποστάσεις από το στόμιο εισόδου) γίνεται τελικά στρωτή.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-1

**Σκοπός:** Ο χαρακτηρισμός μιας ροής ως στρωτής ή τυρβώδους με βάση τον αριθμό Reynolds.

**Το πρόβλημα:** Δύο ρεύματα χρωμάτων, το ένα κίτρινο και το άλλο κόκκινο, εισέρχονται σε αγωγό κυκλικής διατομής με σταθερή ταχύτητα 2 m/s, όπως φαίνεται στο Σχήμα Π4-1. Ο αγωγός έχει μήκος 5 m και εσωτερική διάμετρο 25 cm. Τί χρώμα αναμένεται να έχει το ρεύμα ρευστου που

εξέρχεται από τον αγωγό, αν και τα δύο χρώματα έχουν πυκνότητα  $800 \text{ kg/m}^3$  και ιξώδες: (α)  $1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  και (β)  $0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ; Σύμφωνα με τη θεωρία των χρωμάτων, η ανάμειξη κίτρινο με κόκκινο χρώμα δίνει πορτοκαλί.



Σχήμα Π4-1

**Λύση:** α Προκειμένου να αποφανθούμε για το χρώμα του ρεύματος που εξέρχεται από τον αγωγό, πρέπει να γνωρίζουμε το είδος της ροής (στρωτή ή τυρβώδης). Έτσι, το πρώτο βήμα είναι ο υπολογισμός του αριθμού Reynolds της ροής με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης (4-3):

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{(800 \text{ kg/m}^3)(2 \text{ m/s})(0,25 \text{ m})}{1 \text{ Pa}\cdot\text{s}} = 400 \quad (1)$$

Επειδή ισχύει η σχέση  $Re < Re_c$ , η ροή είναι *στρωτή*. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ανάμειξη των σωματιδίων των δύο χρωμάτων. Άρα από το σωλήνα εξέρχονται δύο διακριτά ημικυκλικά ρεύματα, το ένα κίτρινο και το άλλο κόκκινο. Όμως λόγω της *μοριακής* ανάμειξης, η διεπιφάνεια των δύο ρευμάτων είναι πορτοκαλί.

**β** Για  $\mu = 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , ο αριθμός Reynolds της ροής είναι  $Re = 4 \times 10^4$ . Δηλαδή στην περίπτωση αυτή, η ροή είναι *τυρβώδης* (αφού  $Re > 2000$ ). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ανάμειξη των σωματιδίων των δύο χρωμάτων. Άρα, το ρεύμα που εξέρχεται από το σωλήνα είναι πορτοκαλί.

## ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΚΑΙ ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

*Ασυμπίεστη* ονομάζεται η ροή ρευστού (πραγματικού ή ιδανικού) κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες. Αντίθετα, αν αυτές οι μεταβολές είναι *σημαντικές*, η ροή χαρακτηρίζεται ως *συμπιεστή*.

Για το χαρακτηρισμό μιας ροής ως ασυμπιεστής ή συμπιεστής χρησιμοποιείται ως κριτήριο ο *αριθμός Mach*,  $M$ , που ορίζεται από τη σχέση:

$$M = \frac{\text{Δυνάμεις αδρανείας}}{\text{Δυνάμεις συμπίεσότητας}} \quad (4-4)$$

Η μαθηματική έκφραση της εξίσωσης (4-4) είναι:

$$M = v/\alpha \quad (4-5)$$

όπου  $v$  είναι η *τοπική ταχύτητα* του ρευστού και  $\alpha$  η *ταχύτητα του ήχου* στο ρευστό. Στις εφαρμογές, ως *ασυμπίεστη* χαρακτηρίζεται η ροή όταν ισχύει η σχέση:

$$M \leq 0,3 \quad \{\text{Συνθήκη ασυμπίεστης ροής}\} \quad (4-6)$$

και ως *συμπιεστή* ροή όταν ο αριθμός Mach είναι μεγαλύτερος από 0,3.

### Επισήμανσεις

- Όταν πρόκειται να αποφανθούμε για το είδος μιας ροής, εκείνο που πρέπει να εξετάσουμε είναι αν η συγκεκριμένη ροή μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστη και όχι αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο. Το γεγονός ότι μια ροή είναι ασυμπίεστη δε συνεπάγεται κατ' ανάγκη ότι και το ρευστό θα είναι ασυμπίεστο.
- Στις ροές υγρών που παρουσιάζουν τεχνικό ενδιαφέρον, η ταχύτητα του υγρού είναι μικρή (κυμαίνεται συνήθως μεταξύ  $1 \text{ m/s}$  και  $10 \text{ m/s}$ ). Από το άλλο μέρος, η

ταχύτητα του ήχου στα υγρά είναι αρκετά μεγάλη (της τάξης των 1000 m/s). Έτσι, ο αριθμός Mach στις ροές υγρών είναι πολύ μικρός. Αυτό σημαίνει ότι οι ροές υγρών ικανοποιούν τη συνθήκη (4-6), συνεπώς, μπορεί να θεωρηθούν ασυμπίεστες.

- Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με τις ροές αερίων, όπου η ταχύτητα του αερίου μπορεί να είναι ίση ή και μεγαλύτερη από την ταχύτητα του ήχου στο αέριο. Επομένως, οι ροές αερίων δεν ικανοποιούν πάντα τη συνθήκη (4-6), κάτι που πρέπει να ελέγχεται με ιδιαίτερη προσοχή. Για τις ροές αέρα που συναντώνται στην πράξη, η συνθήκη ασυμπίεστης ροής ικανοποιείται για ταχύτητες μικρότερες από 100 m/s, αφού η ταχύτητα του ήχου στον αέρα στις συνήθεις συνθήκες είναι περίπου 340 m/s.
- Συμπιεστές ροές εμφανίζονται συχνά σε πολλές τεχνικές εφαρμογές, όπως είναι τα διάφορα συστήματα συμπιεσμένου αέρα, η μεταφορά αερίων σε αγωγούς υπό υψηλή πίεση, τα πνευματικά συστήματα ελέγχου κ.ά. Τα φαινόμενα συμπίεσότητας παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στο σχεδιασμό συμπιεστών, αεριοστροβίλων, ατμοστροβίλων, σύγχρονων υπερηχητικών αεροπλάνων, προωθητικών πυραύλων κ.λπ. Η συμπίεστη ροή εξετάζεται διεξοδικά στο Κεφ. 15.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-2

**Σκοπός:** Ο χαρακτηρισμός μιας ροής ως ασυμπίεστης ή συμπιεστής με βάση τον αριθμό Mach.

**Το πρόβλημα:** Για τη διακίνηση υδρογόνου, θερμοκρασίας 15 °C και πίεσης 1 atm, χρησιμοποιείται ένας φυγοκεντρικός ανεμιστήρας, η φτερωτή του οποίου έχει διάμετρο 40 cm. Στις συνθήκες αυτές, η ταχύτητα του ήχου στο υδρογόνο είναι 1300 m/s. Αν η φτερωτή του ανεμιστήρα περιστρέφεται με ταχύτητα 20 000 rev/s, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι τα φαινόμενα συμπίεσότητας κατά τη μεταφορά του υδρογόνου είναι αμελητέα;

**Λύση:** Για να μην εμφανιστούν φαινόμενα συμπίεσότητας σε κανένα σημείο του πεδίου ροής του υδρογόνου, πρέπει να ικανοποιείται παντού η συνθήκη ασυμπίεστης ροής:

$$M = \frac{v}{a} \leq 0,3 \quad (1)$$

Τα πιο πιθανά σημεία να εμφανιστούν φαινόμενα συμπίεσότητας είναι κατά μήκος της περιφέρειας της φτερωτής του ανεμιστήρα, στα οποία η ταχύτητα  $v$  αποκτά τη μέγιστη τιμή της:

$$v = \omega R \quad (2)$$

όπου  $\omega$  είναι η ταχύτητα περιστροφής και  $R$  η ακτίνα της φτερωτής. Από το συνδυασμό των των εξισώσεων (1) και (2), λαμβάνεται η σχέση:

$$\omega \leq \frac{3a}{10R} = \frac{3(1300 \text{ m/s})}{10(0,20 \text{ m})} = 1950 \text{ rad/s} \quad (3)$$

Δηλαδή, η μέγιστη ταχύτητα περιστροφής της φτερωτής (σε rev/min) για την οποία δε θα εμφανιστούν φαινόμενα συμπίεσότητας είναι:

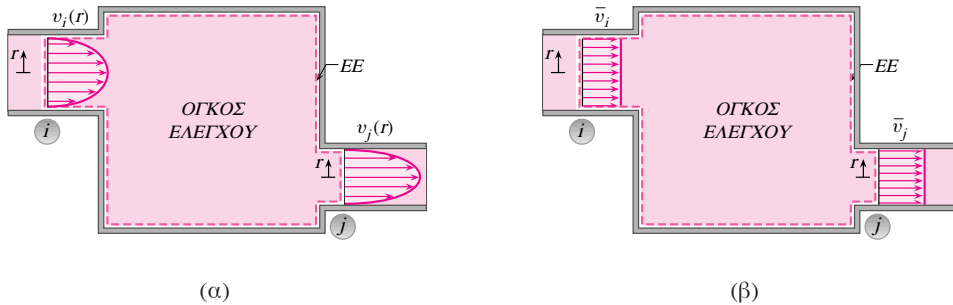
$$\omega_{\max} = (1950 \text{ rad/s}) \times (60 \text{ s/min}) \times (1 \text{ rev}/2\pi \text{ rad}) = 1820 \text{ rev/min} \quad (4)$$

που, όμως, είναι μικρότερη από την πραγματική ταχύτητα της φτερωτής,  $\omega = 20\,000 \text{ rev/min}$ . Άρα, στη συγκεκριμένη περίπτωση, δεν ισχύει η συνθήκη ασυμπίεστης ροής και, κατά συνέπεια, τα φαινόμενα συμπίεσότητας δεν είναι δυνατόν να αγνοηθούν.

## ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΙ ΑΝΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΡΟΗ ΣΕ ΔΙΑΤΟΜΗ

Για την κατανόηση των εννοιών αυτών, θεωρούμε τον όγκο ελέγχου (ΟΕ) που φαίνεται στο Σχήμα 4-4α. Η επιφάνεια ελέγχου (ΕΕ) διαπερνάται από το ρευστό σε δύο τμήματα, στις θέσεις  $i$  (είσοδος) και  $j$  (έξοδος). Οι καμπύλες  $v_i(r)$  και  $v_j(r)$  παριστάνουν τις κατανομές της ταχύτητας στις διατομές εισόδου  $A_i$  και εξόδου  $A_j$  του ΟΕ. Λόγω της ιξώδους φύσης του ρευστού, η ταχύτητα μεταβάλλεται από μηδέν στα σημεία επαφής του με τα τοιχώματα (*συνθήκη μη ολίσθησης*) έως μια μέγιστη τιμή στον άξονα των αγωγών. Η ακριβής μορφή των καμπυλών  $v_i(r)$  και  $v_j(r)$  εξαρτάται από τις συνθήκες ροής στις θέσεις  $i$  και  $j$ , αντίστοιχα. Όταν η ταχύτητα ροής του ρευστού μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο σε μια διατομή της επιφάνειας ελέγχου, η αντίστοιχη ροή χαρακτηρίζεται ως *ανομοιομορφή*.

Στις περισσότερες εφαρμογές γίνεται η *παραδοχή* ότι η ταχύτητα του ρευστού που διαπερνά μια διατομή της ΕΕ είναι σταθερή, ίση με τη μέση τιμή της [§4-1], σε όλη την έκταση της διατομής, η οποία συνήθως επιλέγεται να είναι *κάθετη* στην κύρια διεύθυνση ροής (Σχήμα 4-4β). Η ίδια παραδοχή γίνεται και για τις άλλες ιδιότητες του ρευστού (π.χ. την πίεση, τη θερμοκρασία και την πυκνότητα). Όταν υποθέσουμε ότι ισχύει αυτό, η ροή στη συγκεκριμένη διατομή χαρακτηρίζεται ως *ομοιομορφή*. Να σημειωθεί ότι η προσέγγιση της *ομοιομορφης* ροής σε διατομή έχει επίδραση κυρίως στην ταχύτητα, λόγω της σημαντικής μεταβολής της στη διατομή.



Σχήμα 4-4 (α) Ανομοιομορφή και (β) ομοιομορφή ροή στις διατομές  $A_i$  και  $A_j$  του όγκου ελέγχου.

**Επισήμανση:** Στα προβλήματα ροής ρευστών σε σωληνώσεις, με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια, θα υποθέτουμε πάντα ότι η ροή είναι *μόνιμη* και *ομοιομορφή* στις διατομές εισόδου και εξόδου από τη σωλήνωση. Έτσι, ακόμη και αν δεν αναφέρονται αυτές οι δύο παραδοχές, θα τις υπονοούμε σιωπηρά.

## ΜΟΝΙΜΗ ΚΑΙ ΜΗ ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

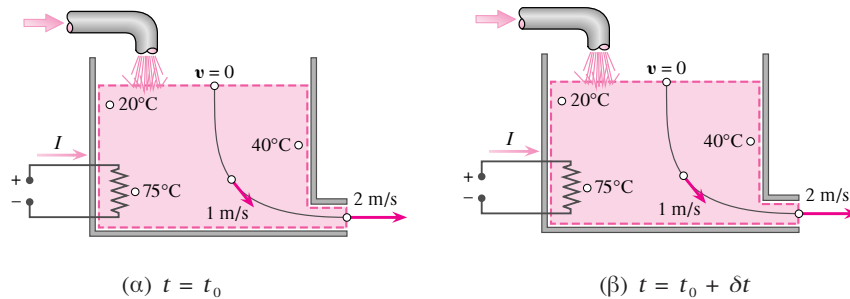
**Μόνιμη** ονομάζεται η ροή ρευστού κατά την οποία όλες οι μεταβλητές του πεδίου ροής σε κάθε σημείο του παραμένουν σταθερές με τον χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η μερική παράγωγος της τυχαίας μεταβλητής  $\Theta$  ως προς τον χρόνο είναι μηδέν:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \quad \{\text{Συνθήκη μόνιμης ροής}\} \quad (4-7)$$

Αν δεν ισχύει η συνθήκη αυτή, η ροή χαρακτηρίζεται ως *μη μόνιμη*. Σημειώνεται ότι η ισχύς της διαφορικής εξίσωσης (4-7) δεν αποκλείει η μεταβλητή  $\Theta$  να μεταβάλλεται

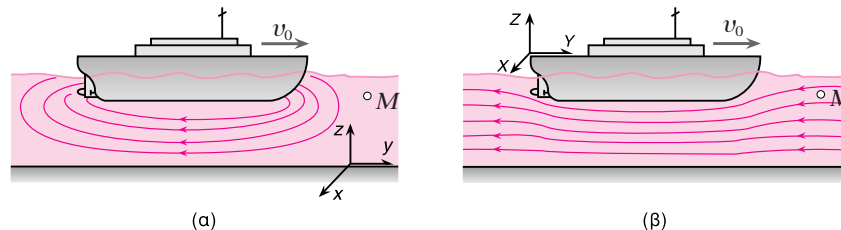
από σημείο σε σημείο μέσα στο πεδίο ροής, αλλά η τιμή της σε κάθε σημείο του πεδίου παραμένει σταθερή. Δηλαδή στη μόνιμη ροή, η μεταβλητή  $\Theta$  είναι συνάρτηση μόνο των συντεταγμένων  $(x, y, z)$  των σημείων του πεδίου ροής,  $\Theta = \Theta(x, y, z)$ .

Στην ειδική περίπτωση της ταχύτητας  $\mathbf{v}$ , η οποία ως γνωστόν είναι *ανυσματικό* μέγεθος, εκτός από το μέτρο, πρέπει να παραμένει σταθερή και η κατεύθυνσή της (δηλαδή η διεύθυνση και η φορά της). Στο Σχήμα 4-5 δίνονται δύο στιγμιότυπα μόνιμης ροής ρευστού διαμέσου ενός ακίνητου όγκου ελέγχου σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές



Σχήμα 4-5 Μόνιμη ροή ρευστού διαμέσου ενός ακίνητου όγκου ελέγχου.

**Επισήμανση:** Σε ορισμένες περιπτώσεις, η μη μόνιμη ροή μπορεί να μετατραπεί σε μόνιμη με κατάλληλη αλλαγή του συστήματος αναφοράς, ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού. Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας μετατροπής. Έστω ένα πλοιάριο το οποίο κινείται σε ρηχή λίμνη με σταθερή ταχύτητα  $u_0$  (βλ. Σχήμα 4-6). Για παρατηρητή που βρίσκεται στην όχθη της λίμνης, δηλαδή ως προς *ακίνητο* σύστημα αναφοράς  $xyz$  (Σχήμα 4-6α), η ροή του νερού μπροστά στο πλοίο είναι *μη μόνιμη*, επειδή εκεί οι συνθήκες ροής μεταβάλλονται σε σχέση με τον παρατηρητή και κάθε στιγμή είναι διαφορετικές. Έτσι η ταχύτητα του νερού σε ένα ορισμένο σημείο της λίμνης, π.χ. στο σημείο  $M$ , είναι μηδέν προτού περάσει το πλοίο, κατόπιν μεταβάλλεται καθώς πλησιάζει και απομακρύνεται από αυτό και, τέλος, η ταχύτητα ροής γίνεται πάλι μηδέν αφού το πλοίο περάσει από το σημείο  $M$ . Η ίδια ροή, για παρατηρητή που βρίσκεται επάνω στο πλοίο, δηλαδή ως προς *κινούμενο* σύστημα αναφοράς  $XYZ$  (Σχήμα 4-6β), είναι μόνιμη, αφού τα χαρακτηριστικά της ροής μπροστά στο πλοίο δε μεταβάλλονται σε σχέση με τον κινούμενο παρατηρητή, π.χ. η ταχύτητα του νερού στο σημείο  $M$  είναι σταθερή. Γενικά, όταν ένα σώμα κινείται μέσα σε ρευστό με σταθερή ταχύτητα  $u_0$ , η ροή που δημιουργείται από την κίνηση του σώματος είναι μόνιμη ως προς σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται, επίσης, με σταθερή ταχύτητα  $u_0$ .



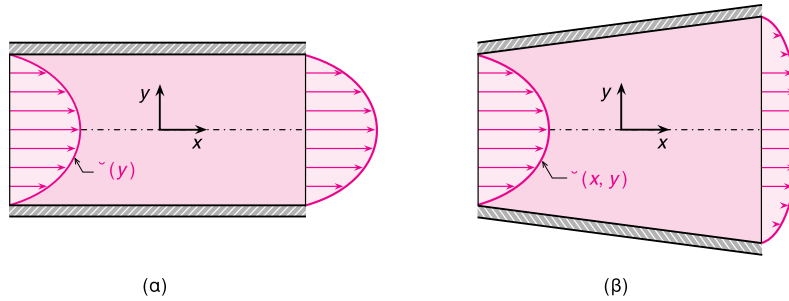
Σχήμα 4-6 Μετατροπή ροής από μη μόνιμη (α) σε μόνιμη (β) με αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από ακίνητο ( $xyz$ ) σε κινούμενο ( $XYZ$ ).

## ΜΟΝΟ-, ΔΙ- ΚΑΙ ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ

**Μονοδιάστατη** ονομάζεται η ροή στην οποία η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται ως προς μία συντεταγμένη (έστω τη  $x_1$ ) και, ενδεχομένως, τον χρόνο:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, t) \quad \{\text{Μονοδιάστατη ροή}\} \quad (4-8\alpha)$$

Μονοδιάστατη είναι π.χ. η ροή ρευστού μεταξύ δύο παράλληλων πλακών. Μια τέτοια ροή φαίνεται στο Σχήμα 4-7α, όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται μόνον ως προς  $y$ .



Σχήμα 4-7 Παραδείγματα (α) μονοδιάστατης ροής και (β) διδιάστατης ροής.

**Διδιάστατη** ονομάζεται η ροή στην οποία η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται ως προς δύο συντεταγμένες (έστω τις  $x_1, x_2$ ) και ενδεχομένως τον χρόνο. Δηλαδή:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, t) \quad \{\text{Διδιάστατη ροή}\} \quad (4-8\beta)$$

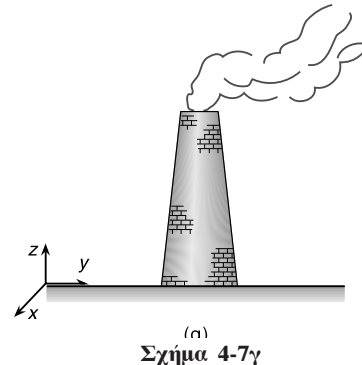
Διδιάστατη είναι π.χ. η ροή ρευστού μεταξύ δύο πλακών που συγκλίνουν ή αποκλίνουν κατά την κατεύθυνση της ροής. Μια τέτοια ροή φαίνεται στο Σχήμα 4-7β, όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται όχι μόνον ως προς  $y$ , αλλά και ως προς  $x$ .

**Τριδιάστατη** ονομάζεται η ροή στην οποία η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται και ως προς τις τρεις συντεταγμένες (έστω τις  $x_1, x_2, x_3$ ) και ενδεχομένως, τον χρόνο:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t) \quad \{\text{Τριδιάστατη ροή}\} \quad (4-8\gamma)$$

Τριδιάστατη είναι π.χ. η ροή του καπνού που εξέρχεται από μια καμινάδα (Σχήμα 4-7γ).

Η επίλυση των προβλημάτων τριδιάστατης ροής είναι πολύ πιο δύσκολη από εκείνη των προβλημάτων διδιάστατης και, κυρίως, μονοδιάστατης ροής. Επειδή όλα τα ρευστά ικανοποιούν τη συνθήκη μη ολίσθησης, η σχετική ταχύτητα ως προς τα στερεά με τα οποία το ρευστό έρχεται σε επαφή είναι μηδέν. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι περισσότερες ροές να είναι διδιάστατες ή τριδιάστατες. Στην ανάλυση των προβλημάτων ροής, ιδιαίτερα σε αγωγούς, χρησιμοποιείται συχνά η έννοια της *ομοιόμορφης ροής σε διατομή*. Όπως είναι φανερό, η υιοθέτηση αυτής της παραδοχής μετατρέπει μια (πραγματικά) διδιάστατη ροή σε (υποθετικά) μονοδιάστατη. Για παράδειγμα, με τη θεώρηση μέσω ταχυτήτων, η διδιάστατη ροή του Σχήματος 4-4α μετατρέπεται στη "μονοδιάστατη" ροή του Σχήματος 4-4β. Έτσι, στην πράξη, η έννοια της μονοδιάστατης ροής είναι λιγότερο περιοριστική και περιλαμβάνει κάθε ροή στην οποία αγνοούνται μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού κάθετα προς την κύρια διεύθυνση ροής. Με τη νέα αυτή θεώρηση,



(γ)  
Σχήμα 4-7γ

οι ροές ρευστών σε αγωγούς είναι μονοδιάστατες, ανεξάρτητα από το σχήμα τους (ευθύγραμμοι, καμπυλόγραμμοι ή οφιοειδείς). Τέλος, μονοδιάστατη θεωρείται η ροή και σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις όπου η κίνηση του ρευστού είναι προκαθορισμένη, όπως π.χ. η ροή υγρού το οποίο αναβλύζει από οπή που υπάρχει στο μέσο μιας πλάκας και κινείται ομοιόμορφα επάνω σε αυτήν κατά την ακτινική διεύθυνση. Στο παρόν βιβλίο, ο όρος *μονοδιάστατη ροή* αναφέρεται σε περιπτώσεις ροής ρευστών όπου ενδιαφερόμαστε κυρίως για *μέσες ταχύτητες*.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-3

**Σκοπός:** Ο καθορισμός της διάστασης ενός πεδίου πυκνότητας όταν είναι γνωστή έκφρασή του.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο πυκνότητας του ατμοσφαιρικού αέρα κοντά στην έξοδο του ατμού από ένα θερμοηλεκτρικό εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας περιγράφεται ικανοποιητικά από την εμπειρική εξίσωση:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2} \left( \frac{r_0}{r_0 + (x^2 + y^2)^{1/2}} + e^{-kz} \right) \quad (1)$$

- α. Ποιά είναι η διάσταση του πεδίου πυκνότητας του αέρα;  
β. Αν η εξίσωση (1) εκφραστεί σε κυλινδρικές συντεταγμένες, μεταβάλλεται η διάσταση του πεδίου πυκνότητας του αέρα;

**Λύση:** α Η διάσταση του πεδίου μιας ιδιότητας ταυτίζεται με τον αριθμό των συντεταγμένων από τις οποίες εξαρτάται η συγκεκριμένη ιδιότητα. Στην προκειμένη περίπτωση, η πυκνότητα  $\rho$  του αέρα είναι συνάρτηση και των τριών καρτεσιανών συντεταγμένων ( $x, y, z$ ):

$$\rho = \rho(x, y, z) \quad (\alpha-1)$$

Άρα, ως προς το καρτεσιανό σύστημα, το πεδίο πυκνότητας του αέρα είναι *τριδιάστατο*.

β Για να μετατρέψουμε την εξίσωση (1) από καρτεσιανές συντεταγμένες ( $x, y, z$ ) σε κυλινδρικές ( $r, \theta, z$ ), χρησιμοποιούμε τις παρακάτω εξισώσεις (βλ. Σχήμα 1-1β):

$$x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad z = z \quad (\beta-1)$$

Ο 2<sup>ος</sup> όρος στον παρανομαστή του κλάσματος της εξίσωσης (1) γράφεται:

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = [r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)]^{1/2} = (r^2)^{1/2} = r \quad (\beta-2)$$

Έτσι, η εμπειρική εξίσωση (1) γράφεται:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\Delta\rho}{2} \left( \frac{r_0}{r_0 + r} + e^{-kz} \right) \quad (\beta-3)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (β-3), η πυκνότητα  $\rho$  του αέρα είναι συνάρτηση δύο συντεταγμένων:

$$\rho = \rho(r, z) \quad (\beta-4)$$

Άρα, ως προς το κυλινδρικό σύστημα, το πεδίο πυκνότητας του αέρα είναι *διδιάστατο*.

## 4-2 Ανύσματα Θέσης

Για την περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων ρευστού στον 3-χώρο, πρέπει να είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση της ανυσματικής συνάρτησης:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) \quad (4-9)$$

όπου  $\mathbf{R}$  είναι το χωρικό άνυσμα,  $\mathbf{R}_0$  το υλικό άνυσμα και  $t$  ο χρόνος.

### ΥΛΙΚΟ ΑΝΥΣΜΑ

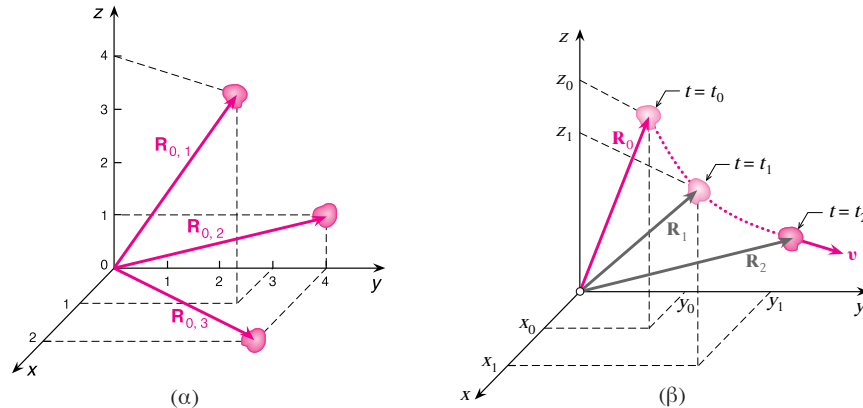
Το *υλικό άνυσμα* καθορίζει την *αρχική θέση* του κινούμενου σωματιδίου, δηλαδή τη θέση στην οποία βρίσκεται αυτό τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ . Οι βαθμωτές συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{R}_0$  είναι οι συντεταγμένες  $(x_0, y_0, z_0)$  της αρχικής θέσης του σωματιδίου στο πεδίο ροής, δηλαδή:

$$\mathbf{R}_0 = ix_0 + jy_0 + kz_0 \quad (4-10)$$

Επειδή δύο κινούμενα σωματίδια ρευστού δεν μπορεί να κατέχουν ταυτόχρονα την ίδια θέση στον χώρο, συμπεραίνεται ότι αυτά δεν είναι δυνατόν να έχουν το ίδιο υλικό άνυσμα θέσης. Άρα, κάθε σωματίδιο του κινούμενου ρευστού έχει το "δικό" του υλικό άνυσμα  $\mathbf{R}_0$  ή τις "δικές" του *υλικές συντεταγμένες*  $(x_0, y_0, z_0)$ , οι οποίες παραμένουν οι ίδιες κατά την κίνησή του μέσα στο πεδίο ροής. Επομένως, το *υλικό άνυσμα  $\mathbf{R}_0$*  αποτελεί ένα είδος "ταυτότητας" για το θεωρούμενο σωματίδιο, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την "αναγνώρισή" του σε μεταγενέστερους χρόνους, αφού τη χρονική στιγμή  $t_0$  μόνο το συγκεκριμένο σωματίδιο βρισκόταν στη θέση  $(x_0, y_0, z_0)$ . Στο Σχήμα 4-8α απεικονίζονται παραστατικά τα υλικά ανύσματα θέσης  $\mathbf{R}_{0,1}$ ,  $\mathbf{R}_{0,2}$  και  $\mathbf{R}_{0,3}$  τριών διαφορετικών σωματιδίων τα οποία τη χρονική στιγμή  $t_0$  βρισκόνταν στα σημεία (1, 3, 4), (0, 4, 1) και (2, 4, 0), αντίστοιχα.

### ΧΩΡΙΚΟ ΑΝΥΣΜΑ

Το *χωρικό άνυσμα* καθορίζει τη θέση του κινούμενου σωματιδίου σε μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$  (μεταγενέστερη της  $t_0$ ). Οι βαθμωτές συνιστώσες του ανύσματος θέσης  $\mathbf{R}$  είναι οι *χωρικές συντεταγμένες*  $(x, y, z)$  της θέσης που κατέχει το σωματίδιο



Σχήμα 4-8 (α) Υλικά ανύσματα θέσης τριών διαφορετικών σωματιδίων και (β) το υλικό άνυσμα θέσης  $\mathbf{R}_0$  και δύο χωρικά ανύσματα  $\mathbf{R}_1$  και  $\mathbf{R}_2$  ενός συγκεκριμένου σωματιδίου.

στο χώρο τη στιγμή  $t$ , δηλαδή:

$$\mathbf{R} = ix + jy + kz \quad (4-11)$$

Είναι προφανές ότι το χωρικό άνυσμα  $\mathbf{R}$  δεν έχει να κάνει με ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ρευστού, αλλά με μια ορισμένη θέση στο χώρο. Επομένως, *ένα κινούμενο σωματίδιο έχει ένα μόνο υλικό άνυσμα, αλλά πλήθος χωρικών ανυσμάτων θέσης*. Στο Σχήμα 4-8β έχουν σχεδιαστεί το υλικό άνυσμα  $\mathbf{R}_0$  και δύο χωρικά ανύσματα  $\mathbf{R}_1$  και  $\mathbf{R}_2$  τα οποία δείχνουν τις θέσεις που κατέχει το εικονιζόμενο σωματίδιο στο χώρο τις χρονικές στιγμές  $t_0$ ,  $t_1$  και  $t_2$ , αντίστοιχα.

### ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΥΛΙΚΩΝ ΚΑΙ ΧΩΡΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Οι χωρικές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  της θέσης που κατέχει ένα σωματίδιο ρευστού στον χώρο, μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , συνδέονται με τις υλικές συντεταγμένες  $(x_0, y_0, z_0)$  του σωματιδίου με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$x = x_0 + \int_0^t \left( \frac{dx}{dt} \right) dt \quad y = y_0 + \int_0^t \left( \frac{dy}{dt} \right) dt \quad z = z_0 + \int_0^t \left( \frac{dz}{dt} \right) dt \quad (4-12)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά σειρά τις τρεις βαθμωτές εξισώσεις (4-12) με τα μοναδιαία ανύσματα βάσης  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$  του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων και προσθέσουμε κατά μέλη τις νέες εξισώσεις, προκύπτει η ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \int_0^t \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right) dt \quad (4-13)$$

όπου  $\mathbf{R}$  είναι το χωρικό άνυσμα και  $\mathbf{R}_0$  το υλικό άνυσμα θέσης του σωματιδίου. Η εξίσωση (4-13) γράφεται σε συναρτησιακή μορφή ως εξής:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (4-14)$$

Η τελευταία σχέση εκφράζει απλά το γεγονός ότι η θέση ενός σωματιδίου ρευστού στο πεδίο ροής εξαρτάται από τις υλικές συντεταγμένες του (δηλαδή, από το ίδιο το σωματίδιο) και τον χρόνο (που μεσολάβησε από τη χρονική στιγμή  $t_0$  μέχρι τη θεωρούμενη στιγμή  $t$ ). Μια λιγότερο μαθηματική, αλλά περισσότερο κατανοητή, έκφραση της συναρτησιακής σχέσης (4-14) είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\text{σωματίδιο ρευστού}, t) \quad (4-15)$$

### 4-3 Μέθοδοι Περιγραφής Πεδίων Ροής

Η μαθηματική έκφραση των πεδίων ροής εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού. Το σύστημα αυτό μπορεί να είναι ακίνητο (*ακίνητος παρατηρητής*) ή να κινείται (*κινούμενος παρατηρητής*) ως προς το θεωρούμενο πεδίο. Η μέθοδος περιγραφής των πεδίων ροής ως προς *ακίνητο* σύστημα αναφοράς ονομάζεται *μέθοδος Euler* και εκείνη ως προς *κινούμενο* σύστημα *μέθοδος Lagrange*. Θα περιγράψουμε πρώτα τη μέθοδο Lagrange και μετά τη μέθοδο Euler.

## ΜΕΘΟΔΟΣ LAGRANGE

Κατά τη μέθοδο Lagrange, ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση ενός συγκεκριμένου *σωματιδίου* ρευστού και περιγράφει τις μεταβολές των ιδιοτήτων του καθώς αυτό κινείται μέσα στο πεδίο ροής. Κατά διάρκεια της κίνησής του, το σωματίδιο μπορεί να παραμορφώνεται, αλλά η ποσότητα και τα μόρια του ρευστού που το αποτελούν παραμένουν τα ίδια.

Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange για την περιγραφή του πεδίου θερμοκρασίας ενός κινούμενου ρευστού. Έστω ότι παρακολουθούμε την κίνηση του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$  του ρευστού, δηλαδή του σωματιδίου το οποίο τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  βρισκόταν στο σημείο  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  του χώρου (βλ. Σχήμα 4-9α). Κατά τη διάρκεια της κίνησής του, το σωματίδιο  $\mathbf{R}_0$  (*σύστημα*) βρίσκεται σε συνεχή, θερμική επικοινωνία με τα άλλα σωματίδια του ρευστού τα οποία αποτελούν το *περιβάλλον* του. Η επικοινωνία αυτή εκδηλώνεται με ανταλλαγή ενέργειας με τη μορφή θερμότητας, εφόσον βέβαια υπάρχει διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$  και του περιβάλλοντός του. Η ανταλλαγή θερμότητας έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας (άρα και της θερμοκρασίας) του σωματιδίου, καθώς αυτό αλλάσσει συνεχώς θέσεις μέσα στο πεδίο ροής. Η θερμοκρασία  $T$  του σωματιδίου, σε δεδομένη χρονική στιγμή, εξαρτάται από τη θέση  $\mathbf{R}$  [σημείο  $M(x, y, z)$ ] την οποία κατέχει στο χώρο, εκείνη τη στιγμή, και το χρόνο  $t$  που μεσολάβησε για τη μετάβασή του από την αρχική θέση  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  στη θέση  $M(x, y, z)$ , δηλαδή:

$$T = T(\mathbf{R}, t) \quad (4-16)$$

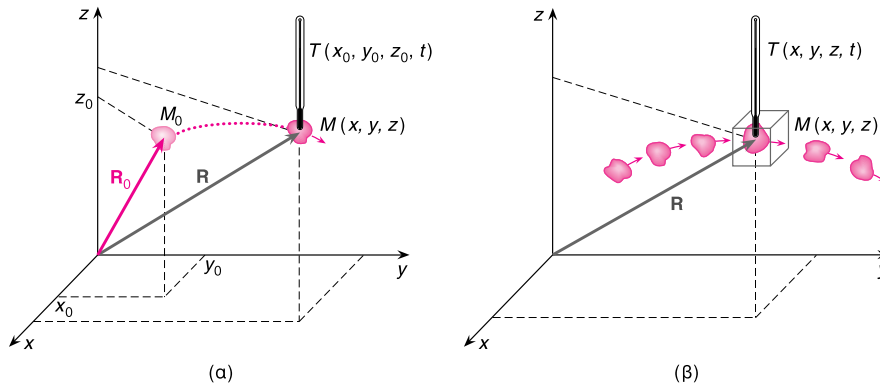
Όμως σύμφωνα με την εξίσωση (4-14), η θέση  $\mathbf{R}$  του σωματιδίου στο χώρο εξαρτάται από το ίδιο το σωματίδιο [δηλαδή από το υλικό άνωσμα  $\mathbf{R}_0$  ή τις υλικές συντεταγμένες  $(x_0, y_0, z_0)$  του σωματιδίου] και τον χρόνο  $t$ , οπότε η εξίσωση (4-16) γράφεται:

$$T = T[\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t] = T[x(\mathbf{R}_0, t), y(\mathbf{R}_0, t), z(\mathbf{R}_0, t), t] \quad (4-17)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί με την ισοδύναμη μορφή:

$$T = T(\mathbf{R}_0, t) = T(x_0, y_0, z_0, t) \quad (2-18)$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι, κατά τη μέθοδο Lagrange, η θερμοκρασία του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$  εξαρτάται από τις υλικές συντεταγμένες του και τον χρόνο. Αλλά, σύμφωνα με όσα αναφέραμε στην §4-2, οι υλικές συντεταγμένες των σωματιδίων του ρευστού είναι σταθερές, ανεξάρτητες του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι *κατά τη μέθοδο Lagrange*, από τις τέσσερις μεταβλητές ( $x, y, z$  και  $t$ ) του πεδίου μιας ιδιότητας, *μόνον ο χρόνος είναι*



Σχήμα 4-9 Τεχνικές περιγραφής του πεδίου θερμοκρασίας κινούμενου ρευστού: (α) μέθοδος Lagrange και (β) μέθοδος Euler.

ανεξάρτητη μεταβλητή. Επομένως, η μαθηματική έκφραση κάθε μεταβλητής του πεδίου ροής, [Εξ. (4-1)], ως προς κινούμενο σύστημα αναφοράς είναι της μορφής:

$$\Theta = \Theta(\mathbf{R}_0, t) = \Theta(x_0, y_0, z_0, t) \quad (4-19)$$

Η μέθοδος Lagrange αποτελεί την κύρια μέθοδο περιγραφής της κίνησης των στερεών σωμάτων. Αντίθετα, η εφαρμογή της μεθόδου αυτής στα προβλήματα της Μηχανικής των Ρευστών αποδεικνύεται εξαιρετικά δυσχερής για δύο κυρίως λόγους: Πρώτον, λόγω της δυσκολίας (αν όχι αδυναμίας) ταυτοποίησης και ταυτόχρονης παρακολούθησης του συνόλου των σωματιδίων του ρευστού, κάτι που είναι απαραίτητο για την πλήρη περιγραφή του θεωρούμενου πεδίου ροής. Δεύτερον, η περιγραφή της κίνησης του ρευστού με τη μέθοδο Lagrange, οδηγεί σε πολύπλοκες μαθηματικές εξισώσεις η επίλυση των οποίων είναι αρκετά δύσκολη, ακόμη και σήμερα όπου οι υπολογιστικές μας δυνατότητες είναι αυξημένες με τη χρησιμοποίηση των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Έτσι η εφαρμογή της μεθόδου Lagrange περιορίζεται σε ορισμένα ειδικά προβλήματα ροής, όπως είναι π.χ. η κίνηση σταγόνων υγρού ή φουσαλίδων αερίου σε ετερογενή μείγματα ρευστών, με εξαιρετικά αποτελέσματα.

Στα περισσότερα προβλήματα ροής, ιδιαίτερα των ομοιογενών ρευστών, δε μας ενδιαφέρει τόσο η συμπεριφορά κάθε σωματιδίου χωριστά, αλλά περισσότερο οι σχέσεις των ιδιοτήτων του ρευστού σε διάφορα σημεία του πεδίου ροής, καθώς και οι μεταβολές τους με τον χρόνο. Για να έχουμε αυτές τις πληροφορίες η περιγραφή του πεδίου ροής πρέπει να γίνει με τη μέθοδο Euler.

## ■ ΜΕΘΟΔΟΣ EULER

Κατά τη μέθοδο Euler, ο παρατηρητής εστιάζει την προσοχή του σε ένα ορισμένο σημείο ή, καλύτερα, σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου σταθερού όγκου και εξετάζει τις μεταβολές των ιδιοτήτων του ρευστού στην περιοχή αυτή, καθώς η τελευταία καταλαμβάνεται συνεχώς από διαφορετικά σωματίδια ρευστού.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Euler για την περιγραφή του ίδιου πεδίου θερμοκρασίας, το οποίο περιγράψαμε προηγουμένως με τη μέθοδο Lagrange. Έστω ότι παρακολουθούμε τη θερμοκρασία  $T$  του πεδίου ροής στο σημείο  $M(x, y, z)$  –βλ. Σχήμα 4-9β. Στην περίπτωση αυτή, εκείνο που μετράμε είναι η θερμοκρασία των διαδοχικών σωματιδίων του ρευστού τα οποία διέρχονται από το σημείο  $M$  του χώρου. Προφανώς η τιμή της θερμοκρασίας  $T$  εξαρτάται από τη θέση [δηλαδή το άνωμα  $\mathbf{R}$  ή τις συντεταγμένες  $(x, y, z)$ ] του σημείου  $M$  και τον χρόνο  $t$ , δηλαδή:

$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t) \quad (4-20)$$

Προφανώς, η επιλογή της θέσης  $\mathbf{R}$  εξαρτάται από τον παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι, κατά τη μέθοδο Euler, και οι τέσσερις μεταβλητές  $(x, y, z$  και  $t)$  του πεδίου μιας ιδιότητας είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επομένως, η μαθηματική έκφραση της τυχαίας μεταβλητής  $\Theta$  του πεδίου ροής ως προς ακίνητο σύστημα είναι της μορφής:

$$\Theta = \Theta(\mathbf{R}, t) = \Theta(x, y, z, t) \quad (4-21)$$

Από όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα, συμπεραίνουμε ότι η επιλογή της μεθόδου περιγραφής ενός πεδίου ροής εξαρτάται από το είδος των πληροφοριών τις οποίες επιζητούμε για το συγκεκριμένο πεδίο. Έτσι, αν εκείνο που μας ενδιαφέρει να μάθουμε είναι η τιμή ενός ορισμένου φυσικού μεγέθους σε κάποιο σημείο του πεδίου ροής (π.χ. η τιμή της ταχύτητας του ρευστού στην έξοδο ενός ακροφυσίου), επιλέγουμε τη μέθοδο Euler.

Αντίθετα, αν ενδιαφερόμαστε να δούμε πώς μεταβάλλονται οι ιδιότητες ενός συγκεκριμένου σωματιδίου ρευστού καθώς κινείται μέσα στο πεδίο ροής (π.χ. η ταχύτητα μιας φουσαλίδας αέρα που ανέρχεται σε ζέον υγρό), επιλέγουμε τη μέθοδο Lagrange.

#### 4-4 Χρονικές Παράγωγοι Φυσικών Μεγεθών

Ο ρυθμός μεταβολής ενός φυσικού μεγέθους εκφράζεται μαθηματικά με την πρώτη παράγωγο του μεγέθους ως προς τον χρόνο (*χρονική παράγωγος*). Η μαθηματική έκφραση και η φυσική σημασία των χρονικών παραγώγων των μεταβλητών ενός πεδίου ροής εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού ή, αλλιώς, από τη μέθοδο περιγραφής του πεδίου. Ως τώρα έχουμε γνωρίσει δύο μεθόδους περιγραφής των πεδίων ροής, τη μέθοδο Euler και τη μέθοδο Lagrange. Κατά την πρώτη μέθοδο ο παρατηρητής παραμένει *ακίνητος*, ενώ κατά τη δεύτερη *κινείται* ως προς το πεδίο, παρακολουθώντας την κίνηση ενός συγκεκριμένου σωματιδίου του ρευστού. Δηλαδή, *κατά τη μέθοδο Lagrange, ο παρατηρητής κινείται μέσα στο πεδίο ροής με την ίδια ταχύτητα που κινείται και το ρευστό*. Όμως εκτός από τις δύο αυτές μεθόδους, υπάρχει και τρίτη μέθοδος περιγραφής της κίνησης των ρευστών. Είναι η μέθοδος που βασίζεται στην *ελεύθερη κίνηση* του παρατηρητή μέσα στο πεδίο ροής, ανεξάρτητα από την κίνηση των σωματιδίων του ρευστού. Έτσι, αφού η περιγραφή ενός κινούμενου ρευστού μπορεί να γίνει με τρεις διαφορετικές μεθόδους, υπάρχουν και τρία είδη χρονικών παραγώγων για κάθε μεταβλητή του πεδίου ροής: η *τοπική*, η *υλική* και η *ολική παράγωγος*.

#### ■ ΤΟΠΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η *τοπική παράγωγος* μιας μεταβλητής ενός πεδίου ροής εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος παραμένει *ακίνητος* μέσα στο πεδίο ροής (περιγραφή του πεδίου κατά Euler). Ας θεωρήσουμε το πεδίο μιας συγκεκριμένης μεταβλητής, έστω το πεδίο θερμοκρασίας του ατμοσφαιρικού αέρα σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου (π.χ. στο λεκανοπέδιο Αττικής). Στην κατά Euler θεωρηση, το πεδίο αυτό εκφράζεται μαθηματικά με μια συνάρτηση της μορφής (4-20):

$$T = T(\mathbf{R}, t) = T(x, y, z, t) \quad (4-20)$$

Αν παραγωγίσουμε τη συναρτησιακή σχέση (4-20) ως προς τον χρόνο, διατηρώντας σταθερό το χωρικό άνωσμα θέσης  $\mathbf{R} = [x, y, z]$ , προκύπτει:

$$\left( \frac{dT}{dt} \right)_{\mathbf{R}} = \left( \frac{dT}{dt} \right)_{(x, y, z)} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4-22)$$

Ο δείκτης  $\mathbf{R}$  υποδηλώνει ότι η παράγωγος  $(dT/dt)_{\mathbf{R}}$  δίνει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του αέρα σε μια συγκεκριμένη θέση  $(x, y, z)$  του χώρου, δηλαδή δίνει τον *τοπικό* ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας. Για τον λόγο αυτό, η  $(d/dt)_{\mathbf{R}}$  ονομάζεται *τοπική παράγωγος* και παριστάνεται συνήθως με το σύμβολο  $\partial/\partial t$ .

Για να προσδιορίσουμε πειραματικά την τιμή της τοπικής παραγώγου της θερμοκρασίας,  $\partial T/\partial t$ , τοποθετούμε στο σημείο  $M$  του χώρου ένα θερμόμετρο (*παρατηρητής*) και καταγράφουμε τις ενδείξεις του στον χρόνο. Στη συνέχεια χαράσσουμε την καμπύλη θερμοκρασίας-χρόνου και, για κάθε στιγμή, προσδιορίζουμε την αντίστοιχη

κλίση  $(\partial T/\partial t)$  της καμπύλης  $T(t)$ , η οποία δίνει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του αέρα στο σημείο  $M$  τη θεωρούμενη χρονική στιγμή. Στην περίπτωση αυτή, οι ενδείξεις του θερμομέτρου δίνουν τις θερμοκρασίες των διαδοχικών σωματιδίων του αέρα τα οποία διέρχονται από το σημείο  $M(x, y, z)$  του χώρου (βλ. Σχήμα 4-9β).

Αν στην εξίσωση (4-22) θέσουμε  $T = \Theta$ , όπου  $\Theta$  είναι μια οποιαδήποτε μεταβλητή του πεδίου ροής, προκύπτει η παράγωγος  $\partial T/\partial t$ , η φυσική ερμηνεία της οποίας είναι:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Τοπικός ρυθμός μεταβολής της μεταβλη-} \\ \text{τής } \Theta \text{ ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος} \\ \text{παραμένει ακίνητος μέσα στο πεδίο ροής} \end{array} \right\} \quad (4-23)$$

### ΥΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η υλική παράγωγος μιας μεταβλητής ενός πεδίου ροής εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται μέσα στο πεδίο ροής με την ταχύτητα του ρευστού (περιγραφή του πεδίου κατά Lagrange). Ας θεωρήσουμε (και εδώ) το πεδίο θερμοκρασίας του ατμοσφαιρικού αέρα στο λεκανοπέδιο Αττικής. Στην κατά Lagrange θεώρηση, το πεδίο αυτό εκφράζεται μαθηματικά με μια συναρτησιακή σχέση της μορφής (4-17):

$$T = T[\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t] = T[x(\mathbf{R}_0, t), y(\mathbf{R}_0, t), z(\mathbf{R}_0, t), t] \quad (4-17)$$

Αν παραγωγίσουμε τη συγκεκριμένη σχέση ως προς τον χρόνο, διατηρώντας σταθερό το υλικό άνωσμα  $\mathbf{R}_0$ , προκύπτει η εξίσωση:

$$\left( \frac{dT}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} = \left( \frac{dT}{dt} \right)_{\mathbf{R}} + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad (4-24)$$

Ο δείκτης  $\mathbf{R}_0$  υποδηλώνει ότι η παράγωγος  $(dT/dt)_{\mathbf{R}_0}$  δίνει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας ενός συγκεκριμένου σωματιδίου (του  $\mathbf{R}_0$ ) του αέρα καθώς αυτό κινείται (και παραμορφώνεται) μέσα στο πεδίο ροής. Τον ρυθμό αυτό αντιλαμβάνεται ένας κινούμενος παρατηρητής ο οποίος ακολουθεί την κίνηση του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$ . Επειδή το υλικό άνωσμα  $\mathbf{R}_0$  δε μεταβάλλεται με την κίνηση του σωματιδίου, η  $(d/dt)_{\mathbf{R}_0}$  ονομάζεται *υλική παράγωγος* (ή *ουσιαστική παράγωγος*) και παριστάνεται με το σύμβολο  $D/Dt$ . Στο παράδειγμά μας, η μέτρηση της υλικής παραγώγου της θερμοκρασίας,  $DT/Dt$ , θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια π.χ. ενός θερμομέτρου που είναι τοποθετημένο σε αερόστατο το οποίο αφήνεται να παρασυρθεί από τις κινούμενες μάζες του αέρα. Στην περίπτωση αυτή, οι ενδείξεις του θερμομέτρου δίνουν τη θερμοκρασία του σωματιδίου του αέρα που "περιβάλλει" τον βολβό του θερμομέτρου και κινείται "μαζί" με αυτόν μέσα στο πεδίο ροής.

Ας επανέλθουμε στην εξίσωση (4-24). Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} + \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) \left( \frac{dy}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \left( \frac{dz}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad (4-25)$$

όπου  $\partial T/\partial t$  είναι η τοπική παράγωγος της θερμοκρασίας. Οι παράγωγοι των χωρικών συντεταγμένων ως προς τον χρόνο, με σταθερό το υλικό άνωσμα  $\mathbf{R}_0$ , είναι ίσες με τις καρτεσιανές συνιστώσες  $u_x$ ,  $u_y$  και  $u_z$  του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του αέρα (η οποία είναι ίση με την ταχύτητα του παρατηρητή). Επομένως, η εξίσωση (4-25) γράφεται:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4-26)$$

Αν λάβουμε υπόψη την καρτεσιανή έκφραση του ανυσματικού διαφορικού τελεστή  $\nabla$  [Εξ. (1-50)], η εξίσωση (4-26) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \quad (4-27)$$

Ο όρος  $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ , που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4-27), δίνει τον ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$  του αέρα λόγω, αυτής καθαυτής, της *κίνησης* (ή *μεταφοράς*) του μέσα στον χώρο. Το μέγεθος αυτής της μεταβολής εξαρτάται τόσο από την ταχύτητα κίνησης του σωματιδίου, όσο και από τη βαθμίδα θερμοκρασίας,  $\nabla T$ , του πεδίου μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο  $\mathbf{R}_0$ . Το εσωτερικό γινόμενο του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας επί τον διαφορικό τελεστή  $\nabla$  είναι ένας νέος *διαφορικός τελεστής*, ο οποίος ενεργεί πάνω σε ένα φυσικό μέγεθος μόνον όταν έχουμε κίνηση του ρευστού και δίνει τον ρυθμό μεταβολής του μεγέθους αυτού. Τον τελεστή αυτό θα τον ονομάζουμε, προς διάκριση, *τελεστή μεταφοράς*. Έτσι, ο τελεστής μεταφοράς της μεταβλητής  $\Theta$  ενός πεδίου ροής έχει την ακόλουθη σημασία:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Theta = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της μεταβλη-} \\ \text{τής } \Theta \text{ λόγω κίνησης του ρευστού} \end{array} \right\} \quad (4-28)$$

Για  $T = \Theta$ , από την εξίσωση (4-27) λαμβάνεται η γενική μορφή:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Theta \quad (4-29)$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι η υλική παράγωγος της μεταβλητής  $\Theta$  είναι ίση με το άθροισμα της τοπικής παραγώγου και του τελεστή μεταφοράς της μεταβλητής αυτής. Δηλαδή, η *υλική παράγωγος*  $D\Theta/Dt$  δίνει τον *ολικό* ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής  $\Theta$  και είναι αυτός ακριβώς ο ρυθμός (ο ολικός) τον οποίο αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής ο οποίος ακολουθεί το κινούμενο ρευστό:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ολικός ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής } \Theta \\ \text{ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται} \\ \text{στο πεδίο ροής με την ταχύτητα του ρευστού} \end{array} \right\} \quad (4-30)$$

Σε ότι αφορά στην εφαρμογή της εξίσωσης (4-29), θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι όλα τα μεγέθη που εμφανίζονται σε αυτήν υπολογίζονται για το σημείο  $(x, y, z)$  του χώρου στο οποίο βρίσκεται το σωματίδιο  $\mathbf{R}_0$  τη θεωρούμενη χρονική στιγμή.

Σε *συμβολισμό δεικτών*, η γενική εξίσωση (4-29) γράφεται ως εξής:

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + v_i \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} \right) \quad (4-31)$$

Αν στην τελευταία εξίσωση θέσουμε  $\Theta = T$  και προχωρήσουμε στην ανάπτυξη της νέας εξίσωσης, λαμβάνοντας υπόψη ότι ο  $i$  ( $= x, y, z$ ) είναι ένας *επαναλαμβανόμενος* δείκτης [§1-5], προκύπτει η εξίσωση (4-26).

## ΟΛΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

Η *ολική παράγωγος* μιας μεταβλητής ενός πεδίου ροής εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος *κινείται* μέσα στο πεδίο ροής *ανεξάρτητα* από την κίνηση των σωματιδίων του ρευστού. Στο παράδειγμά μας, η μέτρηση

της ολικής παραγώγου της θερμοκρασίας θα μπορούσε να γίνει με τη βοήθεια π.χ. ενός θερμομέτρου που είναι τοποθετημένο σε ένα ελικόπτερο, η ταχύτητα και η κατεύθυνση κίνησης του οποίου καθορίζονται από τον πιλότο ανεξάρτητα από τις κινούμενες μάζες του αέρα. Επομένως, η ταχύτητα του θερμομέτρου (*παρατηρητής*) είναι διαφορετική από την ταχύτητα κίνησης του αέρα. Αυτό σημαίνει ότι οι ενδείξεις του θερμομέτρου δε δίνουν τη θερμοκρασία ενός συγκεκριμένου σωματιδίου (περίπτωση υλικής παραγώγου), αλλά τη θερμοκρασία πλήθους σωματιδίων αέρα τα οποία ο παρατηρητής συναντά, εντελώς τυχαία, κατά τη διαδρομή του μέσα στο πεδίο ροής. Υπό αυτές τις συνθήκες, αντί της εξίσωσης (4-24), καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right) \quad (4-32)$$

όπου  $dT/dt$  είναι η *ολική παράγωγος* της θερμοκρασίας. Εδώ οι παράγωγοι των χωρικών συντεταγμένων ως προς τον χρόνο είναι ίσες με τις συνιστώσες  $w_x$ ,  $w_y$  και  $w_z$  του ανύσματος  $\mathbf{w}$  της ταχύτητας του παρατηρητή. Επομένως, η εξίσωση (4-32) γράφεται:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (4-33)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί και με την ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla T \quad (4-34)$$

Για  $T = \Theta$ , η τελευταία εξίσωση λαμβάνει τη μορφή:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla \Theta \quad (4-35)$$

Η εξίσωση (4-35) δείχνει ότι η *ολική παράγωγος*  $d\Theta/dt$  δίνει τον ολικό ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής  $\Theta$  τον οποίο αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται μέσα στο πεδίο ροής ανεξάρτητα από την κίνηση του ρευστού:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ολικός ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής } \Theta \\ \text{ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται} \\ \text{εντελώς τυχαία μέσα στο πεδίο ροής} \end{array} \right\} \quad (4-36)$$

Αν στην εξίσωση (4-35) θέσουμε  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ , προκύπτει η εξίσωση (4-29), δηλαδή η *υλική παράγωγος ενός φυσικού μεγέθους είναι μερική περίπτωση της ολικής παραγώγου του*.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-4

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός του ρυθμού μεταβολής των ιδιοτήτων ροής ως προς παρατηρητή κινούμενο στο πεδίο ροής ανεξάρτητα από την κίνηση του ρευστού.

**Το πρόβλημα:** Στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας (και μέχρι ύψος 3 km), η θερμοκρασία του αέρα δίνεται από την εξίσωση (3-16):

$$T = T_0 - az \quad (1)$$

όπου  $T_0$  είναι η θερμοκρασία του εδάφους,  $z$  η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια του εδάφους και  $a$  σταθερά ίση με  $9 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/m}$ . Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του αέρα τον οποίο αντιλαμβάνεται ένας αλεξιπτωτιστής κατά τη διάρκεια της πτώ-

σης του με: (α) κλειστό και (β) ανοιχτό αλεξιπτωτο. Η ταχύτητα πτώσης του αλεξιπτωτιστή με κλειστό αλεξιπτωτο είναι 300 km/h και με ανοιχτό αλεξιπτωτο 20 km/h.

**Λύση:** Στην περίπτωση αυτή, ο παρατηρητής (αλεξιπτωτιστής) κινείται ανεξάρτητα από το ρευστό (αέρα). Επομένως, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του αέρα τον οποίο αντιλαμβάνεται ο αλεξιπτωτιστής κατά την πτώση του υπολογίζεται από την εξίσωση (4-33):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2)$$

Όπως προκύπτει από την εξίσωση (1), η θερμοκρασία  $T$  του αέρα δε μεταβάλλεται με τον χρόνο, άρα η παράγωγός της ως προς τον χρόνο είναι μηδέν:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

Εξάλλου, επειδή ο αλεξιπτωτιστής κινείται κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου (η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα  $z$ ), οι ταχύτητες  $w_x$  και  $w_y$  είναι μηδέν:

$$w_x = w_y = 0 \quad (4)$$

Έτσι, λόγω των εξισώσεων (3) και (4), η εξίσωση (2) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{dT}{dt} = w_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (5)$$

Η παράγωγος  $\partial T/\partial z$ , που εμφανίζεται στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (5), υπολογίζεται από την εξίσωση (1) με παραγωγή της ως προς  $z$ , δηλαδή:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (T_0 - az) = -a \quad (6)$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, η εξίσωση (5) γράφεται:

$$\frac{dT}{dt} = -aw_z \quad (7)$$

**α** Στη φάση της πτώσης του αλεξιπτωτιστή με κλειστό αλεξιπτωτο, η ταχύτητα  $w_z = -300$  km/h. (Το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας  $w_z$  δικαιολογείται αν λάβουμε υπόψη ότι ο αλεξιπτωτιστής κινείται αντίθετα από τη θετική φορά του άξονα  $z$ ). Έτσι, από την εξίσωση (7) προκύπτει:

$$\frac{dT}{dt} = -\left(9 \times 10^{-3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}\right) \left(-300 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = 0,75 \text{ }^\circ\text{C/s} \quad (\alpha-1)$$

**β.** Στη φάση της πτώσης του αλεξιπτωτιστή με ανοιχτό αλεξιπτωτο, η ταχύτητα  $w_z = -20$  km/h, οπότε από την εξίσωση (7) προκύπτει:

$$\frac{dT}{dt} = -\left(9 \times 10^{-3} \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}\right) \left(-20 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \left(\frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = 0,05 \text{ }^\circ\text{C/s} \quad (\beta-1)$$

Άρα, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του αέρα τον οποίο αντιλαμβάνεται ο αλεξιπτωτιστής όταν πέφτει με κλειστό αλεξιπτωτο είναι 0,75 °C/s και με ανοιχτό αλεξιπτωτο 0,05 °C/s.

### 4-5 Κίνηση Σωματιδίων σε Καμπύλη Τροχιά

#### ΤΑΧΥΤΗΤΑ

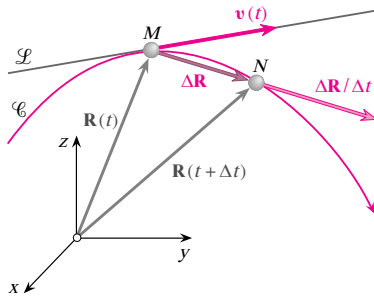
Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται στον χώρο κατά μήκος της καμπύλης  $\mathcal{C}$  (βλ. Σχήμα 4-10). Έστω ότι το σωματίδιο τη χρονική στιγμή  $t$  βρίσκεται στο σημείο  $M$  και μετά χρόνο  $\Delta t$  στο σημείο  $N$ . Οι θέσεις των σημείων  $M$  και  $N$  καθορίζονται από τα ανύσματα θέσης  $\mathbf{R}(t)$  και  $\mathbf{R}(t + \Delta t)$ , αντίστοιχα. Η μετατόπιση του σωματιδίου κατά τον χρόνο  $\Delta t$  παριστάνεται από το άνυσμα  $\overrightarrow{MN}$  (*άνυσμα μετατόπισης*), το οποίο είναι ίσο με την ανυσματική διαφορά  $\Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)$ . Το άνυσμα  $\Delta \mathbf{R} / \Delta t$  δίνει τη *μέση ταχύτητα* μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t$  και  $t + \Delta t$  και το όριο αυτού (καθώς το  $\Delta t \rightarrow 0$ ) τη *στιγμιαία ταχύτητα* (ή απλά *ταχύτητα*),  $\mathbf{v}(t)$ , τη χρονική στιγμή  $t$ . Δηλαδή,

$$\mathbf{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(t + \Delta t) - \mathbf{R}(t)}{\Delta t} \quad (4-37)$$

ή αν λάβουμε υπόψη την εξίσωση ορισμού της πρώτης παραγώγου:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}'(t) = \frac{d\mathbf{R}(t)}{dt} \quad (4-38)$$

Άρα το άνυσμα  $\mathbf{v}(t)$  της ταχύτητας, ως ίσο με το άνυσμα  $\mathbf{R}'(t)$  της πρώτης παραγώγου του ανύσματος θέσης  $\mathbf{R}(t)$ , εφάπτεται της τροχιάς του σωματιδίου σε κάθε σημείο της και δείχνει την κατεύθυνση της αντίστοιχης εφαπτομένης γραμμής  $\mathcal{L}$ . Στον Πίνακα 4-1 δίνονται οι εκφράσεις της ταχύτητας σε καρτεσιανές ( $x, y, z$ ), κυλινδρικές ( $r, \theta, z$ ) και σφαιρικές ( $R, \varphi, \theta$ ) συντεταγμένες.



Σχήμα 4-10 Ταχύτητα σωματιδίου που διαγράφει καμπύλη τροχιά.

Πίνακας 4-1 Εξισώσεις στιγμιαίας ταχύτητας

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (4-39)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt} \mathbf{k} \quad (4-40)$$

$$\mathbf{v} = \frac{dR}{dt} \mathbf{e}_R + R \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{e}_\varphi + R \sin \varphi \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (4-41)$$

**Επισήμανση:** Εάν  $\mathbf{R}_0$  είναι το υλικό άνυσμα θέσης του σωματιδίου, η μαθηματική έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad (4-42)$$

Επειδή το άνυσμα  $\mathbf{R}_0$  δε μεταβάλλεται κατά την κίνηση του σωματιδίου στο πεδίο ροής, το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4-15) είναι η *υλική παράγωγος* του ανύσματος θέσης του σωματιδίου. Έτσι, η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να γραφεί και ως εξής:

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{R}}{Dt} \quad (4-43)$$

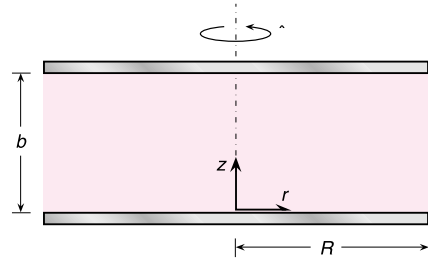
Όμως, στη βιβλιογραφία, οι υλικές παράγωγοι των ανυσμάτων θέσης και των συνι-

στωσών τους δεν παριστάνονται συνήθως με τον ειδικό συμβολισμό της υλικής παραγωγού. Επίσης, για λόγους απλούστευσης στη γραφή, όταν αναφερόμαστε σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ρευστού, παραλείπεται ο δείκτης  $\mathbf{R}_0$  από την εξίσωση (4-43).

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-5

**Σκοπός:** Η εύρεση της αναλυτικής έκφρασης ενός πεδίου ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες και η μετατροπή της σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

**Το πρόβλημα:** Ένα ιξώδες ρευστό βρίσκεται μεταξύ δύο παράλληλων δίσκων, ακτίνας  $R$ , που απέχουν μεταξύ τους απόσταση  $b$  (βλ. Σχήμα Π4-5). Ο κάτω δίσκος (στη θέση  $z=0$ ) παραμένει ακίνητος, ενώ ο άνω δίσκος περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα  $\omega$ . Η κίνηση του ρευστού στο χώρο μεταξύ των δύο δίσκων είναι καθαρά περιστροφική και η ταχύτητά του μεταβάλλεται γραμμικά ως προς την απόσταση  $z$  από την επιφάνεια του κάτω δίσκου. Ζητείται η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας της ροής μεταξύ των δύο δίσκων σε: (α) κυλινδρικές συντεταγμένες και (β) καρτεσιανές συντεταγμένες.



Σχήμα Π4-5

**Λύση:** α Το πεδίο ταχύτητας εκφράζεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες ως εξής:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z \quad (\alpha-1)$$

όπου  $(v_r, v_\theta, v_z)$  είναι οι συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού και  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  τα μοναδιαία ανύσματα βάσης του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων κατά τις διευθύνσεις  $r, \theta$  και  $z$ , αντίστοιχα. Επειδή η δεδομένη ροή είναι καθαρά περιστροφική, οι ταχύτητες  $v_r$  και  $v_z$  είναι μηδέν ( $v_r = v_z = 0$ ), οπότε η ανυσματική εξίσωση (1) γράφεται:

$$\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\alpha-2)$$

Στη γενική περίπτωση, η  $v_\theta$  είναι συνάρτηση των μεταβλητών  $r, \theta$  και  $z$ :

$$v_\theta = v_\theta(r, \theta, z) \quad (\alpha-3)$$

Όμως εδώ λόγω συμμετρίας, η μεταβολή της  $v_\theta$  ως προς το  $\theta$  είναι μηδέν, οπότε ο αριθμός των μεταβλητών από τις οποίες μπορεί να εξαρτάται η ταχύτητα  $v_\theta$  περιορίζεται σε δύο (τις  $r$  και  $z$ ):

$$v_\theta = v_\theta(r, z) \quad (\alpha-4)$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα, η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται γραμμικά ως προς την απόσταση  $z$ , συνεπώς, η αξίωση (α-4) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$v_\theta = Zf(r) + c \quad (\alpha-5)$$

όπου  $f(r)$  είναι συνάρτηση του  $r$  και  $c$  σταθερά. Για την εύρεση της μορφής της  $f(r)$  και της τιμής της  $c$  χρησιμοποιούμε τη συνθήκη μη ολίσθησης, οπότε προκύπτουν δύο οριακές σχέσεις, μία για την κάτω επιφάνεια (στη θέση  $z=0$ ) και μία για την άνω επιφάνεια (στη θέση  $z=b$ ):

$$v_\theta|_{z=0} = 0 \quad (\alpha-6) \quad v_\theta|_{z=b} = \omega r \quad (\alpha-7)$$

Από την εξίσωση (α-5), λόγω της συνθήκης (α-6), προκύπτει  $c=0$ , οπότε η ταχύτητα  $v_\theta$  είναι:

$$v_\theta = Zf(r) \quad (\alpha-8)$$

Από το συνδυασμό των δύο τελευταίων σχέσεων, προκύπτει η έκφραση της συνάρτησης  $f(r)$  [Εξ. (α-9)], οπότε η σχέση (α-8) λαμβάνει τελικά τη μορφή της εξίσωσης (α-10)

$$f(r) = \frac{\omega r}{b} \quad (\alpha-9) \quad v_\theta = \frac{\omega r z}{b} \quad (\alpha-10)$$

Άρα, η μαθηματική έκφραση του πεδίου ταχύτητας της ροής σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{\omega r z}{b} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (\alpha-11)$$

**β** Για να μετατρέψουμε την έκφραση του πεδίου ταχύτητας από κυλινδρικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, αντικαθιστούμε το κυλινδρικό άνυσμα βάσης  $\mathbf{e}_\theta$  συναρτήσει των ανυσμάτων βάσης  $\mathbf{i}$  και  $\mathbf{j}$  του καρτεσιανού συστήματος (από τον Πίνακα 1-8):

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \quad (\beta-1)$$

Λόγω της έκφρασης αυτής του ανύσματος  $\mathbf{e}_\theta$ , η εξίσωση (α-11) γράφεται :

$$\mathbf{v} = -\frac{\omega z}{b} r \sin\theta \mathbf{i} + \frac{\omega z}{b} r \cos\theta \mathbf{j} \quad (\beta-2)$$

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (β-2) τις κυλινδρικές με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$x = r \cos\theta \quad y = r \sin\theta \quad z = z \quad (\beta-3)$$

Λόγω των τελευταίων σχέσεων, η εξίσωση (β-2) λαμβάνει τελικά τη μορφή:

$$\mathbf{v} = -\left( \frac{\omega y z}{b} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\omega x z}{b} \right) \mathbf{j} \quad (\beta-4)$$

που είναι η ζητούμενη έκφραση του πεδίου ταχύτητας της ροής σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

## ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ

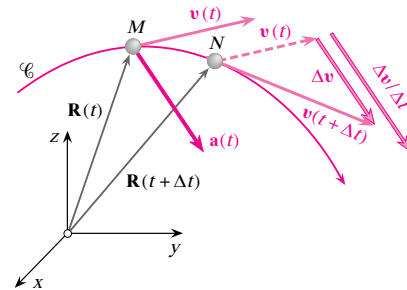
Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται στον χώρο κατά μήκος μιας καμπύλης  $\mathcal{C}$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-11. Τα ανύσματα  $\mathbf{v}(t)$  και  $\mathbf{v}(t + \Delta t)$  παριστάνουν τις στιγμιαίες ταχύτητες του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές  $t$  και  $t + \Delta t$  όταν αυτό διέρχεται από τα σημεία  $M$  και  $N$ , αντίστοιχα. Η ανυσματική διαφορά της ταχύτητας του σωματιδίου μεταξύ των θέσεων  $M$  και  $N$  είναι  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)$ . Το άνυσμα  $\Delta \mathbf{v} / \Delta t$  δίνει τη **μέση επιτάχυνση** μεταξύ των χρονικών στιγμών  $t$  και  $t + \Delta t$  και το όριο αυτού (καθώς το  $\Delta t \rightarrow 0$ ) τη **στιγμιαία επιτάχυνση** (ή απλά **επιτάχυνση**),  $\mathbf{a}(t)$ , τη χρονική στιγμή  $t$ ,

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (4-44)$$

ή, αν λάβουμε υπόψη την εξίσωση (4-38):

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{R}''(t) \quad (4-45)$$

Άρα, η στιγμιαία επιτάχυνση  $\mathbf{a}(t)$  του σωματιδίου είναι ίση με την πρώτη παράγωγο του ανύσματος  $\mathbf{v}(t)$  της ταχύτητας ως προς τον χρόνο ή, ισοδύναμα, ίση με τη δεύτερη παράγωγο του ανύσματος θέσης  $\mathbf{R}(t)$  ως προς τον χρόνο.



Σχήμα 4-11 Επιτάχυνση σωματιδίου το οποίο διαγράφει καμπύλη τροχιά.

Στον Πίνακα 4-2 δίνονται οι εκφράσεις της επιτάχυνσης σε καρτεσιανές ( $x, y, z$ ), κυλινδρικές ( $r, \theta, z$ ) και σφαιρικές ( $R, \varphi, \theta$ ) συντεταγμένες. Όσον αφορά στην

κατεύθυνση του άνυσματος  $\mathbf{a}$  της επιτάχυνσης, σημειώνεται ότι γενικά δεν έχει την ίδια κατεύθυνση με το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας. Το άνυσμα  $\mathbf{a}$  έχει πάντα την ίδια κατεύθυνση με το άνυσμα  $\Delta\mathbf{v}$  και, στην περίπτωση καμπυλόγραμμης κίνησης, κατευθύνεται προς το κοίλο μέρος της καμπύλης.

**Πίνακας 4-2** Καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές εκφράσεις της επιτάχυνσης

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} \quad (4-46)$$

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k} \quad (4-47)$$

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2R}{dt^2} - R \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - R \sin^2 \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_R + \left[ 2 \frac{dR}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + R \frac{d^2\varphi}{dt^2} - R \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_\varphi + \left( 2 \sin \varphi \frac{dR}{dt} \frac{d\theta}{dt} + 2 R \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} + R \sin \varphi \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (4-48)$$

**Επιτρόχιος και Κεντρομόλος Επιτάχυνση:** Το άνυσμα  $\mathbf{a}$  της στιγμιαίας επιτάχυνσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι το άθροισμα δύο ορθογώνιων ανυσμάτων, ενός εφαπτόμενου στην τροχιά του και ενός κάθετου σε αυτήν (Σχήμα 4-12):

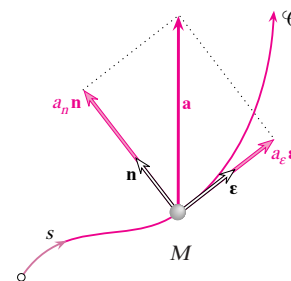
$$\mathbf{a}(t) = a_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} + a_n \mathbf{n} \quad (4-49)$$

Το εφαπτόμενο άνυσμα  $a_\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}$  ονομάζεται **επιτρόχιος επιτάχυνση** και το κάθετο άνυσμα  $a_n \mathbf{n}$  **κεντρομόλος επιτάχυνση**. Η επιτρόχιος επιτάχυνση προέρχεται από τη μεταβολή του μέτρου του άνυσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του σωματιδίου, ενώ η κεντρομόλος επιτάχυνση από τη μεταβολή της κατεύθυνσης αυτού. Επομένως, όταν ένα σωματίδιο κινείται σε καμπύλη τροχιά έχει πάντα μη μηδενική επιτάχυνση, ακόμη και όταν το μέτρο της ταχύτητάς του παραμένει σταθερό.

Εάν είναι γνωστές οι εκφράσεις των ανυσματικών συναρτήσεων  $\mathbf{v}(t)$  και  $\mathbf{a}(t)$  ή της ανυσματικής συνάρτησης  $\mathbf{R}(t)$ , συνεπώς, και των παραγώγων αυτής, η επιτρόχιος και η κεντρομόλος επιτάχυνση του κινούμενου σωματιδίου μπορεί να υπολογιστούν από τις εξισώσεις:

$$a_\varepsilon = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{R}'(t) \cdot \mathbf{R}''(t)}{|\mathbf{R}'(t)|} \quad (4-50)$$

$$a_n = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{R}'(t) \times \mathbf{R}''(t)|}{|\mathbf{R}'(t)|} \quad (4-51)$$



**Σχήμα 4-12** Ανάλυση της επιτάχυνσης στην επιτρόχιο και την κεντρομόλο συνιστώσα της.

όπου  $\kappa$  είναι η **καμπυλότητα** της καμπύλης που ορίζεται από τη συνάρτηση  $\mathbf{R}(t)$  στο σημείο  $M$ , το αντίστροφο της οποίας είναι η τοπική **ακτίνα καμπυλότητας**  $\mathcal{R}$  ( $\kappa = 1/\mathcal{R}$ ).

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-6

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός της ταχύτητας και της επιτάχυνσης ενός σωματιδίου το οποίο κινείται σε καμπύλη τροχιά.

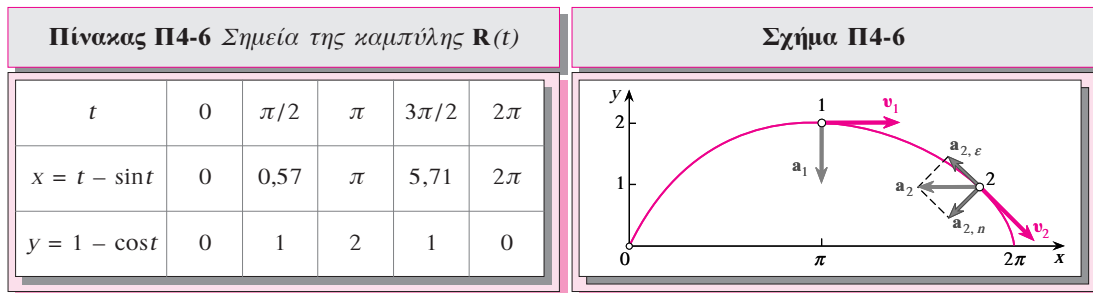
**Το πρόβλημα:** Το άνυσμα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου είναι:

$$\mathbf{R}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1)$$

α. Να ευρεθούν τα ανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου τις χρονικές στιγμές  $t = \pi$  και  $t = 3\pi/2$  και να σχεδιαστούν μαζί με την τροχιά του στο  $xy$ -επίπεδο.

β. Να υπολογιστούν η επιτροχόιος και η κεντρομόλος επιτάχυνση του σωματιδίου τις ίδιες χρονικές στιγμές ( $t = \pi$  και  $t = 3\pi/2$ ).

**Λύση:** α. Πρώτα-πρώτα, η τροχιά που διαγράφει το σωματίδιο στο χώρο είναι κυκλοειδής καμπύλη, όπως φαίνεται και στο Σχήμα Π4-6. Για τη χάραξη της συγκεκριμένης κυκλοειδούς καμπύλης χρησιμοποιήθηκαν τα δεδομένα που περιέχονται στον Πίνακα Π4-6.



Σύμφωνα με την εξίσωση (4-38), το άνυσμα  $\mathbf{v}(t)$  της ταχύτητας του σωματιδίου είναι ίσο με την πρώτη παράγωγο του ανύσματος  $\mathbf{R}(t)$  και εφάπτεται της τροχιάς του σε κάθε σημείο της:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}'(t) = (1 - \cos t)\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} \quad (\alpha-1)$$

Επομένως, η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου όταν διέρχεται από τα σημεία (1) και (2) τις χρονικές στιγμές  $t = \pi$  και  $t = 3\pi/2$ , αντίστοιχα, είναι:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}(\pi) = 2\mathbf{i} \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}(3\pi/2) = \mathbf{i} - \mathbf{j} \quad (\alpha-2)$$

Εξ ορισμού, [Εξ. (4-44)], το άνυσμα  $\mathbf{a}(t)$  της στιγμιαίας επιτάχυνσης είναι ίσο με την πρώτη παράγωγο του ανύσματος  $\mathbf{v}(t)$  της ταχύτητας. Δηλαδή:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} \quad (\alpha-3)$$

Επομένως, η επιτάχυνση του σωματιδίου όταν διέρχεται από τα σημεία (1) και (2) είναι:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}(\pi) = -\mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}(3\pi/2) = -\mathbf{i} \quad (\alpha-4)$$

Προκειμένου να βρούμε τη γωνία  $\theta$  που σχηματίζουν οι φορείς των ανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{a}$ , χρησιμοποιούμε την εξίσωση ορισμού του εσωτερικού γινομένου ανυσμάτων. Έτσι,

$$\cos\theta_1 = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{a}_1|} = \frac{(2\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j})}{|2\mathbf{i}||-\mathbf{j}|} = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 90^\circ \quad (\alpha-5)$$

$$\cos\theta_2 = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{v}_2||\mathbf{a}_2|} = \frac{(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i})}{|\mathbf{i} - \mathbf{j}||-\mathbf{i}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \theta_2 = 135^\circ \quad (\alpha-6)$$

Τα ανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{a}$  στις θέσεις (1) και (2) του σωματιδίου απεικονίζονται στο Σχήμα Π4-6.

**β** Το άνυσμα  $\mathbf{a}$  της επιτάχυνσης αναλύεται σύμφωνα με την εξίσωση (4-49):

$$\mathbf{a} = a_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} + a_n \mathbf{n} \quad (\beta-1)$$

όπου  $a_\epsilon$  είναι η επιτρόχιος και  $a_n$  η κεντρομόλος επιτάχυνση. Επειδή το άνυσμα  $\mathbf{a}_1$  είναι κάθετο στο άνυσμα  $\mathbf{v}_1$ , [Εξ. (α-5)], άρα και στην εφαπτομένη της τροχιάς στο σημείο (1), οι επιταχύνσεις  $a_{\epsilon,1}$  και  $a_{n,1}$  του σωματιδίου είναι:

$$a_{\epsilon,1} = 0 \quad \text{και} \quad a_{n,1} = |\mathbf{a}_1| = 1 \quad (\beta-2)$$

Επομένως, η εξίσωση (β-1) απλοποιείται στη σχέση:

$$\mathbf{a} = 1 \mathbf{n} \quad (\beta-3)$$

Όμοια, επειδή το άνυσμα  $\mathbf{a}_2$  σχηματίζει με το άνυσμα  $\mathbf{v}_2$  γωνία  $135^\circ$ , [Εξ. (α-6)], οι επιταχύνσεις  $a_{\epsilon,2}$  και  $a_{n,2}$  του σωματιδίου είναι:

$$a_{\epsilon,2} = |\mathbf{a}_2| \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad a_{n,2} = |\mathbf{a}_2| \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\beta-4)$$

Επομένως, η εξίσωση (β-1) γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{n} \quad (\beta-5)$$

Το αρνητικό πρόσημο, που υπάρχει μπροστά στον πρώτο όρο του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (β-5), δικαιολογείται αν λάβουμε υπόψη ότι το άνυσμα  $a_\epsilon \boldsymbol{\epsilon}$  στο σημείο (2) έχει αντίθετη φορά από εκείνη του αντίστοιχου μοναδιαίου εφαπτόμενου ανύσματος  $\boldsymbol{\epsilon}$ .

**Παρατήρηση:** Ο υπολογισμός των συνιστωσών  $a_\epsilon$  και  $a_n$  του ανύσματος  $\mathbf{a}$  της επιτάχυνσης μπορεί να γίνει και με άμεση εφαρμογή των εξισώσεων (4-50) και (4-51), αντίστοιχα. Έτσι, οι δύο συνιστώσες (επιτρόχιος και κεντρομόλος) της επιτάχυνσης  $\mathbf{a}_1$  του σωματιδίου είναι:

$$a_{\epsilon,1} = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{(2\mathbf{i}) \cdot (-\mathbf{j})}{|2\mathbf{i}| |-\mathbf{j}|} = 0 \quad a_{n,1} = \frac{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{a}_1|}{|\mathbf{v}_1|} = \frac{|(2\mathbf{i}) \times (-\mathbf{j})|}{|2\mathbf{i}|} = \frac{|-2\mathbf{k}|}{|2\mathbf{i}|} = 1 \quad (\Pi-1)$$

Όμοια, οι δύο συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{a}_2$  της επιτάχυνσης του σωματιδίου είναι:

$$a_{\epsilon,2} = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{i})}{|\mathbf{i} - \mathbf{j}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad a_{n,2} = \frac{|\mathbf{v}_2 \times \mathbf{a}_2|}{|\mathbf{v}_2|} = \frac{|(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (-\mathbf{i})|}{|\mathbf{i} - \mathbf{j}|} = \frac{|-\mathbf{k}|}{|\mathbf{i} - \mathbf{j}|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\Pi-2)$$

**Επιτάχυνση Μεταφοράς και Τοπική Επιτάχυνση:** Εάν  $\mathbf{R}_0$  είναι το υλικό άνυσμα θέσης του σωματιδίου, η στιγμιαία επιτάχυνση  $\mathbf{a}$  αυτού δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a} = \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad (4-52)$$

Επειδή το υλικό άνυσμα  $\mathbf{R}_0$  του σωματιδίου είναι σταθερό, το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (4-52) ταυτίζεται με την υλική παράγωγο του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (4-53)$$

Η εξίσωση αυτή προκύπτει άμεσα από τη γενική εξίσωση (4-29), για  $\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{v}$ . Εξετάζοντας την εξίσωση (4-53), παρατηρούμε ότι η επιτάχυνση  $\mathbf{a}$  είναι άθροισμα δύο όρων.

Ο πρώτος όρος,  $\partial \mathbf{v} / \partial t$ , ονομάζεται **τοπική επιτάχυνση**,  $\mathbf{a}_e$ , και δίνει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ταχύτητα του σωματιδίου σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου:

$$\mathbf{a}_e = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας} \\ \text{σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου} \end{array} \right\} \quad (4-54)$$

Τοπική επιτάχυνση υφίστανται τα σωματίδια όταν κινούνται σε πεδία ταχύτητας τα οποία μεταβάλλονται με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή όταν η ροή είναι *μη μόνιμη*.

Ο δεύτερος όρος,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ , ονομάζεται **επιτάχυνση μεταφοράς**,  $\mathbf{a}_c$ , και δίνει τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σωματιδίου καθώς κινείται μέσα στο πεδίο ροής:

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας λό-} \\ \text{γω μεταφοράς του ρευστού στο χώρο} \end{array} \right\} \quad (4-55)$$

Επιτάχυνση μεταφοράς υφίστανται τα σωματίδια όταν κινούνται σε πεδία ταχύτητας όπου η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, δηλαδή όταν η ροή είναι *ανομοιόμορφη* [§4-7]. Έτσι ακόμη και σε μόνιμη ροή, το ρευστό μπορεί να επιταχύνεται όπως συμβαίνει π.χ. όταν κινείται σε συγκλίνον ακροφύσιο. Αντίθετα, η επιτάχυνση μεταφοράς είναι μηδέν όταν το ρευστό κινείται σε αγωγό σταθερής διατομής.

Το άθροισμα των δύο επιμέρους επιταχύνσεων (τοπικής και μεταφοράς) ονομάζεται **ολική επιτάχυνση**,  $\mathbf{a}$ , και δίνει τον ολικό ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας του σωματιδίου τον οποίο αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής ο οποίος κινείται κατά την κατεύθυνση της ροής με την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ολικός ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ως προς έναν παρατηρητή} \\ \text{που κινείται μέσα στο πεδίο ροής με την ταχύτητα του ρευστού} \end{array} \right\} \quad (4-56)$$

Αντίθετα προς τον κινούμενο παρατηρητή, ο ακίνητος παρατηρητής δεν μπορεί να "αισθανθεί" την επιτάχυνση  $\mathbf{a}$  με την οποία κινείται το σωματίδιο, αλλά μπορεί να προσδιορίσει το μέγεθός της. Για τον σκοπό αυτό, ο ακίνητος παρατηρητής πρέπει να γνωρίζει την ταχύτητα του ρευστού, τον τοπικό ρυθμό μεταβολής της και τις βαθμίδες ταχύτητας  $\partial \mathbf{v} / \partial x$ ,  $\partial \mathbf{v} / \partial y$  και  $\partial \mathbf{v} / \partial z$  κατά τις διευθύνσεις των αξόνων  $x$ ,  $y$  και  $z$ , αντίστοιχα.

Στο *κυλινδρικό* και το *σφαιρικό* σύστημα συντεταγμένων, η ανυσματική εξίσωση (4-53) λαμβάνει τη μορφή των ανυσματικών εξισώσεων (4-32) και (4-33), αντίστοιχα:

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_r \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \quad (4-57)$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_R \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial R} + \frac{v_\phi}{R} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{R \sin \phi} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \quad (4-58)$$

**Συνιστώσες Επιτάχυνσης:** Αν σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της ανυσματικής εξίσωσης (4-53) με το μοναδιαίο άνυσμα  $\mathbf{e}_i$ , προκύπτει η βαθμωτή εξίσωση:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla v_i \quad (4-59)$$

Σε πλήρη ανάπτυξη, η εξίσωση (4-59) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_i}{\partial z} \quad (4-60)$$

**Πίνακας 4-3** Καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συνιστώσες της ολικής επιτάχυνσης**ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \quad (4-61\alpha)$$

$$a_y = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (4-61\beta)$$

$$a_z = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4-61\gamma)$$

**ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4-62\alpha)$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \quad (4-62\beta)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (4-62\gamma)$$

**ΣΥΣΤΗΜΑ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ**

$$a_R = \frac{\partial v_R}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_R}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_R}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{R \sin \varphi} \frac{\partial v_R}{\partial \theta} - \frac{v_\varphi^2 + v_\theta^2}{R} \quad (4-63\alpha)$$

$$a_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\varphi}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{R \sin \varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_R v_\varphi}{R} - \frac{v_\theta^2 \cot \varphi}{R} \quad (4-63\beta)$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_R \frac{\partial v_\theta}{\partial R} + \frac{v_\varphi}{R} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{R \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_R}{R} + \frac{v_\varphi v_\theta \cot \varphi}{R} \quad (4-63\gamma)$$

όπου  $a_i (= \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i)$  είναι η συνιστώσα της επιτάχυνσης  $\mathbf{a}$  κατά τη διεύθυνση του ανύσματος  $\mathbf{e}_i$ . Θέτοντας στην εξίσωση (4-60)  $i = x, y, z$ , προκύπτουν οι τρεις καρτεσιανές συνιστώσες ( $a_x, a_y, a_z$ ) της επιτάχυνσης  $\mathbf{a}$  του σωματιδίου. Οι καρτεσιανές ( $a_x, a_y, a_z$ ), οι κυλινδρικές ( $a_r, a_\theta, a_z$ ) και οι σφαιρικές ( $a_R, a_\varphi, a_\theta$ ) συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{a}$  της ολικής επιτάχυνσης δίνονται στον Πίνακα 4-3.

Επειδή ο όρος  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$  της επιτάχυνσης μεταφοράς περιέχει γινόμενα μεταβλητών είναι μη γραμμικός. Έτσι από τους δώδεκα όρους των τριών συνιστωσών της επιτάχυνσης που εμφανίζονται στις εξισώσεις (4-61), οι εννέα όροι είναι μη γραμμικοί. Όμως, στα περισσότερα από τα συνήθη προβλήματα της Ρευστομηχανικής, όπως π.χ. στα προβλήματα ροής ρευστών σε αγωγούς, οι μη γραμμικοί όροι της επιτάχυνσης περιορίζονται

σε ένα ή το πολύ δύο. Γενικά, λόγω του όρου της επιτάχυνσης, οι βασικές εξισώσεις κίνησης [Κεφ. 8] είναι μη γραμμικές, γεγονός που δυσχεραίνει την επίλυσή τους.

**Επισήμανση:** Σε πολλά συγγράμματα, οι σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται με τη σειρά  $(r, \theta, \varphi)$ , όπου  $\theta$  είναι η γωνία του ανύσματος θέσης  $\mathbf{R}$  με τον άξονα  $z$  και  $\varphi$  η γωνία της προβολής του ανύσματος  $\mathbf{R}$  στο οριζόντιο επίπεδο  $(xy)$  με τον άξονα  $x$ , ώστε να υπάρχει αντιστοιχία με τη σειρά  $(r, \theta, z)$  των κυλινδρικών συντεταγμένων. Όμως στο παρόν σύγγραμμα, σε συμφωνία και με το βιβλίο Ανύσματα και Τανυστές, προτιμήθηκε η σειρά  $(R, \varphi, \theta)$  και αυτό, επειδή η τριάδα των αντίστοιχων μοναδιαίων ανυσμάτων βάσης  $(\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta)$  σε κάθε σημείο  $M$  του χώρου, τα οποία δείχνουν τις κατευθύνσεις αύξησης των συντεταγμένων  $R, \varphi$  και  $\theta$ , αντίστοιχα, σχηματίζουν **δεξιόστροφη βάση** (βλ. Σχήμα 1-1γ).

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-7

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης (τοπικής, μεταφοράς και ολικής) σε ορισμένο σημείο του πεδίου ροής όταν είναι γνωστή η έκφραση του πεδίου ταχύτητας.

**Το πρόβλημα:** Η ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος του άξονα  $x$  του ακροφυσίου που φαίνεται στο Σχήμα Π4-7 προσεγγίζεται από τη σχέση:

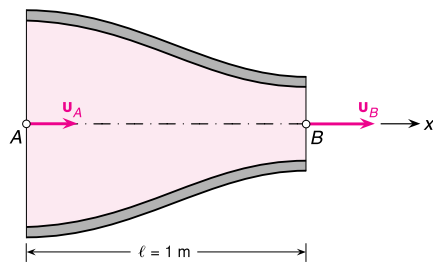
$$\mathbf{v} = \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i} \quad (1)$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση από την είσοδο του ακροφυσίου,  $\ell = 1 \text{ m}$  το μήκος του και  $t$  ο χρόνος. Όλα τα μεγέθη της εξίσωσης (1) εκφράζονται σε μονάδες του Διεθνούς Συστήματος. Να υπολογιστούν: (α) η ταχύτητα, (β) η τοπική επιτάχυνση, (γ) η επιτάχυνση μεταφοράς και (δ) η ολική επιτάχυνση του ρευστού στα σημεία  $A$  και  $B$  του άξονα του ακροφυσίου τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$ .

**Λύση:** α Η ταχύτητα του ρευστού στα σημεία  $A$  και  $B$  υπολογίζεται άμεσα από την εξίσωση (1) για τα ζεύγη  $(x = 0, t = 2 \text{ s})$  και  $(x = \ell, t = 2 \text{ s})$ , αντίστοιχα:

$$\mathbf{v}_A = \frac{2(2)}{(1 - 0)^2} \mathbf{i} \text{ m/s} = 4 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad (\alpha-1)$$

$$\mathbf{v}_B = \frac{2(2)}{(1 - 1/2)^2} \mathbf{i} \text{ m/s} = 16 \mathbf{i} \text{ m/s} \quad (\alpha-2)$$



Σχήμα Π4-7

β Η τοπική επιτάχυνση  $\mathbf{a}_\ell$  του ρευστού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{a}_\ell = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{2t}{(1 - x/2\ell)^2} \right] \mathbf{i} = \frac{2}{(1 - x/2\ell)^2} \mathbf{i} \quad (\beta-1)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, προκύπτουν οι τιμές των τοπικών επιταχύνσεων του ρευστού στα σημεία  $A$  και  $B$ :

$$\mathbf{a}_{\ell, A} = \frac{2}{(1 - 0)^2} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 2 \mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\beta-2)$$

$$\mathbf{a}_{\ell, B} = \frac{2}{(1 - 1/2)^2} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 8 \mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\beta-3)$$

γ Η επιτάχυνση μεταφοράς  $\mathbf{a}_c$  του ρευστού υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_c &= \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = (u_x \mathbf{i}) \cdot \nabla (u_x \mathbf{i}) = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \mathbf{i} = \left( \frac{2t}{(1-x/2\ell)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2t}{(1-x/2\ell)^2} \right) \mathbf{i} \\ &= \left( \frac{2t}{(1-x/2\ell)^2} \right) \left( \frac{2t(-2)}{(1-x/2\ell)^3} \right) \left( -\frac{1}{2\ell} \right) \mathbf{i} = \frac{4t^2}{(1-x/2\ell)^5 \ell} \mathbf{i}\end{aligned}\quad (\gamma-1)$$

Επομένως, οι τιμές της επιτάχυνσης μεταφοράς του ρευστού στα σημεία  $A$  και  $B$  είναι:

$$\mathbf{a}_{c,A} = \frac{4(2)^2}{(1-0)^5(1)} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 16\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\gamma-2) \quad \mathbf{a}_{c,B} = \frac{4(2)^2}{(1-1/2)^5(1)} \mathbf{i} \text{ m/s}^2 = 512\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\gamma-3)$$

δ Η ολική επιτάχυνση ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}_\ell + \mathbf{a}_c$ ) του ρευστού στα σημεία  $A$  και  $B$  είναι:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\ell,A} + \mathbf{a}_{c,A} = (2\mathbf{i} + 16\mathbf{i}) \text{ m/s}^2 = 18\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\delta-1)$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{\ell,B} + \mathbf{a}_{c,B} = (8\mathbf{i} + 512\mathbf{i}) \text{ m/s}^2 = 520\mathbf{i} \text{ m/s}^2 \quad (\delta-2)$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-8

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης σωματιδίων ρευστού σε περιστροφική κίνηση.

**Το πρόβλημα:** Ένα κυλινδρικό δοχείο, ακτίνας  $R = 10 \text{ cm}$ , περιέχει νερό μέχρι βάθος  $h$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα Π4-8. Μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t = 0$ , το δοχείο αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονά του. Κατά την έναρξη της περιστροφής και μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 2 \text{ s}$ , μετά την οποία το δοχείο περιστρέφεται με σταθερή ταχύτητα  $\omega_0 = 80 \text{ rev/min}$ , η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  του δοχείου δίνεται από την εξίσωση:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \frac{t}{\tau} \mathbf{k} \quad (1)$$

όπου  $\mathbf{k}$  είναι το μοναδιαίο άνυσμα βάσης του κυλινδρικού συστήματος κατά τη διεύθυνση  $z$ . Να υπολογιστεί η επιτάχυνση των σωματιδίων του ρευστού τα οποία βρίσκονται στην επιφάνεια του δοχείου: (α)  $1 \text{ s}$  και (β)  $5 \text{ s}$  μετά την έναρξη της περιστροφής του δοχείου.

**Λύση:** Η γενική έκφραση της ολικής επιτάχυνσης του ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες δίνεται από την εξίσωση:

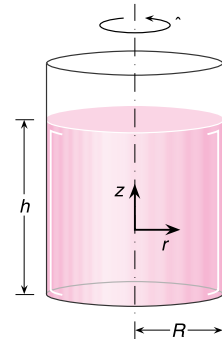
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta + a_z \mathbf{e}_z \quad (2)$$

όπου ( $a_r$ ,  $a_\theta$ ,  $a_z$ ) είναι οι συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{a}$  της επιτάχυνσης και ( $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_z$ ) τα μοναδιαία ανύσματα βάσης του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων. Οι συνιστώσες ( $a_r$ ,  $a_\theta$ ,  $a_z$ ) υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4-62). Σύμφωνα με τη συνθήκη μη ολίσθησης, τα σωματίδια του ρευστού που βρίσκονται στην επιφάνεια του δοχείου έχουν την ίδια ταχύτητα με αυτό. Επομένως, οι ταχύτητες  $v_r$ ,  $v_\theta$  και  $v_z$  ενός τέτοιου σωματιδίου είναι:

$$v_r = 0 \quad v_\theta = \omega R \quad v_z = 0 \quad (3)$$

Εξάλλου, λόγω συμμετρίας, οι μεταβολές των ιδιοτήτων του περιστρεφόμενου ρευστού ως προς τη μεταβλητή  $\theta$  είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$



Σχήμα Π4-8

Έτσι, οι τρεις εξισώσεις (4-62) απλοποιούνται στις σχέσεις:

$$a_r = -\frac{v_\theta^2}{r} \quad a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} \quad a_z = 0 \quad (5)$$

**α** Τη χρονική στιγμή  $t = 1$  s ισχύει η εξίσωση (1), οπότε η ταχύτητα  $v_\theta$  των σωματιδίων του ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με την επιφάνεια του δοχείου είναι:

$$v_\theta = \frac{\omega_0 R t}{\tau} \quad (\alpha-1)$$

Λόγω της σχέσης αυτής, οι εξισώσεις (5) τροποποιούνται ως εξής:

$$a_r = -R \left( \frac{\omega_0 t}{\tau} \right)^2 \quad a_\theta = \frac{\omega_0 R}{\tau} \quad a_z = 0 \quad (\alpha-2)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή των δύο πρώτων εξισώσεων (α-2), προκύπτουν οι τιμές:

$$a_r = - (0,10 \text{ m}) \left( 80 \frac{\text{στρ}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{στρ}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{1 \text{ s}}{2} \right)^2 = -1,75 \text{ m/s}^2 \quad (\alpha-3)$$

$$a_\theta = \left( 80 \frac{\text{στρ}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{στρ}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left( \frac{0,10 \text{ m}}{2 \text{ s}} \right) = 4,18 \text{ m/s}^2 \quad (\alpha-4)$$

Άρα, τη χρονική στιγμή  $t = 1$  s, η ανυσματική έκφραση της επιτάχυνσης  $\mathbf{a}$  των σωματιδίων του ρευστού τα οποία βρίσκονται στην επιφάνεια του δοχείου είναι:

$$\mathbf{a} = -1,75\mathbf{e}_r + 4,18\mathbf{e}_\theta \quad (\text{m/s}^2) \quad (\alpha-5)$$

**β** Τη χρονική στιγμή  $t = 5$  s τα σωματίδια του ρευστού περιστρέφονται με σταθερή ταχύτητα  $\omega_0$ , οπότε οι εξισώσεις (5) γράφονται:

$$a_r = -\omega_0^2 R \quad a_\theta = 0 \quad a_z = 0 \quad (\beta-1)$$

Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, τα σωματίδια του ρευστού έχουν μόνο κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$a_r = - \left( 80 \frac{\text{στρ}}{\text{min}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{στρ}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right)^2 (0,10 \text{ m}) = -7,01 \text{ m/s}^2 \quad (\beta-2)$$

Άρα, στη μόνιμη κατάσταση, τα σωματίδια του ρευστού τα οποία βρίσκονται στην επιφάνεια του δοχείου περιστρέφονται με σταθερή επιτάχυνση:

$$\mathbf{a} = -7,01\mathbf{e}_r \quad (\text{m/s}^2) \quad (\beta-3)$$

## 4-6 Ρυθμοί Ροής Μάζας και Όγκου Ρευστού

### ■ ΡΥΘΜΟΣ ΡΟΗΣ ΜΑΖΑΣ

**Ρυθμός ροής μάζας** (ή **παροχή μάζας**),  $\dot{m}$ , ονομάζεται η ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από μια ορισμένη επιφάνεια του πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου.

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} \quad (4-64)$$

Ας δούμε πρώτα πώς υπολογίζεται ο ρυθμός ροής μάζας ρευστού το οποίο κινείται με ομοιόμορφη ταχύτητα  $\mathbf{v}$  και διέρχεται από μια *επίπεδη* κυκλική επιφάνεια  $A$ . Ο προσα-

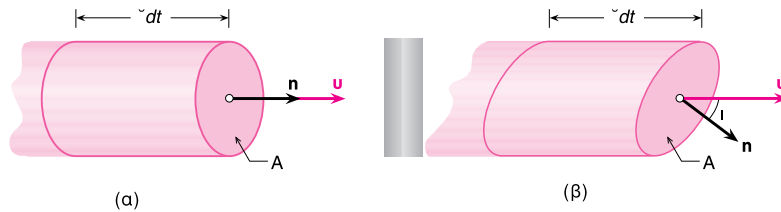
νατολισμός της επιφάνειας  $A$  στον χώρο καθορίζεται με την κατεύθυνση του μοναδιαίου ανύσματος  $\mathbf{n}$ , το οποίο είναι κάθετο σε αυτήν. Έτσι, όταν η επιφάνεια  $A$  είναι *κάθετη* προς τη διεύθυνση ροής, το άνυσμα  $\mathbf{n}$  είναι παράλληλο προς το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας. Μια τέτοια περίπτωση εικονίζεται στο Σχήμα 4-13α. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, σε χρόνο  $dt$  διέρχεται από την επιφάνεια  $A$  όλη η ποσότητα του ρευστού που βρίσκεται πίσω από αυτήν και μέχρι βάθος  $vdt$ , όπου  $v$  είναι το μέτρο της ταχύτητας. Η ποσότητα αυτή είναι ίση με το γινόμενο της πυκνότητας  $\rho$  του ρευστού επί τον όγκο  $A v dt$  του εικονιζόμενου κυλίνδρου, οπότε από την εξίσωση (4-64) προκύπτει:

$$\dot{m} = \rho v A, \quad \text{όταν } \mathbf{n} // \mathbf{v} \quad (4-65)$$

Ας δούμε τώρα πώς τροποποιείται η εξίσωση (4-65) αν η επιφάνεια  $A$  είναι *κεκλιμένη* ως προς τη διεύθυνση ροής (βλ. Σχήμα 4-13β). Στην περίπτωση αυτή, η μάζα  $dm$  του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια  $A$ , σε χρόνο  $dt$ , είναι ίση με τη μάζα του ρευστού που περιέχεται στον εικονιζόμενο "πλάγιο" κύλινδρο. Ο κύλινδρος αυτός έχει όγκο  $(A \cos \theta) v dt$ , όπου  $A \cos \theta$  είναι το εμβαδόν της προβολής της επιφάνειας  $A$  σε επίπεδο κάθετο στο άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας. Το γινόμενο  $v \cos \theta$  μπορεί να αντικατασταθεί από το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{n}$ . Έτσι η μάζα  $dm$  του ρευστού που περιέχεται στον πλάγιο κύλινδρο είναι  $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A dt$ , οπότε από την εξίσωση (4-64) προκύπτει:

$$\dot{m} = \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) A = \rho v_n A, \quad \text{όταν } (\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{v}}) = \theta \quad (4-66)$$

όπου  $v_n$  είναι η συνιστώσα του ανύσματος  $\mathbf{v}$  κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου ανύσματος  $\mathbf{n}$ . Επομένως, στην περίπτωση αυτή, η ποσότητα του ρευστού που διέρχεται από την επιφάνεια  $A$  στη μονάδα του χρόνου καθορίζεται από το μέγεθος της συνιστώσας  $v_n$  της ταχύτητας  $\mathbf{v}$ . Για  $\theta = 0^\circ$ , η εξίσωση (4-66) οδηγεί στην εξίσωση (4-65).

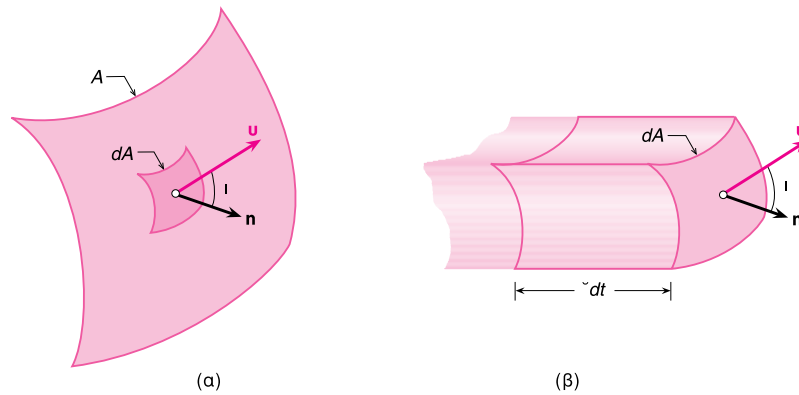


**Σχήμα 4-13** Απεικόνιση των μεγεθών της εξίσωσης ορισμού του ρυθμού ροής μάζας του ρευστού που διέρχεται από επίπεδη επιφάνεια: (α) κάθετη και (β) κεκλιμένη ως προς τη διεύθυνση ροής.

Οι δύο προηγούμενες περιπτώσεις υπολογισμού του ρυθμού  $\dot{m}$  αναφέρονται σε ρευστό που κινείται στο χώρο με *ομοιόμορφη* ταχύτητα και διέρχεται από *επίπεδη* επιφάνεια. Το επόμενο βήμα είναι να δούμε πώς τροποποιείται η εξίσωση (4-66), όταν το ρευστό κινείται με *ανομοιόμορφη* ταχύτητα και διέρχεται από *τυχαία* επιφάνεια πεπερασμένου μεγέθους (βλ. Σχήμα 4-14α). Στην περίπτωση αυτή, ο ρυθμός ροής μάζας του ρευστού διαμέσου της επιφάνειας  $A$  υπολογίζεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\dot{m} = \iint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Μάζα του ρευστού που διέρχεται} \\ \text{από την τυχαία επιφάνεια } A \text{ του} \\ \text{πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\} \quad (4-67)$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα  $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$  δίνει τον ρυθμό ροής μάζας του ρευστού που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$ . Ο προσανατολισμός της επιφάνειας  $dA$  καθορίζεται από το μοναδιαίο άνυσμα  $\mathbf{n}$ , το οποίο σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της *τοπικής* ταχύτητας. Στο Σχήμα 4-14β εικονίζεται παραστατικά ο χώρος τον οποίο καταλαμβάνει η μάζα του ρευστού που διέρχεται από τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dA$  σε χρόνο  $dt$ .

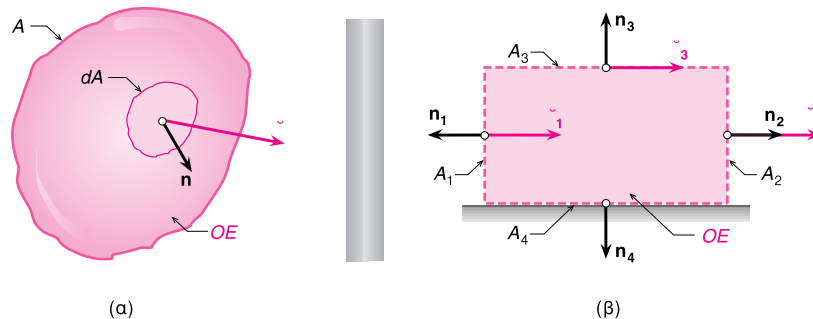


**Σχήμα 4-14** Απεικόνιση των μεγεθών της εξίσωσης ορισμού του ρυθμού ροής μάζας του ρευστού το οποίο διέρχεται από τυχαία επιφάνεια: (α) πεπερασμένου μεγέθους και (β) στοιχειώδη.

Τέλος, ας θεωρήσουμε και την περίπτωση ροής ρευστού διαμέσου μιας κλειστής επιφάνειας, η οποία περιβάλλει έναν όγκο ελέγχου (βλ. Σχήμα 4-15α). Στην περίπτωση αυτή, το κλειστό επιφανειακό ολοκλήρωμα της ποσότητας  $\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$  δίνει το ρυθμό *καθαρής εκροής* (= εκροή – εισροή) μάζας του ρευστού από τον ΟΕ διαμέσου της ΕΕ:

$$\dot{m} = \oiint_A \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής μάζας του} \\ \text{ρευστού από έναν όγκο ελέγχου} \\ \text{διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right\} \quad (4-68)$$

Το κριτήριο που καθορίζει αν το ρευστό εισρέει ή εκρέει από τον όγκο ελέγχου σε ένα ορισμένο τμήμα της επιφάνειας ελέγχου είναι το *πρόσημο* του εσωτερικού γινομένου  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ . Για δεδομένο άνυσμα  $\mathbf{v}$ , το πρόσημο του γινομένου  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  εξαρτάται από τη φορά του μοναδιαίου ανύσματος  $\mathbf{n}$ , η οποία όμως δεν είναι καθορισμένη, αφού το άνυσμα  $\mathbf{n}$  μπορεί να κατευθύνεται είτε προς το εσωτερικό είτε προς το περιβάλλον του όγκου ελέγχου. Το ποιά φορά θα έχει τελικά το άνυσμα  $\mathbf{n}$  είναι θέμα *σύμβασης*. Συνήθως (και αυτή η σύμβαση εφαρμόζεται και στο βιβλίο αυτό), το *μοναδιαίο άνυσμα n* σχεδιάζεται *κάθετα προς την επιφάνεια ελέγχου και με φορά, από το εσωτερικό, προς το περιβάλλον του όγκου ελέγχου και, η φορά αυτή, θεωρείται θετική*. Έτσι με δεδομένη πλέον τη φορά του ανύσματος  $\mathbf{n}$ , το εσωτερικό γινόμενο  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$  είναι *θετικό* ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$ ) όταν το ρευστό *εκρέει* από τον όγκο ελέγχου, *αρνητικό* ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0$ ) όταν *εισρέει* στον όγκο ελέγχου και *μηδέν* ( $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$ ) όταν *κινείται παράλληλα* προς το θεωρούμενο τμήμα της επιφάνειας ελέγχου ή το τμήμα αυτό είναι *στερεό* (αδιαπέραστο) τοίχωμα, οπότε,



**Σχήμα 4-15** (α) Απεικόνιση των μεγεθών της εξίσωσης ορισμού του ρυθμού καθαρής εκροής μάζας ρευστού διαμέσου κλειστής επιφάνειας και (β) όγκος ελέγχου στον οποίο εμφανίζεται εισροή, εκροή, εφαπτομενική ροή και μηδενική ροή διαμέσου των επιφανειών  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  και  $A_4$ , αντίστοιχα.

λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης, η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν ( $\mathbf{v} = 0$ ). Στο Σχήμα 4-15β εικονίζεται ένας ΟΕ που έχει επιλεγεί έτσι, ώστε να εμφανίζονται και οι τέσσερις περιπτώσεις ροής: *εισροή, εκροή, εφαπτομενική ροή και μηδενική ροή* του ρευστού διαμέσου των επιφανειών  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  και  $A_4$ , αντίστοιχα.

## ΡΥΘΜΟΣ ΡΟΗΣ ΟΓΚΟΥ

**Ρυθμός ροής όγκου** (ή *ογκομετρική παροχή*),  $\dot{V}$ , ονομάζεται ο όγκος του ρευστού που διέρχεται από μια ορισμένη επιφάνεια του πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου. Το μέγεθος αυτό έχει διαστάσεις  $L^3T^{-1}$  και η μονάδα μέτρησής του στο Διεθνές Σύστημα είναι το  $m^3/s$ . Για *ασυμπίεστη* ροή, η εξίσωση (4-67) μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\dot{m} = \rho \dot{V} \quad (4-69)$$

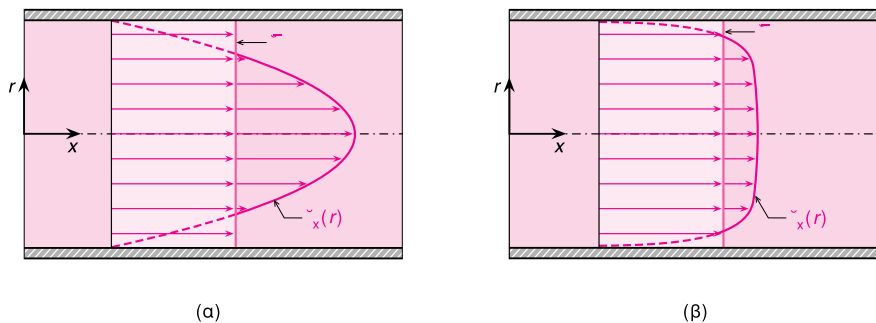
Από τη σύγκριση των εξισώσεων (4-67) και (4-69), προκύπτει η εξίσωση ορισμού του ρυθμού ροής όγκου του ρευστού διαμέσου της επιφάνεια  $A$  του πεδίου ροής:

$$\dot{V} = \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Όγκος του ρευστού που διέρχεται} \\ \text{από την τυχαία επιφάνεια } A \text{ του} \\ \text{πεδίου ροής στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\} \quad (4-70)$$

Η ογκομετρική παροχή χρησιμοποιείται συχνά, ιδιαίτερα στη ροή ρευστών σε αγωγούς, για τον ορισμό της **μέσης ταχύτητας**,  $\bar{v}$ , με την οποία το ρευστό υποτίθεται ότι διαπερνά τη θεωρούμενη επιφάνεια  $A$ . Η μέση ταχύτητα του ρευστού ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{v} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (4-71)$$

Η παύλα (–) πάνω από το σύμβολο της ταχύτητας, συνήθως, παραλείπεται και η μέση ταχύτητα παριστάνεται απλά με το σύμβολο  $v$ . Η μέση ταχύτητα αν και είναι ιδεατή, χρησιμοποιείται συχνά ως ταχύτητα αναφοράς για τη σύγκριση πειραματικών αποτελεσμάτων από διάφορες ροές. Για *στρωτή* ροή σε αγωγούς, η μέση ταχύτητα διαφέρει σημαντικά από την πραγματική ταχύτητα στο μεγαλύτερο τμήμα της εγκάρσιας διατομής του αγωγού. Αντίθετα, στην *τυρβώδη* ροή, η μέση ταχύτητα προσεγγίζει σημαντικά την πραγματική κατανομή της ταχύτητας. Στο Σχήμα 4-16 γίνεται σύγκριση της κατανομής ταχύτητας για στρωτή και τυρβώδη ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής με τη μέση ταχύτητα του ρευστού στον ίδιο αγωγό. Η μέση ταχύτητα έχει σχεδιαστεί ώστε να έχει την ίδια τιμή



**Σχήμα 4-16** Σύγκριση των κατανομών  $v_x(r)$  της ταχύτητας ροής με τη μέση ταχύτητα  $\bar{v}$  του ρευστού για: (α) στρωτή ροή και (β) τυρβώδη ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής.

και στις δύο ροές. Ας σημειωθεί ότι η καμπύλη κατανομής της ταχύτητας για στρωτή ροή έχει θεωρητική προέλευση, ενώ εκείνη για τυρβώδη ροή πειραματική [Κεφ. 8].

### ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΡΥΘΜΟΥ ΡΟΗΣ

Η διακίνηση μάζας ρευστού στον χώρο συνεπάγεται ταυτόχρονη μεταφορά ποσοτήτων διαφόρων *εκτατικών ιδιοτήτων*, όπως π.χ. ενέργειας, ορμής και εντροπίας. Επομένως, η έννοια του ρυθμού ροής μπορεί να γενικευθεί ώστε να περιλαμβάνει μεταφορά ποσότητας οποιασδήποτε εκτατικής ιδιότητας. Έτσι, αν παραστήσουμε με  $B$  μια *τυχαία εκτατική ιδιότητα* του ρευστού, ο ρυθμός ροής της ποσότητας  $B$  διαμέσου μιας απλής επιφάνειας  $A$  θα δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{B} = \iint_A b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ποσότητα } B \text{ του ρευστού που διέρχεται} \\ \text{από την τυχαία επιφάνεια } A \text{ του πεδίου} \\ \text{ροής στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\} \quad (4-72)$$

όπου  $b$  είναι η ποσότητα  $B$  ανηγμένη στη μονάδα μάζας του ρευστού. Η σχέση που συνδέει τις ιδιότητες  $B$  και  $b$  για μια ορισμένη ποσότητα μάζας  $m$  και όγκου  $V$  είναι:

$$B = \int_m b dm = \iiint_V b\rho dV \quad (4-73)$$

όπου  $dm (= \rho dV)$  είναι η μάζα του ρευστού που περιέχεται στον στοιχειώδη όγκο  $dV$ . Οι εξισώσεις (4-67) και (4-70) αποτελούν δύο επιμέρους μορφές της εξίσωσης (4-72), αφού προκύπτουν από αυτή για  $B = m$  ( $b = 1$ ) και  $B = V$  ( $b = v = 1/\rho$ ), αντίστοιχα.

Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε και τον ρυθμό καθαρής εκροής της ποσότητας  $B$  του ρευστού από έναν όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου, δηλαδή:

$$\dot{B} = \oiint_{EE} b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός καθαρής εκροής της ποσότητας} \\ B \text{ του ρευστού από έναν όγκο ελέγχου} \\ \text{διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου} \end{array} \right\} \quad (4-74)$$

Στην ειδική περίπτωση *ομοιόμορφης ροής* στις *διατομές εισόδου και εξόδου* του ρευστού από τον ΟΕ, αντί της εξίσωσης (4-74), μπορούμε να χρησιμοποιούμε την εξίσωση:

$$\dot{B} = \sum_{EE} b\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A \quad (4-75)$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-9

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός της μέσης και της μέγιστης ταχύτητας του ρευστού όταν είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας της ροής.

**Το πρόβλημα:** Γλυκερίνη (θερμοκρασίας  $20^\circ\text{C}$ ) ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας σε μια κατακόρυφη πλάκα πλάτους  $b = 1\text{ m}$ , σχηματίζοντας επάνω σε αυτήν ένα στρώμα ομοιόμορφου πάχους  $\delta$  (βλ. Σχήμα Π4-9). Σε συνθήκες μόνιμης και στρωτής ροής, η κατανομή της ταχύτητας καθόδου της γλυκερίνης σε τυχαία διατομή του στρώματος εγκάρσια προς τη διεύθυνση ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \mathbf{k} \quad (1)$$

όπου  $\nu$  είναι το κινηματικό ιξώδες της γλυκερίνης,  $g$  η τοπική επιτάχυνση βαρύτητας και  $y$  η απόσταση από την επιφάνεια της πλάκας.

- α. Να ευρεθεί η σχέση που συνδέει τη μέση με τη μέγιστη ταχύτητα της γλυκερίνης.  
β. Αν η ογκομετρική παροχή της γλυκερίνης είναι  $0,075 \text{ m}^3/\text{s}$ , πόσο είναι το πάχος  $\delta$  του στρώματος;

**Λύση:** α Για την εύρεση της σχέσης που συνδέει τη μέση ταχύτητα  $\bar{v}$  με τη μέγιστη ταχύτητα  $v_m$  της γλυκερίνης, θα βρούμε πρώτα τις εκφράσεις αυτών συναρτήσει γνωστών μεγεθών. Η μέση ταχύτητα της γλυκερίνης υπολογίζεται από την εξίσωση (4-71):

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (\alpha-1)$$

Εδώ η επιφάνεια  $A$  έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλογράμμου, μήκους  $b$  και πλάτους  $\delta$ , το οποίο είναι κάθετο στον άξονα  $z$ , άρα το μοναδιαίο άνωσμα  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνεια  $dA$  είναι και αυτή ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, μήκους  $b$  και πλάτους  $dy$  (βλ. Σχήμα Π4-9). Έτσι, η εξίσωση (α-1) τροποποιείται ως εξής:

$$\bar{v} = \iint_A v_z dA = \frac{1}{b\delta} \int_0^\delta \frac{g\delta^2}{\nu} \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] b dy = \frac{g}{\delta\nu} \int_0^\delta \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad (\alpha-2)$$

Μετά την εκτέλεση της ολοκλήρωσης στην εξίσωση (α-2), λαμβάνεται η σχέση:

$$\bar{v} = \frac{g\delta^2}{3\nu} \quad (\alpha-3)$$

Για να βρούμε τη μέγιστη ταχύτητα  $v_m$  παραγωγίζουμε την παρακάτω εξίσωση ως προς  $y$ :

$$v_z = \frac{g\delta^2}{\nu} \left[ \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\alpha-4)$$

Η παράγωγος  $dv_z/dy$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\frac{dv_z}{dy} = \frac{g}{\nu} (\delta - y) \quad (\alpha-5)$$

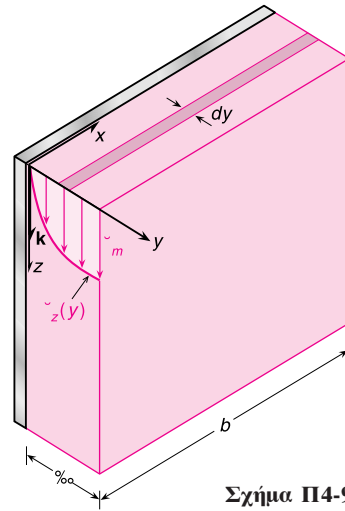
Στη συνέχεια βρίσκουμε την τιμή της μεταβλητής  $y$  (έστω  $y_m$ ) για την οποία μηδενίζεται η παράγωγος  $dv_z/dy$ , άρα και τη θέση στην οποία η ταχύτητα έχει τη μέγιστη τιμή. Αυτό συμβαίνει στη θέση  $y_m = \delta$ , δηλαδή στην ελεύθερη επιφάνεια του στρώματος της γλυκερίνης. [Η δεύτερη παράγωγος  $d^2 v_z/dy^2 = -g/\nu < 0$ , γεγονός που επιβεβαιώνει ότι η συνάρτηση  $v_z(y)$  έχει μέγιστο]. Θέτοντας τώρα  $y = \delta$  στην εξίσωση (α-4), λαμβάνεται η σχέση:

$$v_m = \frac{g\delta^2}{2\nu} \quad (\alpha-6)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις (α-2) και (α-6), προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\bar{v}}{v_m} = \frac{2}{3} \quad (\alpha-7)$$

Άρα, η μέση ταχύτητα καθόδου της γλυκερίνης είναι ίση με τα  $2/3$  της μέγιστης ταχύτητας.



**β** Η ογκομετρική παροχή  $\dot{V}$  της γλυκερίνης δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{V} = \bar{v}A = \left(\frac{g\delta^2}{3\nu}\right)(b\delta) = \frac{gb\delta^3}{3\nu} \quad (\beta-1)$$

Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς  $\delta$ , προκύπτει η σχέση:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\nu\dot{V}}{gb}} \quad (\beta-2)$$

Από τα τέσσερα μεγέθη του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (β-2) είναι γνωστά η παροχή  $\dot{V} = 0,075 \text{ m}^3/\text{s}$ , το πλάτος της πλάκας  $b = 1 \text{ m}$  και η επιτάχυνση βαρύτητας  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Το κινηματικό ιξώδες της γλυκερίνης  $\nu = 1,18 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$  (από τον Πίνακα Π-3). Αντικαθιστώντας τις τιμές των μεγεθών  $\dot{V}$ ,  $b$ ,  $g$  και  $\nu$  στην εξίσωση (β-2), προκύπτει:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3(1,18 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s})(0,075 \text{ m}^3/\text{s})}{(9,81 \text{ m/s}^2)(1 \text{ m})}} = 0,030 \text{ m} \quad (\beta-3)$$

Άρα, το πάχος  $\delta$  του στρώματος της γλυκερίνης που σχηματίζεται επάνω στην πλάκα είναι 3 cm.

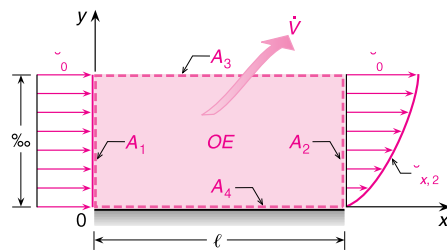
#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-10

**Σκοπός:** Ο υπολογισμός του ρυθμού ροής όγκου διαμέσου ενός τμήματος της επιφάνειας ελέγχου όταν είναι γνωστά ο ρυθμός καθαρής εκροής όγκου από τον όγκο ελέγχου και οι κατανομές της ταχύτητας στα υπόλοιπα τμήματα της επιφάνειας ελέγχου που διαπερνώνται από το ρευστό.

**Το πρόβλημα:** Ένα ασυμπίεστο ρευστό ρέει επάνω σε οριζόντια πλάκα, μήκους  $\ell$  και πλάτους  $b$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα Π4-10. Το ρευστό φτάνει στην αρχή της πλάκας με ομοιόμορφη ταχύτητα  $v_0$  ( $= v_{x,1}$ ) και την εγκαταλείπει με ταχύτητα  $v_{x,2}$  η οποία δίνεται από την εξίσωση:

$$v_{x,2} = v_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad (1)$$

όπου  $\delta$  είναι το πάχος του οριακού στρώματος στη θέση 2 και  $y$  η κατακόρυφη απόσταση από την επιφάνεια της πλάκας. Αν ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον εικονιζόμενο όγκο ελέγχου είναι μηδέν, να υπολογιστεί ο ανά μονάδα βάθους ρυθμός ροής όγκου του ρευστού διαμέσου της επίπεδης επιφάνειας στη θέση  $y = \delta$  ως συνάρτηση της ταχύτητας  $v_0$  και του πάχους  $\delta$  του οριακού στρώματος.



Σχήμα Π4-10

**Λύση:** Στο Σχήμα Π4-8, εκτός από τον όγκο ελέγχου, απεικονίζονται το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ως προς το οποίο ανάγεται η κίνηση του ρευστού και οι κατανομές της ταχύτητας στις θέσεις  $x_1 = 0$  και  $x_2 = \ell$ . Ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας του ρευστού από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της επιφάνειας ελέγχου δίνεται από την εξίσωση (4-68):

$$\dot{m} = \oint_{\partial V} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA \quad (2)$$

Επειδή το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο (άρα η πυκνότητα  $\rho$  είναι σταθερή) και ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας δίνεται ότι είναι μηδέν ( $\dot{m} = 0$ ), η εξίσωση (2) λαμβάνει τη μορφή:

$$\oiint_{EE} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) δείχνει ότι ο ρυθμός καθαρής εκροής όγκου του ρευστού από τον όγκο ελέγχου διαμέσου της ΕΕ είναι μηδέν. Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\iint_{A_1} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 + \iint_{A_2} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 + \iint_{A_3} (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_3 + \iint_{A_4} (\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{n}_4) dA_4 = 0 \quad (4)$$

Τα τέσσερα ολοκληρώματα δίνουν τους ρυθμούς ροής όγκου διαμέσου των επιφανειών  $A_1$  (στη θέση  $x_1 = 0$ ),  $A_2$  (στη θέση  $x_2 = \ell$ ),  $A_3$  (στη θέση  $y = \delta$ ) και  $A_4$  (στη θέση  $y = 0$ ). Το τέταρτο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, αφού η επιφάνεια  $A_4$  είναι αδιαπέραστη από ρευστό. Έτσι, η εξίσωση (4) γράφεται:

$$\dot{V} = \iint_{A_3} (\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{n}_3) dA_3 = - \iint_{A_1} (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) dA_1 - \iint_{A_2} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) dA_2 \quad (5)$$

Τα μοναδιαία ανύσματα  $\mathbf{n}_1$  και  $\mathbf{n}_2$  τα κάθετα στις επίπεδες επιφάνειες  $A_1$  και  $A_2$ , αντίστοιχα, είναι  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i}$  και  $\mathbf{n}_2 = \mathbf{i}$ , οπότε η εξίσωση (5) γράφεται:

$$\dot{V} = - \iint_{A_1} [\mathbf{v}_1 \cdot (-\mathbf{i})] dA_1 - \iint_{A_2} (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{i}) dA_2 = \iint_{A_1} v_{x,1} dA_1 - \iint_{A_2} v_{x,2} dA_2 \quad (6)$$

Επειδή  $dA_1 = dA_2 = bdy$ , όπου  $0 \leq y \leq \delta$ , η εξίσωση (6) τροποποιείται ως εξής:

$$\dot{V} = \int_0^\delta v_0 b dy - \int_0^\delta v_0 \sin\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) b dy = v_0 b \left[ y + \left(\frac{2\delta}{\pi}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \right]_{y=0}^{y=\delta} \quad (7)$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων στην εξίσωση (7), λαμβάνεται τελικά η σχέση:

$$\dot{V} = v_0 b \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad (8)$$

Άρα, ο ρυθμός ροής όγκου ανά μονάδα βάθους του ρευστού διαμέσου της επιφάνειας  $A_3$  είναι:

$$\frac{\dot{V}}{b} = v_0 \delta \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \quad (9)$$

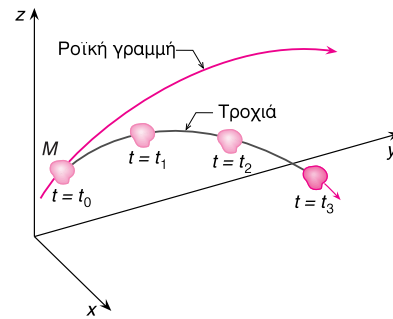
## 4-7 Γραφική Παράσταση Πεδίων Ροής

Στη μελέτη των προβλημάτων ροής ρευστών είναι συχνά επιθυμητή η ύπαρξη μιας γραφικής παράστασης για το πεδίο ροής. Το σχεδιογράφημα συμβάλλει σημαντικά στην ποιοτική και, μερικές φορές, στην ποσοτική περιγραφή της ροής. Για την απεικόνιση των πεδίων ροής χρησιμοποιούνται τρία είδη γραμμών: τροχιές, ινώδεις φλέβες και ροϊκές γραμμές.

### ΤΡΟΧΙΕΣ

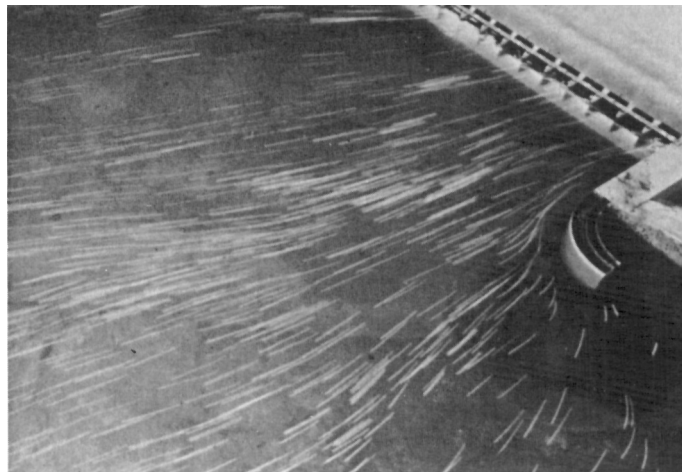
**Τροχιά** ονομάζεται η διαδρομή την οποία ακολουθεί ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ρευστού καθώς κινείται μέσα στο πεδίο ροής για ένα δεδομένο χρονικό διάστημα,  $\Delta t$ .

Στο Σχήμα 4-17 εικονίζεται η τροχιά ενός σωματιδίου το οποίο τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  βρισκόταν στο σημείο  $M$  του χώρου. Για την πειραματική εύρεση μιας τροχιάς πρέπει πρώτα να επισημάνουμε (π.χ. με χρωματισμό) το σωματίδιο του ρευστού την κίνηση του οποίου επιθυμούμε να παρακολουθήσουμε. Στη συνέχεια "αποτυπώνουμε" (π.χ. με διαδοχικές φωτογραφίες ή κινηματογράφηση) την κίνηση του σωματιδίου στον χώρο σε διάφορες χρονικές στιγμές. Από τα διάφορα "στιγμιότυπα" του πεδίου ροής εντοπίζουμε τις θέσεις από τις οποίες πέρασε το χρωματισμένο σωματίδιο και τις συνδέουμε με συνεχή γραμμή. Αυτή η γραμμή αποτελεί την τροχιά του σωματιδίου για το θεωρούμενο χρονικό διάστημα.



Σχήμα 4-17 Απεικόνιση τροχιάς.

Στην πράξη, για την εύρεση των τροχιών χρησιμοποιούνται αιωρούμενα σωματίδια τα οποία μπορούν να ανακλούν φως και φωτίζεται έντονα το πεδίο ροής. Τα φωτιζόμενα σωματίδια παρασύρονται από το κινούμενο ρευστό διαγράφοντας στο πεδίο ροής πλήθος τροχιών, η "αποτύπωση" των οποίων γίνεται με τις προαναφερθείσες τεχνικές. Στο Σχήμα 4-18 φαίνεται παραστατικά η ροή του ρευστού σε μια πειραματική διάταξη προσομοίωσης υπερχειλιστήρα φράγματος. Οι φωτεινές γραμμές παράγονται από τα κινούμενα σωματίδια και αποτελούν τμήματα των τροχιών τους.



Σχήμα 4-18 Τροχιές αιωρούμενων σωματιδίων σε ρεύμα υγρού πάνω από μοντέλο υπερχειλιστήρα φράγματος.

**Εξίσωση Τροχιών:** Η τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού, έστω του  $\mathbf{R}_0$ , περιγράφεται μαθηματικά από την ανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{R}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (4-76)$$

η μορφή της οποίας υποδηλώνει περιγραφή του πεδίου ροής με τη μέθοδο Lagrange. Επομένως, η γραφική παράσταση των πεδίων ροής με τροχιές είναι στην ουσία η απεικόνιση των κατά Lagrange μαθηματικών σχέσεων που διέπουν την κίνηση του ρευστού. Η ακριβής μορφή της εξίσωσης (4-76) προσδιορίζεται εύκολα αν είναι γνωστή η κατά Lagrange έκφραση του πεδίου ταχύτητας, η συναρτησιακή έκφραση του οποίου λαμβάνεται από τη γενική εξίσωση (4-19) για  $\Theta = \mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{R}_0, t) = \mathbf{v}(x_0, y_0, z_0, t) \quad (4-76)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (4-42), η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου  $\mathbf{R}_0$  δίνεται από την υλική παράγωγο του ανύσματος θέσης:

$$\dot{\mathbf{v}} = \left( \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right)_{\mathbf{R}_0} \quad (4-42)$$

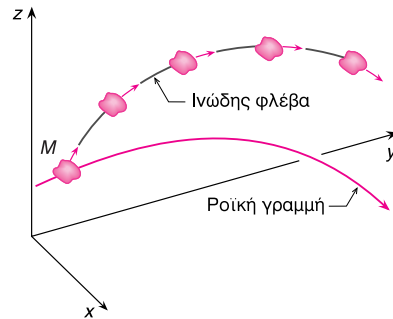
Στο σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, οι συνιστώσες  $u_x$ ,  $u_y$  και  $u_z$  του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας δίνονται από τις βαθμωτές εξισώσεις:

$$u_x = \frac{dx}{dt} \quad u_y = \frac{dy}{dt} \quad u_z = \frac{dz}{dt} \quad (4-77)$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον θεωρητικό προσδιορισμό της τροχιάς οποιουδήποτε σωματιδίου, αρκεί να είναι γνωστές οι υλικές συντεταγμένες  $(x_0, y_0, z_0)$  και οι συνιστώσες  $u_x$ ,  $u_y$  και  $u_z$  της ταχύτητας του σωματιδίου.

## ΙΝΩΔΕΙΣ ΦΛΕΒΕΣ

**Ινώδης φλέβα** ονομάζεται μια νοητή γραμμή επάνω στην οποία βρίσκεται το σύνολο των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από ένα ορισμένο σημείο του πεδίου ροής, πριν από μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ . Στο Σχήμα 4-19 εικονίζεται η ινώδης φλέβα των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο  $M$  του πεδίου ροής στο χρονικό διάστημα από  $t = t_0$  μέχρι  $t = t$ . Για να αναπτύξουμε πειραματικά μια ινώδη φλέβα, εισάγουμε σε ένα προκαθορισμένο σημείο του πεδίου ροής ένα λεπτό σωλήνα και διοχετεύουμε μέσα από αυτόν μια χρωστική ουσία. Τα σωματίδια της χρωστικής ουσίας, καθώς παρασύρονται από το κινούμενο ρευστό, σχηματίζουν μια έγχρωμη ακανόνιστη γραμμή μέσα στο πεδίο ροής. Εφόσον δεν παρατηρείται σημαντική διάχυση ή ανάμειξη της χρωστικής ουσίας με το κινούμενο ρευστό, αυτή η έγχρωμη γραμμή μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί την *ινώδη φλέβα* των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο έγχυσης της ουσίας όσο χρόνο συνεχιζόταν η διοχέτευσή της στο πεδίο ροής. Στο Σχήμα 4-20 παριστάνεται γραφικά η ροή αέρα γύρω από αεροτομή πτέρυγας αεροπλάνου. Οι φωτεινές γραμμές παριστάνουν ινώδεις φλέβες οι οποίες παράγονται με διοχέτευση καπνού σε διάφορα σημεία του πεδίου ροής.

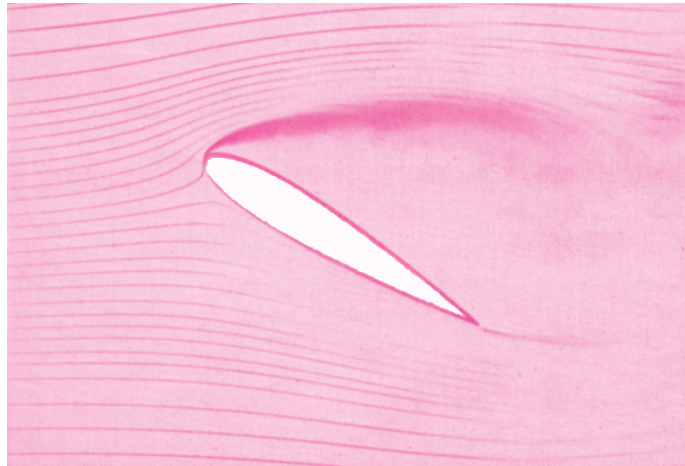


Σχήμα 4-19 Απεικόνιση ινώδους φλέβας.

**Εξίσωση Ινωδών Φλεβών:** Για τον μαθηματικό προσδιορισμό μιας ινώδους φλέβας μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση (4-76) των τροχιών, για να καθοριστούν ποιά σωματίδια ρευστού πέρασαν από ένα προκαθορισμένο σημείο του χώρου σε δεδομένο χρονικό διάστημα. Στο Σχήμα 4-21 απεικονίζονται τα σωματίδια ρευστού τα οποία διέρχονται από το σημείο  $M(a, b, c)$  του χώρου στο χρονικό διάστημα  $\Delta t (= t - t_0)$ . Η τροχιά κάθε σωματιδίου δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t) \quad (4-78)$$

και, αντίστροφα, η "ταυτότητα"  $\mathbf{R}_0$  κάθε σωματιδίου ρευστού μπορεί να εκφραστεί

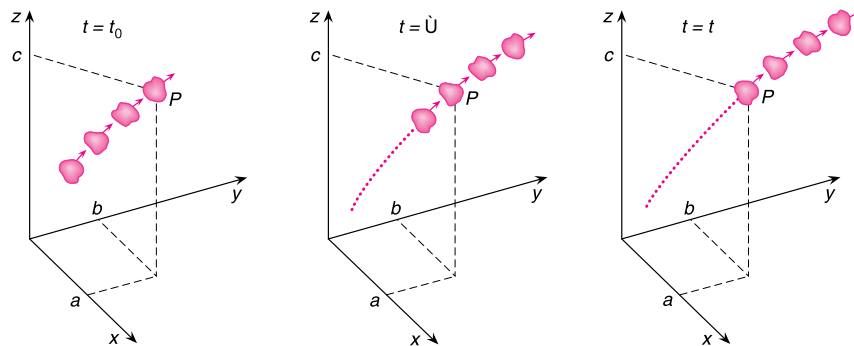


**Σχήμα 4-20** Ινώδεις φλέβες σωματιδίων καπνού σε ροή αέρα γύρω από αεροτομή πτέρυγας αεροπλάνου.

ως συνάρτηση του ανύσματος θέσης  $\mathbf{R}$  και του χρόνου  $t$ :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(\mathbf{R}, t) \tag{4-79}$$

Όμως το κάθε σωματίδιο ρευστού έχει τις δικές του υλικές συντεταγμένες (δηλαδή διαφορετική θέση  $\mathbf{R}_0$  στο χώρο τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ ). Έτσι για τον εντοπισμό ενός σωματιδίου θα ήταν πιο βολικό, αντί για τις υλικές συντεταγμένες του, να χρησιμοποιούσαμε τον χρόνο  $\tau$  κατά τον οποίο το συγκεκριμένο σωματίδιο βρισκόταν



**Σχήμα 4-21** Θέσεις των σωματιδίων ρευστού τα οποία διέρχονται από το σημείο  $M$  του πεδίου ροής τις χρονικές στιγμές  $t_0$ ,  $\tau$  και  $t$ .

στο σημείο  $M$  του χώρου, οπότε η εξίσωση (4-79) τροποποιείται ως εξής:

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0[(a, b, c), \tau] \tag{4-80}$$

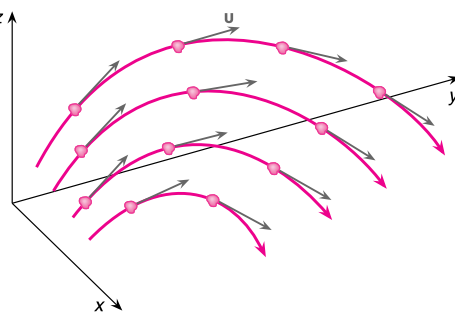
Αν εισάγουμε τώρα την έκφραση αυτή του υλικού ανύσματος  $\mathbf{R}_0$  στην εξίσωση (4-76), λαμβάνεται η ακόλουθη συναρτησιακή σχέση:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{R}_0[(a, b, c), \tau], t\}, \quad \text{για } 0 \leq \tau \leq t \tag{4-81}$$

Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη χάραξη οποιασδήποτε ινώδους φλέβας. Για το σκοπό αυτό, από την τιμή της παραμέτρου  $\tau$ , προσδιορίζεται η θέση την οποία κατέχει το αντίστοιχο σωματίδιο στον χώρο και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για το σύνολο των σωματιδίων του ρευστού τα οποία βρίσκονται επάνω στην ινώδη φλέβα.

## ΡΟΪΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ

**Ροϊκή γραμμή** ενός πεδίου ροής ονομάζεται κάθε γραμμή η οποία έχει την ιδιότητα η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της να συμπίπτει με τη διεύθυνση του ανύσματος της ταχύτητας του ρευστού σε εκείνο το σημείο, μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ . Στο Σχήμα 4-22 απεικονίζονται τέσσερις ροϊκές γραμμές και τα ανύσματα της ταχύτητας μερικών σωματιδίων τα οποία βρίσκονται επάνω σε αυτές. Οι ροϊκές γραμμές είναι ανάλογες προς τις δυναμικές γραμμές των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων. Αντίθετα προς τις τροχιές και τις ινώδεις φλέβες οι οποίες αναπτύσσονται με την πάροδο του χρόνου, οι ροϊκές γραμμές είναι "στιγμαίαιες". Δηλαδή, το σχεδιογράφημα ενός πεδίου ροής με ροϊκές γραμμές δίνει τη μορφή της ροής σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή.



Σχήμα 4-22 Τυπικές ροϊκές γραμμές.

Επίσης, οι ροϊκές γραμμές είναι "στιγμαίαιες". Δηλαδή, το σχεδιογράφημα ενός πεδίου ροής με ροϊκές γραμμές δίνει τη μορφή της ροής σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Η μορφή των ροϊκών γραμμών ενός πεδίου ροής εξαρτάται από το είδος του πεδίου ταχύτητας. Όταν το πεδίο ταχύτητας είναι *μόνιμο*, επειδή η κατεύθυνση της ταχύτητας δε μεταβάλλεται σε κανένα σημείο του πεδίου ροής, οι ροϊκές γραμμές έχουν σταθερή κλίση σε κάθε σημείο και, επομένως, είναι σταθερές στο χώρο. Έτσι ένα σωματίδιο το οποίο κινείται πάντα κατά την εφαπτομένη μιας ροϊκής γραμμής, θα κινείται συνεχώς επάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για όλα τα άλλα σωματίδια που ακολουθούν. Άρα, *στη μόνιμη ροή, οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού και οι ινώδεις φλέβες συμπίπτουν με τις ροϊκές γραμμές του πεδίου*. Αντίθετα, όταν το πεδίο ταχύτητας είναι *μη μόνιμο*, επειδή η κατεύθυνση της ταχύτητας μεταβάλλεται σε τυχόν σημείο του πεδίου ροής, οι ροϊκές γραμμές μπορεί να μετατοπίζονται στον χώρο από στιγμή σε στιγμή. Έτσι, ένα δεδομένο σωματίδιο ακολουθεί διαφορετική ροϊκή γραμμή σε κάθε χρονική στιγμή. Επομένως, στη μη μόνιμη ροή, οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού και οι ινώδεις φλέβες είναι εντελώς διαφορετικές από τις (στιγμαίαιες) ροϊκές γραμμές του πεδίου (βλ. Παράδειγμα 4-1). Από φυσική άποψη, η ινώδης φλέβα δείχνει την πορεία των ροϊκών γραμμών πριν από μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ η τροχιά δείχνει την πορεία των γραμμών αυτών μετά τη στιγμή  $t$ .

Η διάταξη των ροϊκών γραμμών ενός *διδιάστατου* πεδίου ροής υγρών βρίσκεται πειραματικά ως εξής: Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού διασκορπίζονται στερεά σωματίδια (συνήθως λεπτά ρινίσματα αλουμινίου) και φωτίζεται έντονα το κινούμενο υγρό. Τα ρινίσματα αυτά παρασύρονται από το υγρό, κινούμενα κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του πεδίου. Έτσι επάνω στην επιφάνεια του υγρού σχηματίζονται κινούμενες σειρές ρινισμάτων, οι οποίες και φωτογραφίζονται κατά διαστήματα. Η κίνηση κάθε ρινίσματος απεικονίζεται στη φωτογραφία με τη μορφή μιας μικρής φωτεινής γραμμής. Έτσι, αν επάνω σε μια φωτογραφία χαραχθούν συνεχείς γραμμές που να έχουν τη διεύθυνση της τροχιάς των ρινισμάτων του αλουμινίου σε κάθε σημείο της φωτογραφίας, αυτές θα παριστάνουν τις *ροϊκές γραμμές* του πεδίου τη στιγμή που έγινε η φωτογράφησή του. Από τη διάταξη των ροϊκών γραμμών στο σχεδιογράφημα ενός πεδίου ροής μπορεί να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα για την ποιοτική και, μερικές φορές, την ποσοτική περιγραφή της κίνησης του ρευστού [§4-8]. Ο πειραματικός προσδιορισμός των ροϊκών γραμμών είναι γενικά δυσχερές. Για τον λόγο αυτό, η χάραξη των σχεδιογραφημάτων των πεδίων ροής με ροϊκές γραμμές γίνεται συνήθως υπολογιστικά.

**Εξίσωση Ροϊκών Γραμμών:** Για τον μαθηματικό προσδιορισμό των ροϊκών γραμμών πρέπει να είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας. Ας δούμε ποιά είναι η μορφή και με βάση ποιο σκεπτικό προκύπτει η εξίσωση των ροϊκών γραμμών. Για ευκολία, ας θεωρήσουμε μια ροϊκή γραμμή ενός διδιάστατου πεδίου ροής στο επίπεδο  $xy$  (βλ. Σχήμα 4-22). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ένα σωματίδιο ρευστού κινείται πάντα κατά τη διεύθυνση της εφαπτομένης της ροϊκής γραμμής επάνω στην οποία βρίσκεται. Επομένως, το στοιχειώδες άνυσμα μετατόπισης,  $ds$ , του σωματιδίου έχει την ίδια διεύθυνση και φορά με το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητάς του, το οποίο εξ ορισμού εφάπτεται της ροϊκής γραμμής. Έτσι, το εξωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων  $\mathbf{v}$  και  $ds$  είναι μηδέν:

$$\mathbf{v} \times ds = 0 \quad (4-82)$$

Η εξίσωση (4-82) είναι μια ανυσματική διαφορική εξίσωση, η οποία ισχύει για οποιαδήποτε ροϊκή γραμμή ανεξάρτητα από το είδος της ροής. Και αντίστροφα, κάθε γραμμή που ικανοποιεί την εξίσωση αυτή είναι ροϊκή γραμμή. Άρα, η ανυσματική εξίσωση (4-82) αποτελεί τη γενική διαφορική εξίσωση των ροϊκών γραμμών.

Για τη διδιάστατη ροή που φαίνεται στο Σχήμα 4-23, η ΔΕ των ροϊκών γραμμών είναι:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (4-83)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει από τη γενική εξίσωση (4-82), αν αντικαταστήσουμε τα ανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $ds$  με τις εκφράσεις  $\mathbf{v} = i v_x + j v_y$  και  $ds = i dx + j dy$ .

Η αντίστοιχη μορφή της εξίσωσης (4-83) σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\theta}{v_\theta} \quad (4-57)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από τη γενική εξίσωση (4-82), αν αντικαταστήσουμε τα ανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $ds$  με τις εκφράσεις  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_r v_r + \mathbf{e}_\theta v_\theta$  και  $ds = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta$ .

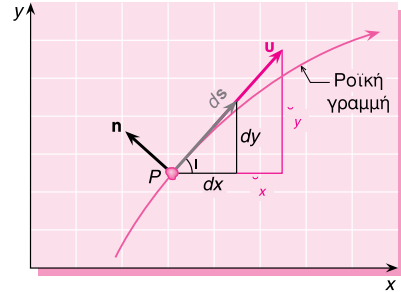
Από την εξίσωση (4-83) μπορούμε να υπολογίσουμε την κλίση  $dy/dx$  μιας ροϊκής γραμμής  $y(x)$  σε οποιοδήποτε σημείο της:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Τοπική κλίση ροϊ-} \\ \text{κής γραμμής } y(x) \end{array} \right\} = \tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} \quad (4-85)$$

Για την εφαρμογή της εξίσωσης (4-85) πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές των συνιστωσών  $v_x$  και  $v_y$  του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού σε εκείνο το σημείο.

Οι διαφορικές εξισώσεις των ροϊκών γραμμών ενός πεδίου τριδιάστατης ροής στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (4-86)$$



Σχήμα 4-23 Ροϊκή γραμμή ενός διδιάστατου πεδίου ροής στο επίπεδο  $xy$ .

## Επισημάνσεις

- Από τον ορισμό της ροϊκής γραμμής, προκύπτει ότι η τοπική ταχύτητα κατά τη διεύθυνση την *κάθετη* προς τη ροϊκή γραμμή είναι μηδέν:

$$v_n = 0 \quad (4-87\alpha)$$

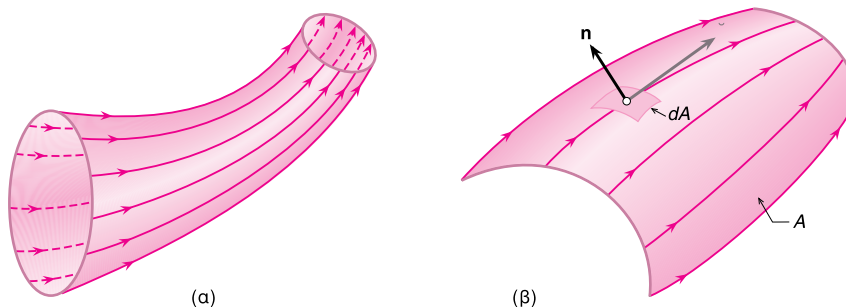
ή, ισοδύναμα, το εσωτερικό γινόμενο του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της τοπικής ταχύτητας και του μοναδιαίου ανύσματος  $\mathbf{n}$  του κάθετου στη ροϊκή γραμμή στο θεωρούμενο σημείο του πεδίου ροής (βλ. Σχήμα 4-23) είναι μηδέν:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4-87\beta)$$

- Επίσης, από τον ορισμό της ροϊκής γραμμής, συνεπάγεται ότι *οι ροϊκές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ*, γιατί διαφορετικά το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο τομής τους θα έπρεπε να ήταν επαπτόμενο σε περισσότερες από μια καμπύλες, κάτι που αποτελεί ιδιότητα μόνον του *μηδενικού ανύσματος*,  $\mathbf{0}$ . Συνεπώς, οι ροϊκές γραμμές τέμνονται μόνο σε σημεία του πεδίου ροής όπου η ταχύτητα είναι μηδέν. Τα σημεία αυτά είναι γνωστά ως *σημεία ηρεμίας* του πεδίου.
- Αν θεωρήσουμε ένα σύνολο ροϊκών γραμμών οι οποίες να διέρχονται από μια κλειστή καμπύλη γραμμή, σχηματίζεται ένας *ροϊκός σωλήνας* (βλ. Σχήμα 4-24α). Αν η εγκάρσια διατομή του ροϊκού σωλήνα είναι απειροστών διαστάσεων, τότε ο ροϊκός σωλήνας ονομάζεται *ροϊκό νήμα*. Επειδή οι ροϊκές γραμμές έχουν παντού τη διεύθυνση του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας, ο ροϊκός σωλήνας συμπεριφέρεται σαν σωλήνας με αδιαπέραστα τοιχώματα. Στη μη μόνιμη ροή, το σχήμα του ροϊκού σωλήνα μεταβάλλεται με τον χρόνο, ενώ στη μόνιμη ροή, όπου οι ροϊκές γραμμές είναι σταθερές, ο ροϊκός σωλήνας παραμένει σταθερός στον χώρο (σαν να επρόκειτο για πραγματικό σωλήνα).
- Η παράπλευρη επιφάνεια ενός ροϊκού σωλήνα είναι *ροϊκή επιφάνεια*, δηλαδή μια επιφάνεια του πεδίου ροής διαμέσου της οποίας δε συμβαίνει *μακροσκοπική* μεταφορά μάζας ρευστού, αλλά μόνο *μοριακή* μεταφορά. Ανάλογα με το είδος της ροής, οι ροϊκές επιφάνειες μπορεί να είναι επίπεδες, καμπύλες ή κυματοειδούς μορφής. Στο Σχήμα 4-24β εικονίζεται μια καμπύλη ροϊκή επιφάνεια  $A$  πεπερασμένου μεγέθους. Για κάθε στοιχειώδες τμήμα  $dA$  της ροϊκής επιφάνειας πρέπει να ισχύουν ανάλογες εξισώσεις προς τις δύο εξισώσεις (4-87) που ισχύουν για τις ροϊκές γραμμές, δηλαδή:

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4-88)$$

- Οι ροϊκές επιφάνειες συμβαίνει να εφάπτονται ή να τέμνονται μόνον κατά μήκος κοινών ροϊκών γραμμών και σε όλη την έκτασή τους. Τέλος, σε ροές γύρω από στερεά σώματα [Κεφ. 14], η επιφάνεια του στερεού μπορεί να θεωρηθεί σαν κλειστή ροϊκή επιφάνεια όπου το ρευστό που περιέχεται σε αυτήν έχει "στερεοποιηθεί".



Σχήμα 4-24 Τυπικές μορφές (α) ροϊκού σωλήνα και (β) ροϊκής επιφάνειας.

- Η ροή ρευστών μπορεί να χαρακτηριστεί ως *ομοιόμορφη* ή *ανομοιόμορφη*, με κριτήριο τη μεταβολή της ταχύτητας κατά μήκος των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.

**Ομοιόμορφη** ονομάζεται η ροή στην οποία το μέτρο και η διεύθυνση του ανύσματος της ταχύτητας είναι σταθερά κατά μήκος οποιασδήποτε ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής. Επομένως, οι ροϊκές γραμμές των πεδίων ομοιόμορφης ροής είναι ευθείες γραμμές, παράλληλες μεταξύ τους (βλ. Σχήματα 4-11α, β). Εάν οι ροϊκές γραμμές δεν είναι ευθείες, θα μεταβάλλεται η διεύθυνση της ταχύτητας, ενώ αν δεν είναι παράλληλες, θα μεταβάλλεται το μέτρο της κατά μήκος των ροϊκών γραμμών.

**Ανομοιόμορφη** ονομάζεται η ροή στην οποία το μέτρο ή / και η διεύθυνση του ανύσματος της ταχύτητας μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά μήκος οποιασδήποτε ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής. Επομένως, οι ροϊκές γραμμές των πεδίων ανομοιόμορφης ροής είναι είτε μη παράλληλες ευθείες (αποκλίνουσες ή συγκλίνουσες) είτε καμπύλες γραμμές (βλ. Σχήματα 4-12).

Από τα προαναφερθέντα, είναι φανερό ότι η έννοια του πεδίου ομοιόμορφης ροής είναι διαφορετική από εκείνη της ομοιόμορφης ροής σε διατομή (§4-1).

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-11

**Σκοπός:** Η επιβεβαίωση της θεωρίας σύμφωνα με την οποία, στη μόνιμη ροή, οι ροϊκές γραμμές, οι τροχιές και οι ινώδεις φλέβες συμπίπτουν, ενώ στη μη μόνιμη ροή είναι διαφορετικές.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 0,3\mathbf{i} \text{ (m/s)} \quad (1)$$

για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$ , και από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 0,2\mathbf{i} + 0,2\mathbf{j} \text{ (m/s)} \quad (2)$$

για το χρονικό διάστημα  $4 < t \leq 10 \text{ s}$ . Να χαραχθούν:

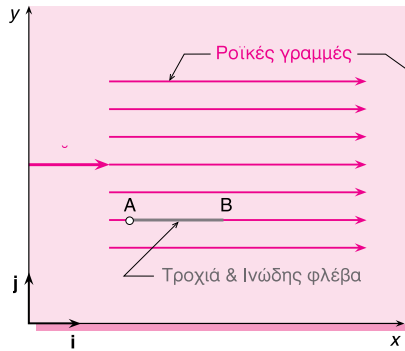
- Οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής τις χρονικές στιγμές  $t_1 = 4 \text{ s}$  και  $t_2 = 10 \text{ s}$ .
- Η τροχιά του σωματιδίου το οποίο περνάει από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  του χώρου τη χρονική στιγμή  $t = 0$  για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ .
- Η ινώδης φλέβα των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο  $A$  στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 10 \text{ sec}$ .

**Λύση:** α Σύμφωνα με τον ορισμό της ροϊκής γραμμής, η εφαπτομένη σε κάθε σημείο της συμπίπτει με τη διεύθυνση του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού σε εκείνο το σημείο. Επομένως, για να χαράξουμε τις ροϊκές γραμμές ενός πεδίου ροής, μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , πρέπει να γνωρίζουμε την κατεύθυνση της ταχύτητας του ρευστού σε κάθε σημείο του πεδίου ροής τη στιγμή  $t$ . Στην προκειμένη περίπτωση, τη χρονική στιγμή  $t_1 = 4 \text{ s}$ , το πεδίο ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση (1). Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή σε όλη την έκταση του πεδίου ροής και το άνυσμα  $\mathbf{v}$  είναι παράλληλο και έχει την ίδια φορά με το μοναδιαίο άνυσμα βάσης  $\mathbf{i}$ . Άρα, τη χρονική στιγμή  $t_1 = 4 \text{ s}$ , οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής είναι ευθείες, παράλληλες προς τον άξονα  $x$  (βλ. Σχήμα Π4-11α).

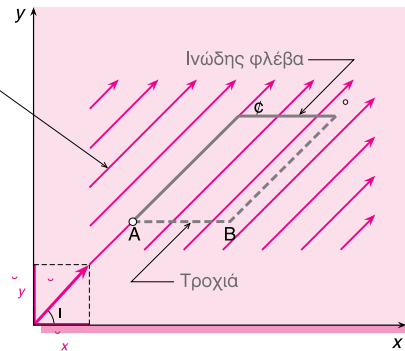
Τη χρονική στιγμή  $t_2 = 10 \text{ s}$ , το πεδίο ταχύτητας δίνεται από την εξίσωση (2). Παρατηρούμε ότι, όπως και προηγουμένως, η ταχύτητα του ρευστού είναι σταθερή σε όλη την έκταση του πεδίου ροής (με διαφορετικό βέβαια μέτρο), αλλά το άνυσμα  $\mathbf{v}$  σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $\theta$  η τιμή της οποίας υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{0,2 \text{ m/s}}{0,2 \text{ m/s}} = 1 \quad (\alpha-1)$$

δηλαδή, η γωνία  $\theta = 45^\circ$ . Άρα, τη χρονική στιγμή  $t_2 = 10 \text{ s}$ , οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής είναι ευθείες και σχηματίζουν με τον άξονα  $x$  γωνία  $45^\circ$  (βλ. Σχήμα Π4-9β).



Σχήμα Π4-11α



Σχήμα Π4-11β

**β** Η τροχιά του σωματιδίου (το οποίο τη στιγμή  $t=0$  βρισκόταν στο σημείο  $A(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής), για τα πρώτα 10 s της κίνησής του, παριστάνεται στο Σχήμα Π4-11β με τη διακεκομμένη τεθλασμένη γραμμή  $AB\Gamma$ . Το τμήμα  $AB$  παριστάνει την τροχιά του σωματιδίου το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$  όταν η ταχύτητα του ρευστού δίνεται από την εξίσωση (1). Το μήκος της τροχιάς  $AB$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(AB) = |\mathbf{v}| \Delta t = (0,3 \text{ m/s})(4 - 0) \text{ s} = 1,2 \text{ m} \quad (\beta-1)$$

Το τμήμα  $B\Gamma$  παριστάνει την τροχιά του σωματιδίου το χρονικό διάστημα  $4 < t \leq 10 \text{ s}$  όταν η ταχύτητα του ρευστού δίνεται από την εξίσωση (2). Το μήκος της τροχιάς  $B\Gamma$  του σωματιδίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(B\Gamma) = |\mathbf{v}| \Delta t = [\sqrt{(0,2)^2 + (0,2)^2} \text{ m/s}](10 - 4) \text{ s} = 1,7 \text{ m} \quad (\beta-2)$$

**γ** Η ινώδης φλέβα των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$  παριστάνεται στο Σχήμα Π4-9β με τη συνεχή τεθλασμένη γραμμή  $A\Delta\Gamma$ . Στο τμήμα  $\Delta\Gamma$  της ινώδους φλέβας βρίσκονται τα σωματίδια του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο  $A$  το χρονικό διάστημα  $0 < t \leq 4 \text{ s}$  και στο τμήμα  $A\Delta$  τα σωματίδια που πέρασαν από το  $A$  το χρονικό διάστημα  $4 < t \leq 10 \text{ s}$ .

**Παρατήρηση:** Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι, τα χρονικά διαστήματα  $0 \leq t \leq 4 \text{ s}$  και  $4 < t \leq 10 \text{ s}$ , οι ροϊκές γραμμές, οι τροχιές και οι ινώδεις φλέβες συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί η ροή στα αντίστοιχα διαστήματα είναι μόνιμη. Αντίθετα, στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$ , όπου η ροή είναι μη μόνιμη, οι παραπάνω γραμμές δε συμπίπτουν.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-12

**Σκοπός:** Η εύρεση της καρτεσιανής εξίσωσης των ροϊκών γραμμών ενός πεδίου ροής και ο υπολογισμός της κλίσης μιας δεδομένης ροϊκής γραμμής σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j} \quad (1)$$

όπου τα μεγέθη  $v$ ,  $x$  και  $y$  εκφράζονται σε μονάδες του Διεθνούς Συστήματος.

α. Να ευρεθεί η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.

β. Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$ .

γ. Η εξίσωση της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο  $(3, 1)$  του πεδίου ροής και η κλίση της στο σημείο αυτό.

**Λύση:** α. Εδώ πρόκειται για ροή στο επίπεδο  $xy$ . Επομένως, η εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής θα προκύψει από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4-83):

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

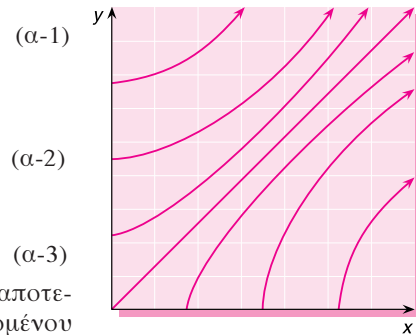
Λόγω της εξίσωσης (1), η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$x dx = 2y dy$$

Από την ολοκλήρωση της εξίσωσης ((α-2), προκύπτει:

$$x^2 = 2y^2 + c$$

όπου  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Η εξίσωση (α-3) αποτελεί τη γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του δεδομένου πεδίου ροής.



Σχήμα Π4-12

β. Με αναδιάταξη των όρων της, η γενική εξίσωση (α-3) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\beta-1)$$

όπου  $a = c^{1/2}$  και  $b = (0,5c)^{1/2}$ . Η εξίσωση (β-1) είναι εξίσωση υπερβολής. Άρα, οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής είναι υπερβολές. Στο Σχήμα Π4-12 απεικονίζεται ένας αριθμός ροϊκών γραμμών που διέρχονται από σημεία του πεδίου με συντεταγμένες  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ .

γ. Για την εύρεση της εξίσωσης της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο  $(3, 1)$  του πεδίου ροής, πρέπει να προσδιορίσουμε την τιμή της σταθεράς  $c$ . Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε στην εξίσωση (α-3) τις τιμές  $x = 3$  και  $y = 1$ , οπότε προκύπτει η τιμή της σταθεράς  $c = 7$ . Άρα, η εξίσωση της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο  $(3, 1)$  του πεδίου είναι:

$$x^2 = 2y^2 + 7 \quad (\gamma-1)$$

Για την εύρεση της κλίσης της ροϊκής γραμμής στο σημείο  $(x = 3, y = 1)$ , χρησιμοποιούμε την εξίσωση (4-85), σε συνδυασμό και με την εξίσωση (1):

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{x}{2y} = \frac{3}{2} \quad \text{ή} \quad \theta = 56,3^\circ \quad (\gamma-2)$$

Άρα, η εφαπτομένη της ροϊκής γραμμής στο σημείο  $(3, 1)$  σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $56,3^\circ$ .

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-13

**Σκοπός:** Η εύρεση της εξίσωσης των ροϊκών γραμμών ενός πεδίου ροής όταν είναι γνωστή η έκφραση της ταχύτητας του ρευστού σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο ταχύτητας ενός ανεμοστρόβιλου περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = -\frac{a}{r} \mathbf{e}_r + \frac{b}{r} \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές. Να ευρεθεί η εξίσωση των ροϊκών γραμμών του ανεμοστρόβιλου.

**Λύση:** Η εξίσωση των ροϊκών γραμμών του ανεμοστρόβιλου θα προκύψει από την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (4-84),

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{rd\theta}{v_\theta} \quad (2)$$

η οποία, λόγω της εξίσωσης (1), γράφεται:

$$\frac{rd\theta}{dr} = -\frac{b}{a} \quad \text{ή} \quad \frac{dr}{r} = -\frac{a}{b} d\theta \quad (3)$$

Από την ολοκλήρωση της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει τελικά η σχέση:

$$r = ce^{-\frac{a}{b}\theta} \quad (4)$$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-14

**Σκοπός:** Η εύρεση των εξισώσεων των ροϊκών γραμμών, των τροχιών και των ινωδών φλεβών όταν είναι γνωστή η εξίσωση του πεδίου ταχύτητας.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = xe^{-t} \mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \text{για} \quad t \geq 0 \quad (1)$$

όπου τα μεγέθη  $v$ ,  $x$ ,  $y$  και  $t$  εκφράζονται σε μονάδες SI. Ζητούνται:

- Η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.
- Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές οι οποίες να διέρχονται από το σημείο  $(a, b)$  του πρώτου τεταρτημορίου του επιπέδου  $xy$ .
- Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού το οποίο τη χρονική στιγμή  $t = 0$  βρίσκεται στο σημείο  $(x_0, y_0)$  του χώρου.
- Η εξίσωση της ινώδους φλέβας των σωματιδίων του ρευστού η οποία διέρχεται από το σημείο  $(a, b)$  του χώρου.

**Λύση:** **α** Εδώ πρόκειται για διδιάστατη, μη μόνιμη ροή στο επίπεδο  $xy$ . Επομένως, η εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής θα προκύψει από την επίλυση της ΔΕ (4-83),

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (\alpha-1)$$

η οποία, λόγω της εξίσωσης (1), γράφεται:

$$\frac{dy}{y} = e^t \frac{dx}{x} \quad (\alpha-2)$$

Επειδή οι ροϊκές γραμμές εξ ορισμού περιγράφουν τη γεωμετρία της ροής σε δεδομένη χρονική στιγμή, η εξίσωση (α-2) μπορεί να ολοκληρωθεί θεωρώντας σταθερό τον χρόνο  $t$ . Από την ολοκλήρωση της εξίσωσης αυτής προκύπτει η σχέση:

$$y = cx^{e^t} \quad (\alpha-3)$$

όπου  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Η εξίσωση (α-3) παριστάνει την οικογένεια των ροϊκών γραμμών του δεδομένου πεδίου ροής.

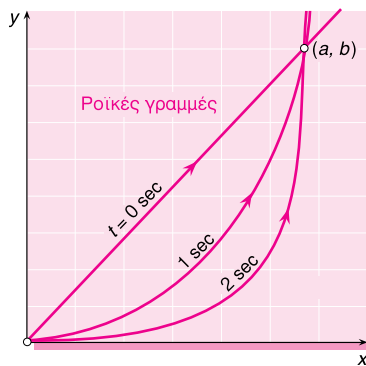
**β** Για να χαράξουμε τις ροϊκές γραμμές που διέρχονται από το σημείο  $(a, b)$  του χώρου, προσδιορίζουμε πρώτα την τιμή της σταθεράς  $c$  ως συνάρτηση των συντεταγμένων  $a$  και  $b$ . Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε στην εξίσωση (α-3) τις τιμές  $x = a$  και  $y = b$ , οπότε προκύπτει η τιμή:

$$c = ba^{-e^t} \quad (\beta-1)$$

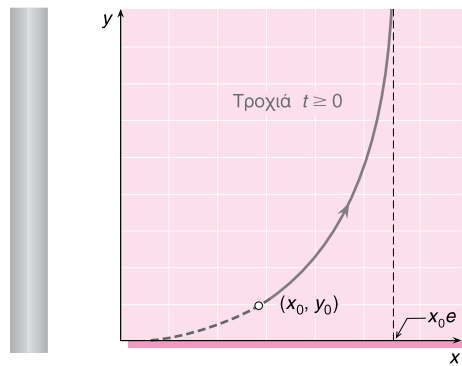
Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην εξίσωση (α-3), προκύπτει η σχέση:

$$y = b \left( \frac{x}{a} \right)^{e^t} \quad (\beta-2)$$

Η εξίσωση (β-2) είναι η εξίσωση της ροϊκής γραμμής που διέρχεται από το σημείο  $(a, b)$  του πεδίου ροής τη δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ . Στο Σχήμα Π4-14α έχουν χαραχθεί οι ροϊκές γραμμές που διέρχονται από το σημείο  $(a, b)$  τις χρονικές στιγμές  $t = 0$  (ευθεία γραμμή),  $t = 1$  s και  $t = 2$  s. Από την εξίσωση (α-3) προκύπτει ότι, το σύνολο των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής, για τη στιγμή  $t$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Αυτό υποδηλώνει ότι το σημείο  $(0, 0)$  του πεδίου ροής είναι *σημείο ηρεμίας*, δηλαδή η ταχύτητα του ρευστού σε αυτό είναι μηδέν. Πράγματι, αν στην εξίσωση (1) θέσουμε  $x = 0$  και  $y = 0$ , προκύπτει  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$  (και αυτό ισχύει για κάθε στιγμή).



Σχήμα Π4-14α



Σχήμα Π4-14β

**γ** Η εξίσωση της τροχιάς ενός σωματιδίου ρευστού το οποίο κινείται στο επίπεδο  $xy$  προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων ορισμού των ταχυτήτων  $u_x$  και  $u_y$ :

$$u_x = \frac{dx}{dt} = xe^{-t} \quad u_y = \frac{dy}{dt} = y \quad (\gamma-1)$$

όπου οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  είναι συναρτήσεις του χρόνου. Από την ολοκλήρωση αυτών των διαφορικών εξισώσεων, προκύπτουν οι αναλυτικές εκφράσεις των συναρτήσεων  $x(t)$  και  $y(t)$ :

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{X} = \int_0^t e^{-t} dt \quad \text{ή} \quad x = x_0 e^{1-e^{-t}} \quad (\gamma-2) \quad \int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_0^t dt \quad \text{ή} \quad y = y_0 e^t \quad (\gamma-3)$$

Απαλείφοντας τον χρόνο  $t$  από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, προκύπτει η σχέση:

$$y = \frac{y_0}{1 - \ln(x/x_0)} \quad (\gamma-4)$$

Η εξίσωση (γ-4) είναι η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου το οποίο τη στιγμή  $t = 0$  βρισκόταν στο σημείο  $(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής. Στο Σχήμα Π4-14β απεικονίζεται η τροχιά του σωματιδίου για το διάστημα  $0 \leq t < \infty$ . Να σημειωθεί ότι η γραμμή  $x = x_0 e$  είναι *ασύμπτωτος* της τροχιάς.

**δ** Για να προσδιορίσουμε την εξίσωση της ινώδους φλέβας η οποία διέρχεται από ένα ορισμένο σημείο του πεδίου ροής εργαζόμαστε ως εξής: Πρώτα λύνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις (γ-2) και (γ-3) των τροχιών των σωματιδίων του ρευστού ως προς τις υλικές συντεταγμένες  $x_0$  και  $y_0$ :

$$x_0 = xe^{-1+e^{-t}} \quad \text{και} \quad y_0 = ye^{-t}, \quad (\delta-1)$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι  $x_0$  και  $y_0$  είναι οι χωρικές συντεταγμένες του σωματιδίου τη χρονική στιγμή  $t=0$ . Άρα, δίνοντας σε αυτές διαφορετικές τιμές τη στιγμή  $t=0$ , τα νέα ζεύγη τιμών  $x_0$  και  $y_0$  προσδιορίζουν την "ταυτότητα" διαφορετικών σωματιδίων ρευστού. Έτσι, το σωματίδιο του ρευστού το οποίο μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $\tau$  βρίσκεται στη θέση  $(a, b)$  του χώρου προσδιορίζεται από τις υλικές συντεταγμένες:

$$x_0 = ae^{-1+e^{-\tau}} \quad \text{και} \quad y_0 = be^{-\tau}, \quad \text{για} \quad 0 \leq t \leq \tau \quad (\delta-2)$$

Οι εξισώσεις (δ-2) είναι οι παραμετρικές μορφές της εξίσωσης (4-80) για  $c=0$ :

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0[(a, b), \tau] \quad (\delta-3)$$

Τώρα, για να βρούμε την εξίσωση της ινώδους φλέβας, πρέπει να αντικαταστήσουμε τις τιμές των  $x_0$  και  $y_0$ , όπως δίνονται από τις εξισώσεις (δ-2), στις παραμετρικές εξισώσεις των τροχιών, [Εξ. (γ-2) και (γ-3)], οπότε λαμβάνονται οι σχέσεις:

$$x = ae^{e^{-\tau}-e^{-t}} \quad \text{και} \quad y = be^{t-\tau} \quad (\delta-4)$$

Οι εξισώσεις (δ-4) είναι οι παραμετρικές μορφές της εξίσωσης (4-81) για  $c=0$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}\{\mathbf{R}_0[(a, b), \tau], t\} \quad (\delta-5)$$

Απαλείφοντας την παράμετρο  $t$  από τις σχέσεις (δ-4), προκύπτει η εξίσωση της ινώδους φλέβας που διέρχεται από το σημείο  $(a, b)$  του πεδίου ροής:

$$\ln\left(\frac{x}{a}\right) = \left(1 - \frac{b}{y}\right) e^{-\tau} \quad (\delta-6)$$

## 4-8 Η Έννοια της Ροϊκής Συνάρτησης

Η **ροϊκή συνάρτηση**,  $\psi$ , είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται για *διδιάστατη, ασυμπίεστη\** ροή (πραγματικού ή ιδανικού ρευστού), έτσι ώστε να ικανοποιείται πάντα η διαφορική εξίσωση συνεχείας [§8-3]. Για διδιάστατη, ασυμπίεστη ροή στο επίπεδο  $xy$ , η συνάρτηση  $\psi$  εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $(x, y)$  και τον χρόνο  $t$ ,

$$\psi = \psi(x, y, t) \quad (4-89)$$

και ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4-90)$$

Για διδιάστατη, ασυμπίεστη ροή στο επίπεδο  $r\theta$ , η ροϊκή συνάρτηση εξαρτάται από τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  και τον χρόνο  $t$ ,

$$\psi = \psi(r, \theta, t) \quad (4-91)$$

και ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4-92)$$

\* Η ροϊκή συνάρτηση ορίζεται και για συμπίεστες όπως, επίσης, και για τριδιάστατες ροές, αλλά, στις περιπτώσεις αυτές, απαιτούνται πιο πολύπλοκες μαθηματικές θεωρήσεις.

Ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε την έννοια της ροϊκής συνάρτησης στο σημείο αυτό (ενώ λογικά θα έπρεπε να προηγηθεί η διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης συνεχείας) είναι ότι η συνάρτηση  $\psi$  περιγράφει αλγεβρικά τη γεωμετρία του πεδίου ροής και σχετίζεται άμεσα με την ογκομετρική παροχή του ρευστού. Ας δούμε πρώτα τη γεωμετρική και μετά τη φυσική ερμηνεία της συνάρτησης  $\psi$ . Με τη ροϊκή συνάρτηση θα ασχοληθούμε, πάλι, μετά τη διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης συνεχείας, σε συνδυασμό και με τη δυναμική συνάρτηση [Κεφ. 10].

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Για μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t_0$ , η συνάρτηση (4-89) γράφεται:

$$\psi = \psi(x, y, t_0) \quad (4-93)$$

Από τη διαφορίση της συνάρτησης αυτής, προκύπτει η σχέση:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (4-94)$$

Λόγω των εξισώσεων (4-90), η τελευταία σχέση γράφεται:

$$d\psi = v_x dy - v_y dx \quad (4-95)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση των ροϊκών γραμμών του ίδιου πεδίου ροής για τη χρονική στιγμή  $t_0$ , δηλαδή την εξίσωση (4-83) την οποία γράφουμε ως εξής:

$$v_x dy - v_y dx = 0 \quad (4-96)$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, η εξίσωση (4-95) λαμβάνει τη μορφή:

$$d\psi = 0 \quad (4-97)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η μεταβολή της συνάρτησης  $\psi$  κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής είναι μηδέν. Άρα, η ροϊκή συνάρτηση μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής είναι σταθερή κατά μήκος οποιασδήποτε ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής. Επομένως, αν γνωρίζουμε την αναλυτική έκφραση της συνάρτησης  $\psi(x, y)$  της ροής, μια δεδομένη χρονική στιγμή  $t$ , μπορούμε να χαράξουμε γραμμές σταθερών τιμών  $\psi$  οι οποίες θα συμπίπτουν με τις ροϊκές γραμμές. Δηλαδή, η ροϊκή συνάρτηση περιγράφει αλγεβρικά τη γεωμετρία του πεδίου ροής.

## ΦΥΣΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

Η ροϊκή συνάρτηση μιας ροής μπορεί να συσχετιστεί με την ογκομετρική παροχή του ρευστού. Για να επιτύχουμε τη συσχέτιση αυτή, θεωρούμε το σχεδιογράφημα με ροϊκές γραμμές μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής στο επίπεδο  $xy$  (βλ. Σχήμα 4-25). Έστω  $ab$  μια προσανατολισμένη καμπύλη η οποία παριστάνει την τομή του επιπέδου  $xy$  με μια τυχαία επιφάνεια  $A$ , η οποία εκτείνεται μέχρι βάθους  $z_0$  ( $= 1$  m) κατά τη διεύθυνση  $z$ . Η παροχή  $\dot{V}$  του ρευστού διαμέσου της επιφάνειας  $A$  δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{V} = \iint_A (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = \int_a^\beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) z_0 ds = z_0 \int_a^\beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (4-98)$$

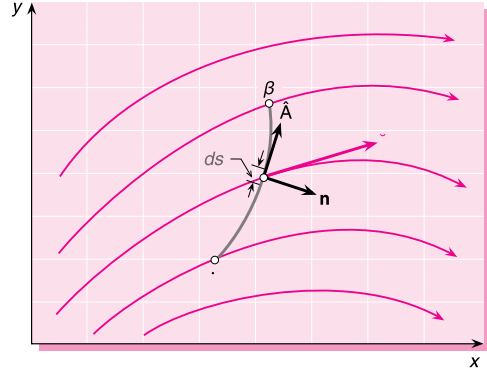
όπου το  $ds$  είναι ένα στοιχειώδες τμήμα της καμπύλης  $ab$ . Εάν διαιρέσουμε τα δύο

μέλη της εξίσωσης (4-98) με το βάθος  $z_0$ , λαμβάνεται η ακόλουθη σχέση:

$$\dot{V}' = \int_a^\beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds \quad (4-99)$$

όπου  $\dot{V}' (= \dot{V}/z_0)$  είναι η ανά μονάδα βάθους ογκομετρική παροχή του ρευστού. Αν στην εξίσωση (4-99) αντικαταστήσουμε τα ανύσματα  $\mathbf{v}$  και  $\mathbf{n}$  με τις καρτεσιανές εκφράσεις  $\mathbf{v} = i v_x + j v_y$  και  $\mathbf{n} = i n_x + j n_y$ , αντίστοιχα, προκύπτει:

$$\dot{V}' = \int_a^\beta (n_x v_x + n_y v_y) ds \quad (4-100)$$



Σχήμα 4-25 Ροϊκές γραμμές διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής στο επίπεδο  $xy$ .

Αν λάβουμε υπόψη τις εξισώσεις ορισμού της ροϊκής συνάρτησης με τη μορφή των εξισώσεων (4-72), η τελευταία εξίσωση γράφεται με τη μορφή:

$$\dot{V}' = \int_a^\beta \left( n_x \frac{\partial \psi}{\partial y} - n_y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) ds \quad (4-101)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε τις σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες  $n_x$  και  $n_y$  του μοναδιαίου ανύσματος  $\mathbf{n}$  με το στοιχειώδες μήκος  $ds$ . Το μήκος αυτό συμπίπτει με το μοναδιαίο εφαπτομενικό άνυσμα  $\boldsymbol{\epsilon}$ , το οποίο είναι κάθετο στο άνυσμα  $\mathbf{n}$ . Επομένως, το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων  $\mathbf{n}$  και  $\boldsymbol{\epsilon}$  είναι μηδέν:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0 \quad (4-102)$$

Αν στο γινόμενο αυτό αντικαταστήσουμε τα ανύσματα  $\mathbf{n}$  και  $\boldsymbol{\epsilon}$  με τις εκφράσεις,

$$\mathbf{n} = i n_x + j n_y \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\epsilon} = i \frac{dx}{ds} + j \frac{dy}{ds} \quad (4-103)$$

και εκτελέσουμε τις πράξεις, προκύπτει η εξίσωση:

$$n_x \frac{dx}{ds} + n_y \frac{dy}{ds} = 0 \quad (4-104)$$

Για να ισχύει πάντα η εξίσωση (4-104), πρέπει οι συνιστώσες των μοναδιαίων ανυσμάτων  $\mathbf{n}$  και  $\boldsymbol{\epsilon}$  να συνδέονται είτε με τις σχέσεις (4-105) είτε με τις σχέσεις (4-106):

$$n_x = \frac{dy}{ds} \quad n_y = -\frac{dx}{ds} \quad (4-105) \quad n_x = -\frac{dy}{ds} \quad n_y = \frac{dx}{ds} \quad (4-106)$$

Επειδή το μοναδιαίο άνυσμα  $\boldsymbol{\epsilon}$  έχει την ίδια φορά με τη φορά διαγραφής της καμπύλης  $ab$ , ισχύουν οι σχέσεις (4-105), οπότε η εξίσωση (7-109) γράφεται:

$$\dot{V}' = \int_a^\beta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) \quad (4-107)$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα στην τελευταία εξίσωση είναι ίση με το διαφορικό  $d\psi$ , [Εξ. (4-94)], το οποίο είναι τέλειο διαφορικό. Έτσι, από την εξίσωση (4-107) προκύπτει ότι:

$$\dot{V}' = \int_a^\beta d\psi = \psi_\beta - \psi_\alpha \quad (4-108)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η μεταβολή της ροϊκής συνάρτησης μεταξύ δύο σημείων  $\alpha$  και  $\beta$  του πεδίου ροής είναι ίση με την ανά μονάδα βάθους ογκομετρική παροχή του ρευστού διαμέσου μιας γραμμής η οποία συνδέει τα σημεία  $\alpha$  και  $\beta$ , δηλαδή:

$$\psi_\beta - \psi_\alpha = \int_\alpha^\beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) ds = \left\{ \begin{array}{l} \text{Όγκος ρευστού ανά μονάδα βάθους στη μονάδα} \\ \text{του χρόνου από μια γραμμή η οποία συνδέει τα} \\ \text{σημεία } \alpha \text{ και } \beta \text{ στη μονάδα του χρόνου} \end{array} \right\} \quad (4-109)$$

Άρα, η ροϊκή συνάρτηση έχει διαστάσεις  $L^2 T^{-1}$  και στο Διεθνές Σύστημα μονάδων εκφράζεται σε  $m^2/s$ . Αν τα σημεία  $\alpha$  και  $\beta$  βρίσκονται επάνω στην ίδια ροϊκή γραμμή, τότε το ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους της εξίσωσης (4-109) είναι μηδέν, οπότε:

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \quad (4-110)$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η ροϊκή συνάρτηση είναι σταθερή κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής, συμπεράσμα στο οποίο είχαμε καταλήξει και με τη γεωμετρική θεώρηση της  $\psi$ .

Στη διδιάστατη ασυμπίεστη ροή που εικονίζεται στο Σχήμα 4-26, η γραμμή  $\alpha\beta$  είναι κάθετη προς τη διεύθυνση της ροής. Επομένως, το μοναδιαίο άνωσμα  $\mathbf{n}$  και το άνωσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας είναι παράλληλα, οπότε η εξίσωση (4-81) απλοποιείται ως εξής:

$$\psi_\beta - \psi_\alpha = v \Delta s \quad (4-111)$$

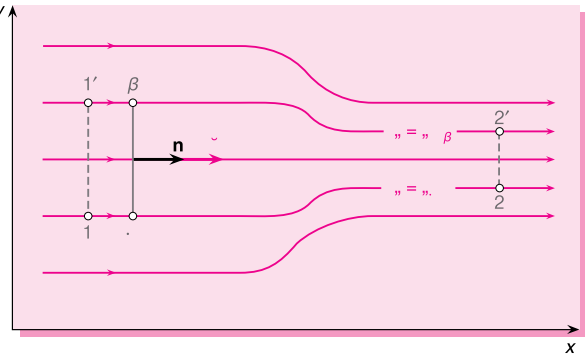
όπου  $v$  είναι το μέτρο της ταχύτητας και  $\Delta s$  η απόσταση των ροϊκών γραμμών επάνω στις οποίες βρίσκονται τα σημεία  $\alpha$  και  $\beta$ . Όμως, η διαφορά  $(\psi_\beta - \psi_\alpha)$  είναι η ίδια για κάθε ζεύγος σημείων τα οποία βρίσκονται επάνω στις δύο αυτές γραμμές, αφού οι ροϊκές γραμμές του πεδίου συμπίπτουν με τις γραμμές σταθερής ροϊκής συνάρτησης. Έτσι, αν θεωρήσουμε τις γραμμές 1-1' και 2-2', οι οποίες είναι κάθετες προς τη διεύθυνση της ροής, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση (4-111), οπότε:

$$\psi_\beta - \psi_\alpha = v_1 \Delta s_1 = v_2 \Delta s_2 \quad (4-112)$$

όπου  $v_1, v_2$  είναι τα μέτρα της ταχύτητας του ρευστού και  $\Delta s_1, \Delta s_2$  οι αποστάσεις των ροϊκών γραμμών που διέρχονται από τα θεωρούμενα σημεία. Με αναδιάταξη των όρων της εξίσωσης (4-112), προκύπτει:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta s_1} \quad (4-113)$$

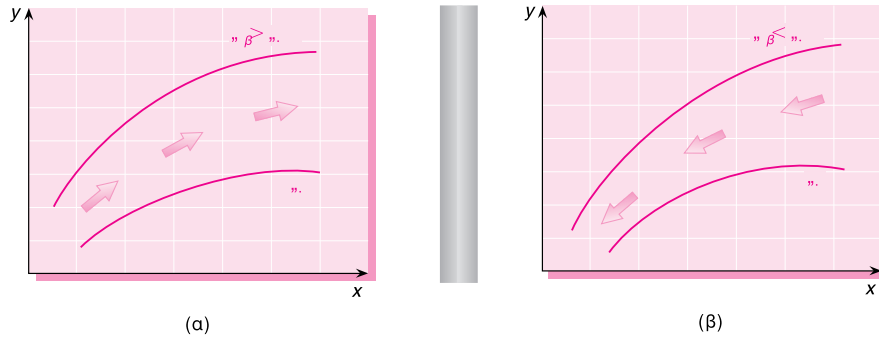
Η σχέση αυτή δείχνει ότι το μέτρο της ταχύτητας είναι αντιστρόφως ανάλογο προς την απόσταση των ροϊκών γραμμών ή, με άλλα λόγια, το μέτρο της ταχύτητας του ρευστού είναι ανάλογο προς την πυκνότητα των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής. Η παρατήρηση αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε περιπτώσεις ροής όπου είναι γνωστή η διάταξη των ροϊκών γραμμών. Έτσι, από το σχεδιαγράφημα της ροής του Σχήματος 4-26 συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα  $v_1$  είναι μικρότερη από την ταχύτητα  $v_2$ , αφού η πυκνότητα των ροϊκών γραμμών στην περιοχή 1-1' του πεδίου ροής είναι μικρότερη από την αντίστοιχη πυκνότητα αυτών στην περιοχή 2-2'.



Σχήμα 4-26 Ροϊκές γραμμές διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής στο επίπεδο  $xy$  (για την εξαγωγή της σχέσης (4-84)).

Τέλος, από τον τρόπο μεταβολής της ροϊκής συνάρτησης μπορούμε να συμπεράνουμε για την κατεύθυνση

της ροής. Έτσι, αν η συνάρτηση  $\psi$  αυξάνεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $y$ , η ροή κατευθύνεται προς τη θετική φορά του άξονα  $x$  (από αριστερά προς τα δεξιά), διαφορετικά, η ροή έχει φορά από δεξιά προς τα αριστερά (βλ. Σχήμα 4-27).



**Σχήμα 4-27** Κατεύθυνση ροής με βάση τη μεταβολή της ροϊκής συνάρτησης: (α) από αριστερά προς τα δεξιά όταν  $\psi_\beta > \psi_\alpha$  και (β) από δεξιά προς τα αριστερά όταν  $\psi_\beta < \psi_\alpha$ .

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-15

**Σκοπός:** Η χάραξη του σχεδιογραφήματος με ροϊκές γραμμές του πεδίου διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής και ο υπολογισμός της ογκομετρικής παροχής του ρευστού μεταξύ δύο ροϊκών γραμμών όταν είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση της ροϊκής συνάρτησης της ροής.

**Το πρόβλημα:** Η ροϊκή συνάρτηση  $\psi$  μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής στο επίπεδο  $xy$  δίνεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες από την εξίσωση:

$$\psi = -2ax - 3by \quad (1)$$

όπου  $a = 3 \text{ m/s}$ ,  $b = 2 \text{ m/s}$  και οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  είναι σε μέτρα.

- Να χαραχθούν οι ροϊκές γραμμές που αντιστοιχούν στις τιμές  $\psi_1 = 0$  και  $\psi_2 = 12 \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Στο προηγούμενο διάγραμμα, να χαραχθεί το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας στο σημείο  $(0, 0)$ .
- Να υπολογιστεί η ογκομετρική παροχή του ρευστού μεταξύ των ροϊκών γραμμών που διέρχονται από τα σημεία  $\alpha(1, 1)$  και  $\beta(2, 2)$ .

**Λύση:** α Οι ροϊκές γραμμές μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής είναι γραμμές σταθερών τιμών  $\psi$  της ροϊκής συνάρτησης της ροής. Επομένως, για να χαραξουμε τις ζητούμενες ροϊκές γραμμές πρέπει να βρούμε την έκφραση της συνάρτησης  $y(x)$  που αντιστοιχεί στις τιμές  $\psi_1$  και  $\psi_2$ .

Για  $\psi_1 = 0$ , η εξίσωση (1) οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση της συνάρτησης  $y(x)$ :

$$y = -\left(\frac{2a}{3b}\right)x \quad (\alpha-1)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης  $(\alpha-1)$ , λαμβάνεται η σχέση:

$$y = -x \quad (\alpha-2)$$

Άρα, η ροϊκή γραμμή που αντιστοιχεί στην τιμή  $\psi_1 = 0$  είναι ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο  $(0, 0)$  και έχει κλίση  $-1$  (δηλαδή σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $135^\circ$ ).

Για  $\psi_2 = 12 \text{ m}^2/\text{s}$ , η εξίσωση (1) οδηγεί στην ακόλουθη έκφραση της συνάρτησης  $y(x)$ :

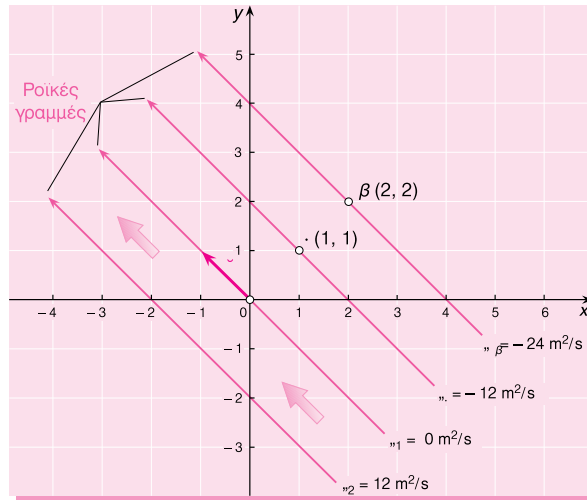
$$y = -\left(\frac{2a}{3b}\right)x - \frac{4}{b} \quad (\alpha-3)$$

Για  $a = 3 \text{ m/s}$  και  $b = 2 \text{ m/s}$ , η εξίσωση (α-3) απλοποιείται στη σχέση:

$$y = -x - 2 \quad (\alpha-4)$$

Άρα, η ροϊκή γραμμή που αντιστοιχεί στην τιμή  $\psi = 12 \text{ m}^2/\text{s}$  είναι επίσης ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο  $(0, -2)$  και έχει (και αυτή), κλίση  $-1$ .

Εξάλλου, επειδή η τιμή της  $\psi$  μειώνεται κατά τη θετική φορά του άξονα  $y$ , η ροή του ρευστού, άρα και οι ροϊκές γραμμές, κατευθύνονται από δεξιά προς τα αριστερά (βλ. Σχήμα Π4-15).



Σχήμα Π4-15

**β** Η γενική εξίσωση του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού είναι:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}u_x + \mathbf{j}u_y \quad (\beta-1)$$

Οι καρτεσιανές συνιστώσες  $u_x$  και  $u_y$  του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4-90), σε συνδυασμό και με την εξίσωση (1), και είναι:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (-2ax - 3by) = -3b = -6 \text{ m/s} \quad (\beta-2)$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} (-2ax - 3by) = 2a = 6 \text{ m/s} \quad (\beta-3)$$

Επομένως, η ανυσματική εξίσωση (β-1) γράφεται:

$$\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \quad (\beta-4)$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα του ρευστού δεν εξαρτάται από τις χωρικές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ . Αυτό σημαίνει ότι η ροή έχει παντού την ίδια διεύθυνση, παράλληλη προς εκείνη του ανύσματος  $\mathbf{v}$  και την ίδια φορά με αυτό. Το άνυσμα  $\mathbf{v}$  έχει μέτρο,

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{(-6)^2 + (6)^2} \text{ m/s} = 8,48 \text{ m/s} \quad (\beta-5)$$

και σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $\theta$  που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\tan \theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{6 \text{ m/s}}{-6 \text{ m/s}} = -1 \quad \text{ή} \quad \theta = 135^\circ \quad (\beta-6)$$

Άρα, το άνυσμα  $\mathbf{u}$  της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο  $(0, 0)$  έχει μέτρο  $8,48 \text{ m/s}$  και σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $135^\circ$ . Δηλαδή, βρίσκεται επάνω στη γραμμή  $\psi_1 = 0$  (Σχήμα Π2-15). Να σημειωθεί ότι το άνυσμα  $\mathbf{u}$  δεν είναι χαραγμένο υπό κλίμακα.

**γ** Οι ροϊκές γραμμές που διέρχονται από τα σημεία  $\alpha(1, 1)$  και  $\beta(2, 2)$  του πεδίου ροής συμπίπτουν με τις γραμμές που αντιστοιχούν στις τιμές  $\psi_\alpha$  και  $\psi_\beta$  της ροϊκής συνάρτησης, όπου:

$$\psi_\alpha = \psi|_{(1,1)} = [-2ax - 3by]|_{(1,1)} = [-2(3)(1) - 3(2)(1)] \text{ m}^2/\text{s} = -12 \text{ m}^2/\text{s} \quad (\gamma-1)$$

$$\psi_\beta = \psi|_{(2,2)} = [-2ax - 3by]|_{(2,2)} = [-2(3)(2) - 3(2)(2)] \text{ m}^2/\text{s} = -24 \text{ m}^2/\text{s} \quad (\gamma-2)$$

Επομένως, σύμφωνα με την εξίσωση (4-108), η ανά μονάδα βάθους ογκομετρική παροχή του ρευστού μεταξύ των ροϊκών γραμμών που διέρχονται από τα σημεία  $\alpha(1, 1)$  και  $\beta(2, 2)$  είναι:

$$\dot{V}' = \psi_\alpha - \psi_\beta = [(-12) - (-24)] \text{ m}^2/\text{s} = 12 \text{ m}^2/\text{s} \quad (\gamma-3)$$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-16

**Σκοπός:** Η εύρεση της εξίσωσης του πεδίου ταχύτητας και ο καθορισμός της θέσης των σημείων ηρεμίας του πεδίου μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής όταν είναι γνωστή η ροϊκή της συνάρτηση.

**Το πρόβλημα:** Η ροϊκή συνάρτηση μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\psi = -ar \sin\theta + b\theta \quad (1)$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι θετικές σταθερές.

**α.** Ποιές είναι οι διαστάσεις των σταθερών  $a$  και  $b$ ;

**β.** Να ευρεθεί η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας.

**γ.** Να εξεταστεί αν στο συγκεκριμένο πεδίο ταχύτητας υπάρχουν (και πού) σημεία ηρεμίας.

**Λύση:** **α** Σύμφωνα με την αρχή της διαστατικής ομοιογένειας [§ 1-3], όλοι οι όροι της εξίσωσης (1) πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Έτσι, αφού η ροϊκή συνάρτηση (το 1<sup>ο</sup> μέλος της) έχει διαστάσεις  $L^2 T^{-1}$ , τις ίδιες διαστάσεις θα έχουν και οι δύο άλλοι όροι της. Επομένως,

$$\{a\} = \frac{\{L^2 T^{-1}\}}{\{r\} \{\sin\theta\}} = \frac{\{L^2 T^{-1}\}}{\{L\} \{L^0 M^0 T^0\}} = \{LT^{-1}\} \quad (\alpha-1)$$

$$\{b\} = \frac{\{L^2 T^{-1}\}}{\{\theta\}} = \frac{\{L^2 T^{-1}\}}{\{L^0 M^0 T^0\}} = \{L^2 T^{-1}\} \quad (\alpha-2)$$

Άρα, η σταθερά  $a$  έχει τις διαστάσεις της ταχύτητας και η σταθερά  $b$  τις διαστάσεις της ογκομετρικής παροχής ανά μονάδα βάθους.

**β** Η γενική αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (\beta-1)$$

Οι ταχύτητες  $v_r$  και  $v_\theta$  υπολογίζονται από τις εξισώσεις (4-92) και την εξίσωση (1):

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (-a r \sin\theta + b\theta) = -a \cos\theta + \frac{b}{r} \quad (\beta-2)$$

$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} (-a r \sin\theta + b\theta) = a \sin\theta \quad (\beta-3)$$

Άρα, η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας είναι:

$$\mathbf{v} = \left( -a \cos \theta + \frac{b}{r} \right) \mathbf{e}_r + a \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (\beta-4)$$

**γ** Σημεία ηρεμίας υπάρχουν στις θέσεις του πεδίου ροής όπου η ταχύτητα είναι μηδέν:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 0 \quad (\gamma-1)$$

Όμως, για να ισχύει η εξίσωση (γ-1) πρέπει να είναι  $v_r = 0$  και  $v_\theta = 0$ , οπότε από τις εξισώσεις (β-2) και (β-3) προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$r = \frac{b}{a \cos \theta} \quad (\gamma-2) \quad a \sin \theta = 0 \quad (\gamma-3)$$

Επειδή  $a \neq 0$ , η εξίσωση (γ-3) ισχύει για:

$$\theta = 0 \quad \text{και} \quad \theta = \pi \quad (\gamma-4)$$

Θέτοντας  $\theta = 0$  στην εξίσωση (γ-2) προκύπτει η τιμή:

$$r = \frac{b}{a} \quad (\gamma-5)$$

η οποία είναι αποδεκτή, αφού οι σταθερές  $a$  και  $b$  είναι θετικές (άρα  $r > 0$ ). Αντίθετα, η τιμή που προκύπτει από την ίδια εξίσωση για  $\theta = \pi$ :

$$r = -\frac{b}{a} \quad (\gamma-6)$$

απορρίπτεται, αφού αρνητικές τιμές  $r$  δεν ορίζονται. Άρα, στο δεδομένο πεδίο ροής, υπάρχει ένα σημείο ηρεμίας το οποίο βρίσκεται στη θέση  $(r, \theta) = (b/a, 0)$ .

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-17

**Σκοπός:** Ο προσδιορισμός της ροϊκής συνάρτησης μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής όταν είναι γνωστή η αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας.

**Το πρόβλημα:** Το πεδίο ταχύτητας μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής είναι:

$$\mathbf{v} = \left( \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \cos \theta \right) \mathbf{e}_r + \frac{b}{r^2} \sin \theta \mathbf{e}_\theta \quad (1)$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές. Να ευρεθεί η ροϊκή συνάρτηση της ροής.

**Λύση:** Η ροϊκή συνάρτηση  $\psi(r, \theta)$  ορίζεται από τις δύο εξισώσεις (4-92):

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (2)$$

Έτσι, για το δεδομένο πεδίο ταχύτητας, [Εξ. (1)], ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \cos \theta \quad (3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{b}{r^2} \sin \theta \quad (4)$$

Από την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (3) ως προς  $\theta$ , προκύπτει μια πρώτη έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση  $\psi$ , η εξής:

$$\psi = a\theta + \frac{b}{r} \sin \theta + f_1(r) \quad (5)$$

όπου  $f_1(r)$  είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του  $r$ . Όμοια, από την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (4) ως προς  $r$ , προκύπτει μια δεύτερη έκφραση για τη ροϊκή συνάρτηση  $\psi$ , η εξής:

$$\psi = \frac{b}{r} \sin \theta + f_2(\theta) \quad (6)$$

όπου  $f_2(\theta)$  είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του  $\theta$ . Έτσι, για να ικανοποιούνται και οι δύο εκφράσεις της, [Εξ. (5) και (6)], η ροϊκή συνάρτηση  $\psi$  πρέπει να έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\psi = a\theta + \frac{b}{r} \sin \theta + c \quad (7)$$

όπου  $c$  είναι μια αυθαίρετη σταθερά.

**Παρατήρηση:** Επειδή οι συνιστώσες του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας συνδέονται με τις παραγώγους της ροϊκής συνάρτησης, μπορεί πάντα να προστεθεί στη συνάρτηση  $\psi$  μια αυθαίρετη σταθερά  $c$ , η τιμή της οποίας δεν επηρεάζει καθόλου την αναλυτική έκφραση του πεδίου ταχύτητας. Συνήθως, για απλότητα, θέτουμε  $c=0$ . Έτσι, για το δεδομένο πεδίο, η απλούστερη μορφή της ροϊκής συνάρτησης της ροής είναι:

$$\psi = a\theta + \frac{b}{r} \sin \theta \quad (8)$$

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Κλείνοντας το Κεφάλαιο *Κινηματική των Ρευστών*, ας επαναλάβουμε επιγραμματικά μερικά σημαντικά σημεία του:

### Τι πρέπει να γνωρίζουμε

- Ποιά είναι τα είδη ροής, καθώς και τα κριτήρια χαρακτηρισμού δεδομένης ροής.
- Τον ορισμό και τη φυσική ερμηνεία των αριθμών Reynolds και Mach.
- Τη διαφορά και τις σχέσεις μεταξύ υλικών και χωρικών συντεταγμένων.
- Τον ορισμό και τη φυσική ερμηνεία της τοπικής, της υλικής και της ολικής παραγώγου.
- Τις εκφράσεις της στιγμιαίας ταχύτητας σωματιδίου και της επιτάχυνσης ροής.
- Τις εξισώσεις ορισμού των ρυθμών ροής μάζας και όγκου ρευστού.
- Τι είναι οι τροχιές, οι ινώδεις φλέβες και οι ροϊκές γραμμές και σε τι χρησιμοποιούνται.
- Την έννοια της ροϊκής συνάρτησης και τη σημασία της από ρευστομηχανική άποψη.

### Είδη Ροής

- Ατριβη ( $\mu = 0$ ) – Ιξώδης ( $\mu \neq 0$ ).
- Στρωτή ( $Re < Re_c$ ) – Τυρβώδης ( $Re > Re_c$ ), όπου  $Re = \rho v d / \mu$  είναι ο αριθμός Reynolds και  $Re_c = 2000$  (για ροή σε σωλήνες).
- Ασυμπίεστη ( $M \leq 0,3$ ) – Συμπιεστή ( $M > 0,3$ ), όπου  $M = v/c$  είναι ο αριθμός Mach.
- Μόνιμη [ $\partial(\cdot)/\partial t = 0$ ] – Μη μόνιμη ( $\neq 0$ ).
- Ομοιόμορφη ροή σε διατομή είναι αυτή στην οποία γίνεται χρήση μέσων ιδιοτήτων.
- Μονο-, Δι- και Τριδιάστατη ροή είναι αυτή στην οποία η ταχύτητα του ρευστού εξαρτάται από μία, δύο ή τρεις συντεταγμένες, αντίστοιχα, και, ενδεχομένως, τον χρόνο.

### Υλικό και Χωρικό Άνυσμα Θέσης

- Το υλικό άνυσμα,  $\mathbf{R}_0$ , καθορίζει την αρχική θέση (τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$ ) που κατέχει το κινούμενο σωματίδιο στον χώρο.
- Κάθε σωματίδιο ρευστού έχει το "δικό" του άνυσμα  $\mathbf{R}_0$ , ή τις "δικές" του υλικές συντεταγμένες ( $x_0, y_0, z_0$ ), οι οποίες παραμένουν οι ίδιες κατά την κίνησή του στον χώρο.
- Το χωρικό άνυσμα,  $\mathbf{R}$ , καθορίζει τη θέση του σωματιδίου στο πεδίο ροής μια δεδομένη στιγμή  $t$ .
- Το άνυσμα  $\mathbf{R}$ , ή οι χωρικές συντεταγμένες ( $x, y, z$ ) δεν έχουν να κάνουν με κάποιο σωματίδιο ρευστού, αλλά με συγκεκριμένη θέση στον χώρο.
- Κάθε σωματίδιο ρευστού έχει ένα μόνο υλικό άνυσμα, αλλά πλήθος χωρικών ανυσμάτων θέσης.

**Χρονικές Παράγωγοι Μεταβλητής Θ**

- **Τοπική παράγωγος:** Εκφράζει τον τοπικό ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής  $\Theta$  ως προς ακίνητο παρατηρητή (περιγραφή του πεδίου ροής με τη μέθοδο Euler).
- **Υλική παράγωγος:** Εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής  $\Theta$  ως προς παρατηρητή κινούμενο στον χώρο με την ταχύτητα του ρευστού (περιγραφή πεδίου ροής με τη μέθοδο Lagrange).
- **Ολική παράγωγος:** Εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής  $\Theta$  ως προς παρατηρητή κινούμενο στον χώρο με τυχαία ταχύτητα.

**Ταχύτητα και Επιτάχυνση Ροής**

- Το άνυσμα  $\mathbf{v}(t)$  της στιγμιαίας ταχύτητας έχει το ίδιο μέτρο και την ίδια κατεύθυνση με το άνυσμα της πρώτης παραγώγου του άνυσματος θέσης  $\mathbf{R}(t)$  και εφάπτεται της τροχιάς του σωματιδίου σε κάθε σημείο της.
- Η κατά Lagrange ολική επιτάχυνση ροής  $\mathbf{a}$  είναι ίση με το άθροισμα της τοπικής επιτάχυνσης  $\mathbf{a}_t$  και της επιτάχυνσης μεταφοράς  $\mathbf{a}_c$ .
- Τοπική επιτάχυνση υφίσταται ένα σωματίδιο όταν το πεδίο ταχύτητας είναι μη μόνιμο και επιτάχυνση μεταφοράς όταν είναι ανομοιόμορφο.

**Ρυθμοί Ροής Ρευστού**

- Ρυθμός ροής μάζας:  $\dot{m} = dm/dt = \rho vA$
- Ρυθμός ροής όγκου:  $\dot{V} = dV/dt = vA$
- Για ομοιόμορφη ροή σε διατομή:  $\dot{m} = \rho \dot{V}$
- Μέση ταχύτητα:  $\bar{v} = \dot{V}/A$

**Ροϊκή Συνάρτηση (Ψ)**

- Ορίζεται για διδιάστατη, ασυμπίεστη (άτριβη ή ιξώδη) ροή.
- Περιγράφει αλγεβρικά τη γεωμετρία των πεδίων ροής, καθώς η τιμή αυτής δε μεταβάλλεται κατά μήκος οποιασδήποτε ροϊκής γραμμής του πεδίου ( $\psi = \text{σταθερή}$ ).
- Η διαφορά ( $\Psi_\alpha - \Psi_\beta$ ) είναι ίση με την ανά μονάδα βάθους ογκομετρική παροχή του ρευστού που διέρχεται από οποιαδήποτε γραμμή η οποία συνδέει τα σημεία  $\alpha$  και  $\beta$  του πεδίου ροής.
- Η μεταβολή της  $\Psi$  σχετίζεται άμεσα με την κατεύθυνση της ροής του ρευστού.

**Γραφική Παράσταση Πεδίων Ροής**

- Το σχεδιογράφημα των πεδίων ροής γίνεται συνήθως με ροϊκές γραμμές, αλλά μπορεί να γίνει και με τροχιές ή και με ινώδεις φλέβες.
- Οι ροϊκές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ, εκτός αν διέρχονται από σημεία ηρεμίας (στα οποία η ταχύτητα του ρευστού είναι μηδέν).
- Οι ροϊκές γραμμές που διέρχονται από σημεία κλειστής καμπύλης σχηματίζουν ροϊκό σωλήνα, με επιφάνεια αδιαπέραστη από ρευστό.
- Στην περίπτωση μόνιμης ροής, οι τροχιές των σωματιδίων του ρευστού, οι ροϊκές γραμμές και οι ινώδεις φλέβες συμπίπτουν.

**ΘΕΜΑΤΑ ΣΚΕΨΗΣ**

**Θ4-01** Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (**Σ**) και ποιές λάθος από ρευστομηχανική άποψη. Σημειώστε **X** στο αντίστοιχο τετραγωνίδιο.

- |  |                          |                          |
|--|--------------------------|--------------------------|
|  | <b>Σ</b>                 | <b>Λ</b>                 |
| <b>α.</b> Η συνθήκη μη ολίσθησης ισχύει μόνο για ρευστά που θεωρούνται συνεχή μέσα. ....                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>β.</b> Στις ροές όπου ισχύει η σχέση $M < 0,3$ , το ρευστό είναι πάντα ασυμπίεστο. ....                     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>γ.</b> Μόνιμη ροή συμβαίνει όταν οι συνθήκες σε γειτονικά σημεία είναι ίδιες σε κάθε στιγμή. ....           | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>δ.</b> Το υλικό άνυσμα είναι το χωρικό άνυσμα της αρχικής θέσης του σωματιδίου. ....                        | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <b>ε.</b> Η υλική παράγωγος της πυκνότητας είναι μηδέν, όταν ισχύει η σχέση $\text{div} \mathbf{v} = 0$ . .... | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

- στ. Όταν η ροή είναι μόνιμη, η επιτάχυνση μεταφοράς είναι πάντα μηδέν.
- ζ. Η ταχύτητα και η επιτάχυνσης των σωματιδίων ρευστού έχουν πάντα την ίδια κατεύθυνση.
- η. Στη μόνιμη ροή, οι ροϊκές επιφάνειες παραμένουν σταθερές στον χώρο.
- θ. Στην άτριβη ροή, η επιφάνεια ελέγχου είναι και ροϊκή επιφάνεια.
- ι. Η ροϊκή συνάρτηση ορίζεται μόνο για διδιάστατη ασυμπίεστη ροή.

**Θ4-02** Σε αγωγό κυκλικής διατομής, εσωτερικής διαμέτρου 2,5 cm, ρέει ρευστό με μέση ταχύτητα 3 m/s. Το ρευστό έχει πυκνότητα 1280 kg/m<sup>3</sup> και δυναμικό ιξώδες 0,015 poise. Να εξεταστεί αν η ροή του ρευστού είναι στρωτή ή τυρβώδης;

**Θ4-03** Δύο ρευστά A και B ρέουν σε δύο όμοιους αγωγούς κυκλικής διατομής με την ίδια μέση ταχύτητα. Το κινηματικό ιξώδες του ρευστού A είναι μεγαλύτερο από εκείνο του ρευστού B. Σε ποιο από τα δύο ρευστά είναι πιο πιθανή η ανάπτυξη τυρβώδους ροής;

- Θ4-04** Να καθοριστεί η διάσταση των εξής ροών:
- α. Ροή αέρα πάνω από κινούμενο αυτοκίνητο.
  - β. Ροή νερού σε ισοδιαμετρικό σωλήνα ο οποίος ακολουθεί το περίγραμμα του εδάφους σε μια λοφώδη περιοχή.
  - γ. Ροή γύρω από σφαίρα η οποία κατέχεται σε ακίνητο ρευστό υπό την επίδραση της βαρύτητας με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα.
  - δ. Ροή αέρα γύρω από αεροτομή πτέρυγας αεροπλάνου.

**Θ4-05** Για τα παρακάτω πεδία ταχύτητας, να καθοριστεί το είδος της αντίστοιχης ροής (μόνιμη ή μη μόνιμη, μονο-, δι- ή τριδιάστατη)

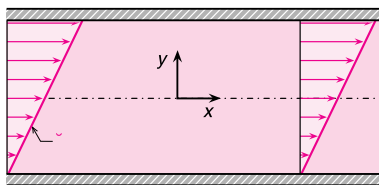
- α.  $\mathbf{v} = (ax^2e^{-bt})\mathbf{i} + cx\mathbf{j}$     γ.  $\mathbf{v} = a(\cos\theta)\mathbf{e}_r - b(\sin\theta)\mathbf{e}_\theta$
- β.  $\mathbf{v} = ay^2\mathbf{i} + byz\mathbf{j}$     δ.  $\mathbf{v} = 3xi - (3z + 2t)\mathbf{k}$

**Θ4-06** Το πεδίο πυκνότητας των καυσαερίων στην έξοδο μιας μηχανής Diesel περιγράφεται ικανοποιητικά από την εμπειρική εξίσωση:

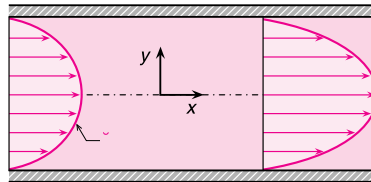
$$\rho = a[1 + be^{-cx} \cos(\omega t)]$$

Να καθοριστεί το είδος του πεδίου πυκνότητας (μόνιμο ή μη μόνιμο, μονο-, δι- ή τριδιάστατο).

**Θ4-07** Να καθοριστεί η διάσταση του πεδίου ταχύτητας μεταξύ δύο παράλληλων πλακών που απεικονίζονται στα Σχήματα Θ4-07α και Θ4-07β.



Σχήμα Θ4-07α



Σχήμα Θ4-07β

**Θ4-08** Να δοθεί φυσική ερμηνεία των όρων:

$$\alpha. \oint h\rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})dA \quad \beta. \sum_A \frac{v^2}{2} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})A$$

**Θ4-09** Να δοθεί φυσική ερμηνεία της συνάρτησης:

$$\rho(\mathbf{R}, t) = \rho[\mathbf{R}(\mathbf{R}_0, t), t]$$

**Θ4-10** Ποιά από τα παρακάτω μεγέθη μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη θέση του B στην εξίσωση (4-72);

- α. Κινητική ενέργεια    γ. Θερμότητα
- β. Ειδική ενθαλπία    δ. Στροφορμή

**Θ4-11** Η τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{R}(t) = 2(\sin t)\mathbf{i} + \sqrt{2}(\cos t)\mathbf{j} + \sqrt{2}(\cos t)\mathbf{k}$$

Να υπολογιστεί το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

**Θ4-12** Η τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{R}(t) = A \exp(Bt)\mathbf{i}$$

όπου  $A = 1$  m και  $B = 2$  s<sup>-1</sup>. Να υπολογιστούν οι τιμές της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σωματιδίου τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

**Θ4-13** Το πεδίο πυκνότητας ενός ρευστού δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho = at/x$$

όπου a είναι σταθερά και  $x > 0$ .

- α. Να σχεδιαστούν στο χώρο ρχt οι καμπύλες της πυκνότητας για τις τιμές: (i)  $x = 1$  και (ii)  $t = 1$ .
- β. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού στο σημείο  $x = 1$ ;

**Θ4-14** Αέρας ρέει σε αγωγό κυκλικής διατομής με ομοιόμορφη ταχύτητα  $\mathbf{v} = 2t^2\mathbf{i}$  m/s, όπου t είναι σε second. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση ροής τις χρονικές στιγμές  $t = -1, 0$  και  $1$  s.

**Θ4-15** Νερό ρέει σε αγωγό έτσι ώστε η ταχύτητά του να διπλασιάζεται κάθε 10 s. Κάθε στιγμή, η ταχύτητα του νερού στον αγωγό είναι παντού η ίδια. Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η ταχύτητα  $\mathbf{v} = 4\mathbf{i}$  m/s. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση ροής τις χρονικές στιγμές  $t = 0, 5$  και 10 s.

**Θ4-16** Εάν μια αντλία απομακρύνει 7 gal/min νερού από μια δεξαμενή, πόσος χρόνος θα χρειαστεί για την εκκένωσή της, αν περιέχει 4,8 t νερό;

**Θ4-17** Ένας οριζόντιος αγωγός κυκλικής διατομής, διαμέτρου 35 cm, προσαρμόζεται στο κατακόρυφο τοίχωμα μιας δεξαμενή νερού. Η μέση ταχύτητα του νερού στον αγωγό είναι 5,2 m/s. Υποθέτοντας ότι το νερό στη δεξαμενή κινείται ακτινικά προς το κέντρο της εισόδου του αγωγού, να υπολογιστεί η ταχύτητα του νερού σε απόσταση 50 cm και 100 cm από την είσοδο του αγωγού.

**Θ4-18** Νερό ρέει σε ισοδιαμετρικό αγωγό με ομοιόμορφη ταχύτητα:

$$\mathbf{v} = (12/t + 6)\mathbf{k}$$

όπου τα μεγέθη  $v$  και  $t$  είναι σε μονάδες SI. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση  $\mathbf{a}$  τις χρονικές στιγμές  $t = 1$  και 2 s.

**Θ4-19** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανωματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j}$$

όπου η ταχύτητα  $v$  είναι σε m/s και οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε μέτρα. Να σχεδιαστούν οι ροϊκές γραμμές στο 1<sup>ο</sup> και 2<sup>ο</sup> τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$  οι οποίες διέρχονται από το σημείο (0, 0). Τί το χαρακτηριστικό έχει το σημείο (0, 0);

**Θ4-20** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανωματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = a(y\mathbf{i} - x\mathbf{j})$$

όπου  $a$  είναι σταθερά. Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές στο διάγραμμα  $y-x$  για σημεία του πεδίου ροής με τιμές  $x \leq 0$ .

**Θ4-21** Αν η ανωματική έκφραση του πεδίου ταχύτητας μιας ροής είναι της μορφής:

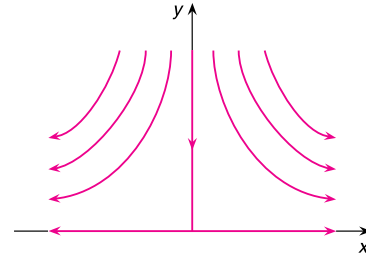
$$\mathbf{v} = f(y)\mathbf{i}$$

τί μορφή θα έχει η ροϊκή συνάρτηση  $\psi$  της ροής;

**α.**  $\psi = g(x, y)$     **β.**  $\psi = g(x)$     **γ.**  $\psi = g(y)$

**Θ4-22** Ένα ασυμπίεστο ρευστό ρέει με ομοιόμορφη ταχύτητα  $v_\infty$  επάνω στο επίπεδο  $xy$ . Το άνυσμα  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $\theta$ . Να ευρεθεί η ροϊκή συνάρτηση της ροής.

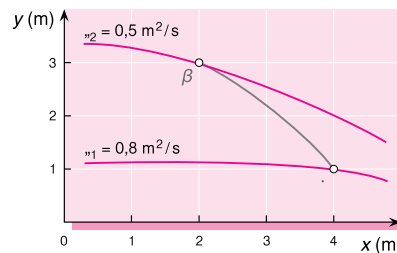
**Θ4-23** Στο Σχήμα Θ4-23 εικονίζεται το σχεδιογράφημα ενός πεδίου ροής με ροϊκές γραμμές. Τί συμπεράσματα προκύπτουν από το σχεδιογράφημα αυτό σε ότι αφορά το είδος του πεδίου ροής;



Σχήμα Θ4-23

**Θ4-24** Στο Σχήμα Θ4-24 εικονίζονται δύο καμπύλες σταθερής ροϊκής συνάρτησης.

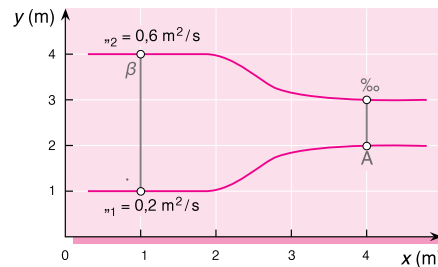
- α.** Ποιά είναι η κατεύθυνση της ροής;  
**β.** Ποιός είναι ο ρυθμός ροής όγκου ανά μονάδα βάθους μεταξύ των σημείων  $\alpha(4, 1)$  και  $\beta(2, 3)$ ;



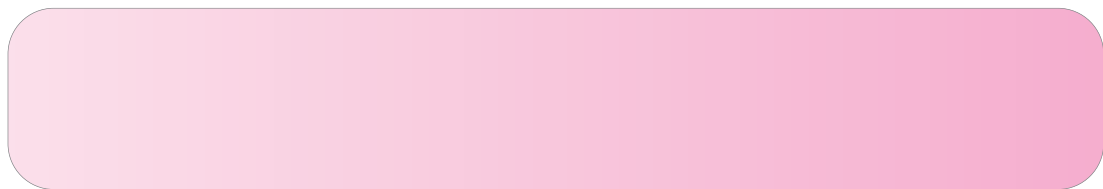
Σχήμα Θ4-24

**Θ4-25** Στο Σχήμα Θ4-25 εικονίζονται δύο καμπύλες σταθερής ροϊκής συνάρτησης.

- α.** Ποιά είναι η κατεύθυνση της ροής;  
**β.** Ποιά είναι η ταχύτητα ροής στις θέσεις  $\alpha\beta$  και  $\gamma\delta$ ;



Σχήμα Θ4-25



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**A4-01** Σε αγωγό κυκλικής διατομής, εσωτερικής διαμέτρου 0,20 m, ρέει (α) υγρό βενζόλιο και (β) λάδι SAE 30, θερμοκρασίας 20 °C, με μέση ταχύτητα 0,3 m/s. Να εξεταστεί αν η ροή των δύο υγρών είναι στρωτή ή τυρβώδης.

**A4-02** Για τη διακίνηση του αέρα σε μια εγκατάσταση κλιματισμού χρησιμοποιείται ένας φυγοκεντρικός ανεμιστήρας, με φτερωτή διαμέτρου 0,30 m. Ποιά είναι η μέγιστη ταχύτητα περιστροφής της φτερωτής (σε rev/min), ώστε να αποφευχθεί η εμφάνιση φαινομένων συμπιεστότητας κατά τη μεταφορά του αέρα; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι 340 m/s.

**A4-03** Τα χωρικά ανύσματα των θέσεων στο πεδίο ροής από τις οποίες διέρχεται το σωματιδίον ( $x_0, y_0$ ) του ρευστού δίνονται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{R} = at\mathbf{i} + (1-at)\mathbf{j}$$

Ποιά είναι η αρχική θέση του θεωρούμενου σωματιδίου;

**A4-04** Σε ένα διδιάστατο πεδίο ροής, τα χωρικά ανύσματα θέσης των σωματιδίων του ρευστού δίνονται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{R} = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 - at)\mathbf{j}$$

όπου  $a$  είναι σταθερά. Να σχεδιαστούν τα χωρικά ανύσματα θέσης του σωματιδίου του ρευστού με υλικές συντεταγμένες  $x_0 = 0$  και  $y_0 = 1$  τις χρονικές στιγμές: (α)  $t = 1/a$ , (β)  $t = 2/a$  και (γ)  $t = 3/a$ .

**A4-05** Το πεδίο πυκνότητας ενός ρευστού δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho = ax^2 + byt + c \quad (\text{kg/m}^3)$$

α. Πώς μεταβάλλεται η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού κατά τις διευθύνσεις  $x, y$  και  $z$ ;

β. Να σχεδιαστούν οι καμπύλες σταθερής πυκνότητας  $\rho = 6 \text{ kg/m}^3$  τις χρονικές στιγμές  $t_1 = 1 \text{ s}$  και  $t_2 = 2 \text{ s}$ , αν  $a = 1 \text{ kg/m}^5$ ,  $b = 1 \text{ kg/m}^4 \cdot \text{s}$  και  $c = 1 \text{ kg/m}^3$ .

γ. Ποιός είναι ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του ρευστού στα σημεία (2, 0) και (0, 2);

**A4-06** Κατά τη ροή αέρα σε ένα διαχύτη, μήκους  $\ell$ , η πυκνότητα  $\rho$  και η ταχύτητα  $\mathbf{v}$  μεταβάλλονται σύμφωνα με τις εξισώσεις:

$$\rho = \rho_0 e^{-x/\ell} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} v_0 e^{-2x/\ell}$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση από την είσοδο του διαχύτη. Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του αέρα στην έξοδο του διαχύτη.

**A4-07** Ένα αεροπλάνο ίπταται στην ατμόσφαιρα με ταχύτητα:

$$\mathbf{w} = 135\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

Η πυκνότητα  $\rho$  του ατμοσφαιρικού αέρα δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho = \rho_0 [1 + a(x^2 + y^2) + e^{-bz}]$$

όπου  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ ,  $a = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^{-2}$  και  $b = 3 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ . Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του αέρα που διαπιστώνει ο πιλότος, αν οι συντεταγμένες της θέσης του αεροπλάνου είναι  $x = 0$ ,  $y = 0$ , και  $z = 5000 \text{ m}$ .

**A4-08** Η ταχύτητα ροής διαμέσου ενός κωνικού ακροφυσίου δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^{-2} \mathbf{i}$$

όπου  $v_0 = 2,5 \text{ m/s}$  είναι η ταχύτητα στην είσοδο του ακροφυσίου και  $\ell = 1 \text{ m}$  η απόσταση μέχρι τη φαινομενική κορυφή του κώνου. Να υπολογιστούν: (α) η ταχύτητα και (β) η επιτάχυνση σε απόσταση  $x = 50 \text{ cm}$  από την είσοδο του ακροφυσίου.

**A4-09** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0 \cos\theta \left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \mathbf{e}_r + v_0 \sin\theta \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \mathbf{e}_\theta$$

Να προσδιοριστούν τα σημεία του πεδίου ροής στα οποία οι κυλινδρικές συνιστώσες  $v_r$  και  $v_\theta$  του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού έχουν τις τιμές: (α)  $v_r = 0$ , (β)  $v_\theta = 0$  και (γ)  $v_r = v_\theta = 0$ .

**A4-10** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = 2y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

όπου η ταχύτητα  $v$  είναι σε m/s και οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε μέτρα. Να υπολογιστεί η συνιστώσα της κατά Lagrange επιτάχυνσης στο σημείο (3, 1) του πεδίου ροής κατά τη διεύθυνση του ανύσματος της ταχύτητας.

**A4-11** Νερό ρέει σε αγωγό κυκλικής διατομής, διαμέτρου 20 cm, στη έξοδο του οποίου είναι προσαρμοσμένο ένα κωνικό ακροφύσιο. Ο ρυθμός ροής όγκου του νερού στον αγωγό δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{V} = 0,05(1 + t) \text{ m}^3/\text{s}$$

όπου  $t$  είναι χρόνος σε second.

α. Να υπολογιστούν η μέση ταχύτητα και η επιτάχυνση ροής στην είσοδο του αγωγού τη χρονική στιγμή  $t = 5 \text{ s}$ .

β. Να καθοριστούν η διάσταση και το είδος της ροής στη δεδομένη διάταξη.

**A4-12** Μια δεξαμενή, διαμέτρου 2 m, γεμίζεται με νερό και μετά αρχίζει να περιστρέφεται με ταχύτητα:

$$\omega = 2\pi(1 - e^{-t}) \text{ rad/s}$$

Ποιά θα είναι η ταχύτητα, η επιτρόχιος επιτάχυνση και η κεντρομόλος επιτάχυνση των σωματιδίων του ρευστού που βρίσκονται σε επαφή με τα τοιχώματα της δεξαμενής: (α) τη χρονική στιγμή  $t = 1 \text{ s}$  και (β) μετά μεγάλο χρονικό διάστημα (θεωρητικά άπειρο);

**A4-13** Ένα ακροφύσιο είναι σχεδιασμένο έτσι, ώστε να επιταχύνει το ρευστό από ταχύτητα  $v_1$  σε  $v_2$  με γραμμικό τρόπο. Αν η ροή είναι μόνιμη με  $v_1 = 4$  m/s και  $v_2 = 10$  m/s στις θέσεις  $x_1 = 0$  και  $x_2 = 1$  m, να υπολογιστεί η ολική επιτάχυνση ροής στα σημεία 1 και 2.

**A4-14** Σε μια αεροσήραγγα μελετάται η ροή του αέρα γύρω από μια σφαίρα, ακτίνας  $R = 30$  cm. Η ταχύτητα του αέρα κατά μήκος του άξονα της σήραγγας, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, βρέθηκε ότι δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0 \left[ 1 - \left( \frac{R}{x} \right)^3 \right] \mathbf{i}$$

όπου  $x$  είναι η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας και  $v_0 = 40$  m/s η ταχύτητα ροής μακριά από τη σφαίρα. Να υπολογιστούν: (α) η ταχύτητα και (β) η επιτάχυνση του αέρα μπροστά από τη σφαίρα και σε απόσταση 60 cm από το κέντρο της.

**A4-15** Το πεδίο πυκνότητας ενός πεδίου ροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\rho = a/x$$

όπου  $a$  είναι σταθερά και  $x > 0$ . Η θέση ενός ορισμένου σωματιδίου του ρευστού μέσα στο πεδίο ροής δίνεται από τις χωρικές συντεταγμένες:

$$x = x_0 [1 + \ln(bt + 1)], \quad y = y_0 \quad \text{και} \quad z = z_0$$

όπου  $x_0, y_0$  και  $z_0$  είναι οι υλικές συντεταγμένες του σωματιδίου και  $b$  σταθερά. Να υπολογιστούν: (α) η ταχύτητα, (β) η επιτάχυνση και (γ) ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του σωματιδίου τη χρονική στιγμή  $t = 1/b$ .

**A4-16** Το πεδίο ταχύτητας στην περιοχή ενός σημείου ηρεμίας δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = (v_0/\ell) x \mathbf{i} - (v_0/\ell) y \mathbf{j}$$

όπου  $v_0$  είναι η ταχύτητα μακριά από το σημείο ηρεμίας και  $\ell$  σταθερά.

- α. Να αποδειχθεί ότι το άνυσμα  $\mathbf{a}$  της επιτάχυνσης είναι καθαρά ακτινικό.  
β. Να υπολογιστεί η ταχύτητα  $v_0$ , αν η επιτάχυνση του ρευστού στο σημείο  $(x, y) = (\ell, \ell)$ , όπου  $\ell = 0,5$  m, είναι ίση με  $10$  m/s<sup>2</sup>.

**A4-17** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = (3z - x^2) \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

όπου οι χωρικές συντεταγμένες  $x, y$  και  $z$  είναι σε μέτρα και ο χρόνος  $t$  σε sec. Να υπολογιστούν οι συνιστώσες  $a_x, a_y$  και  $a_z$  του ανύσματος  $\mathbf{a}$  της ολικής επιτάχυνσης του σωματιδίου το οποίο τη χρονική στιγμή  $t = 2$  s βρίσκεται στο σημείο  $(1, 1, 1)$ .

**A4-18** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0(x \mathbf{i} - y \mathbf{j})/a$$

όπου  $a$  και  $v_0$  είναι σταθερές.

- α. Σε ποιά θέση του πεδίου ροής η ταχύτητα του ρευστού είναι ίση με  $v_0$ ;  
β. Να σχεδιαστούν μερικά αντιπροσωπευτικά ανύσματα της ταχύτητας του ρευστού στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου  $xy$ .

**A4-19** Τα ανύσματα θέσης ενός κινούμενου σωματιδίου ρευστού δίνονται από την εξίσωση:

$$\mathbf{R} = a \cos(\omega t) \mathbf{i} + b \sin(\omega t) \mathbf{j}$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές ( $a > b$ ). Ζητούνται:

- α. Να σχεδιαστεί η τροχιά του σωματιδίου στο καρτεσιανό επίπεδο  $xy$ .  
β. Η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου.  
γ. Να καθοριστούν τα σημεία του πεδίου ροής στα οποία η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου έχουν τη μέγιστη τιμή.

**A4-20** Η κατανομή της ταχύτητας του ρευστού κατά την τυρβώδη ροή σε μακρύ αγωγό κυκλικής διατομής, ακτίνας  $R$ , δίνεται από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0 \left( 1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7} \mathbf{i}$$

όπου  $v_0 = 6$  m/s είναι η μέγιστη ταχύτητα ροής και  $r$  η απόσταση από τον άξονα του αγωγού. Να υπολογιστεί η μέση ταχύτητα του ρευστού στον αγωγό.

**A4-21** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = a \mathbf{i} + b x \mathbf{j} \quad (\text{m/s})$$

όπου  $a = 4$  m/s και  $b = 1$  s<sup>-1</sup>. Να υπολογιστούν:

- α. Η συνιστώσα του ανύσματος  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο  $(2, 2)$  του πεδίου ροής κατά τη διεύθυνση  $s$  η οποία σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $\theta = -30^\circ$ .  
β. Ο ρυθμός ροής όγκου του ρευστού διαμέσου της επίπεδης επιφάνειας η οποία τέμνει το επίπεδο  $xy$  κατά μήκος της γραμμής που συνδέει τα σημεία  $(1, 0)$  και  $(2, 2)$  και εκτείνεται μέχρι βάθος  $z_0 = 1$  m.

**A4-22** Νερό ρέει μεταξύ δύο οριζόντιων πλακών οι οποίες βρίσκονται σε απόσταση  $2b$ . Για μόνιμη στρωτή ροή, η κατανομή της ταχύτητας δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = v_0 [1 - (y/b)^2] \mathbf{i}$$

όπου  $v_0$  είναι η μέγιστη ταχύτητα και  $y$  η απόσταση από το μέσο της απόστασης των δύο πλακών. Να ευρεθεί η σχέση που συνδέει τη μέση ταχύτητα με τη μέγιστη ταχύτητα ροής.

**A4-23** Νερό εκρέει από έναν αγωγό κυκλικής διατομής με ταχύτητα η οποία μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση  $r$  από τον άξονα του αγωγού. Να ευρεθεί η σχέση που συνδέει τη μέση ταχύτητα με τη μέγιστη ταχύτητα ροής.

**A4-24** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ay\mathbf{i} + b\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

όπου  $a = 1 \text{ s}^{-1}$  και  $b = 1 \text{ m/s}$ . Να υπολογιστεί η ογκομετρική παροχή του ρευστού διαμέσου των εξής επίπεδων επιφανειών:

- Τριγωνικής με κορυφές τα σημεία  $A(2, 0, 0)$ ,  $O(0, 0, 0)$  και  $B(0, 1, 0)$ .
- Τετραγωνικής με κορυφές τα σημεία  $O(0, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$ ,  $\Gamma(0, 1, 1)$  και  $\Delta(0, 0, 1)$ .
- Ορθογωνικής με κορυφές τα σημεία  $A(2, 0, 0)$ ,  $O(0, 0, 0)$ ,  $\Delta(0, 0, 1)$  και  $E(2, 0, 1)$ .

**A4-25** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ax^2\mathbf{i} - bxy\mathbf{j} - czx\mathbf{k} \quad (\text{m/s})$$

όπου  $a = 2 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ ,  $b = 1 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$  και  $c = 3 \text{ m}^{-1}\text{s}^{-1}$ . Να υπολογιστεί ο ρυθμός ροής όγκου του ρευστού διαμέσου του τριγώνου με κορυφές τα σημεία  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(0, 1, 0)$  και  $\Gamma(0, 0, 1)$ .

**A4-26** Σε ένα οριζόντιο κανάλι ορθογωνικής διατομής πλάτους 3 m, η ταχύτητα του νερού δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

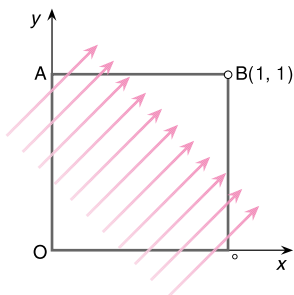
$$\mathbf{v} = 7,5h^{1/2}\mathbf{i} \quad (\text{m/s})$$

όπου  $h$  είναι η απόσταση (σε m) από τον πυθμένα του καναλιού. Το βάθος του νερού στο κανάλι είναι 1 m. Να υπολογιστούν: (α) η μέση ταχύτητα και (β) η ογκομετρική παροχή του νερού στο κανάλι.

**A4-27** Ένα ρευστό διέρχεται από μια επίπεδη τετραγωνική επιφάνεια, πλευράς 1 m, οι κορυφές της οποίας βρίσκονται στα σημεία  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(0, 1, 1)$  και  $\Gamma(0, 1, 0)$ . Να υπολογιστεί ο ρυθμός ροής μάζας διαμέσου της επιφάνειας  $OAB\Gamma$  όταν:

- Το ρευστό έχει πυκνότητα  $\rho = 1,25 \text{ kg/m}^3$  και ταχύτητα  $\mathbf{v} = (6z^2 + 1)\mathbf{i} \text{ m/s}$ .
- Το ρευστό έχει πυκνότητα  $\rho = 30 - 0,12z \text{ kg/m}^3$  και ταχύτητα  $\mathbf{v} = 1,25z\mathbf{i} \text{ m/s}$ .

**A4-28** Ένα ρευστό κινείται στον χώρο με σταθερή ταχύτητα  $v_0$ . Η διεύθυνση ροής σχηματίζει με τον άξονα  $x$  γωνία  $45^\circ$  (βλ. Σχήμα A4-28). Να υπολογιστούν:



Σχήμα A4-28

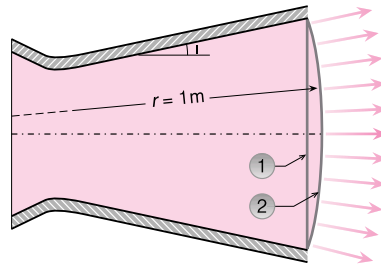
α. Ο ανά μονάδα βάθους ρυθμός ροής όγκου διαμέσου της επιφάνειας  $AB\Gamma$ .

β. Ο ανά μονάδα βάθους ρυθμός καθαρής εκροής όγκου από την επιφάνεια  $OAB\Gamma$ .

**A4-29** Ένα ιξώδες ρευστό το οποίο έχει πυκνότητα  $1,25 \text{ kg/m}^3$  κινείται μεταξύ δύο ακίνητων πλακών οι οποίες αποκλίνουν κατά τη διεύθυνση της ροής (βλ. Σχήμα A4-29), με ταχύτητα:

$$\mathbf{v} = (4/r)\mathbf{e}_r \quad (\text{m/s}), \quad \text{για } r > 0$$

Να υπολογιστεί ο ρυθμός ροής μάζας ανά μονάδα πλάτους διαμέσου των δύο εικονιζόμενων επιφανειών (της επίπεδης 1 και της καμπύλης 2), αν η γωνία  $\theta = \pi/24 \text{ rad}$ .



Σχήμα A4-29

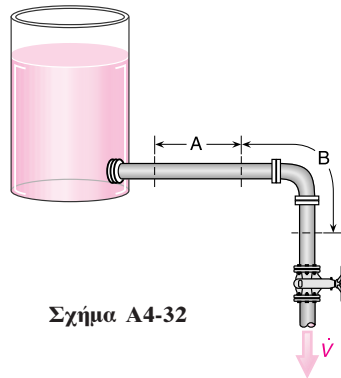
**A4-30** Ένα σχεδόν άτριβο ρευστό εξέρχεται από τον πυθμένα μιας μεγάλης δεξαμενής μέσω μιας οπής, διαμέτρου 1 cm, με ρυθμό  $1800 \text{ cm}^3/\text{s}$ . Το ρευστό θεωρείται ότι ρέει ακτινικά προς την οπή διερχόμενο με την ίδια παροχή όγκου από κάθε διατομή. Να υπολογιστεί η επιτάχυνση μεταφοράς του ρευστού στα σημεία του πεδίου ροής που απέχουν από την οπή 10, 20 και 40 cm.

**A4-31** Νερό εισέρχεται σε αγωγό κυκλικής διατομής, διαμέτρου 20 cm και μήκους 60 cm, με ομοιόμορφη ταχύτητα 10 m/s. Η παράπλευρη επιφάνεια του αγωγού είναι διάτρητη και το νερό εξέρχεται από αυτή με ταχύτητα η οποία μεταβάλλεται γραμμικά από την τιμή μηδέν (στη θέση  $x = 0$ ) μέχρι την τιμή  $0,5v$  (στη θέση  $x = 60 \text{ cm}$ ), όπου  $v$  είναι η μέση ταχύτητα ροής στην έξοδο του αγωγού. Αν ο ρυθμός καθαρής εκροής μάζας από τον αγωγό είναι μηδέν, να υπολογιστεί η ταχύτητα  $v$ .

**A4-32** Στο Σχήμα A4-32 εικονίζεται μια δεξαμενή νερού στην οποία είναι προσαρμοσμένος ένας αγωγός σταθερής κυκλικής διατομής. Το νερό εκρέει από τη δεξαμενή με ελεγχόμενο ρυθμό.

Να καθοριστεί το είδος της ροής (μόνιμη ή μη μόνιμη, ομοιόμορφη ή ανομοιόμορφη) στα τμήματα  $A$  και  $B$  του αγωγού στις εξής δύο περιπτώσεις:

- Όταν το νερό εκρέει από τη δεξαμενή με σταθερό ογκομετρικό ρυθμό.
- Όταν ο ρυθμός εκροής όγκου του νερού αυξάνεται με το χρόνο.



Σχήμα Α4-32

**A4-33** Το πεδίο ταχύτητας ενός πεδίου ροής περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{j} \quad (\text{m/s})$$

για το διάστημα  $0 \leq t \leq 10 \text{ s}$  και από την εξίσωση,

$$\mathbf{v} = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j} \quad (\text{m/s})$$

για το διάστημα  $10 < t \leq 20 \text{ s}$ . Να χαρακτηθούν:

- α. Οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής τη χρονική στιγμή  $t = 15 \text{ s}$ .
- β. Η τροχιά του σωματιδίου του ρευστού το οποίο πέρασε από το σημείο  $M(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0 \text{ s}$  για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 15 \text{ s}$ .
- γ. Η ινώδης φλέβα των σωματιδίων του ρευστού τα οποία πέρασαν από το σημείο  $M(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$ .

**A4-34** Σε ένα πεδίο διδιάστατης ροής, για την αναγνώριση ενός σωματιδίου ρευστού χρησιμοποιείται το υλικό άνωμα  $\mathbf{R}_0$  του σωματιδίου:

$$\mathbf{R}_0 = x(1 - at)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{(1 - at)}\right)\mathbf{j}$$

όπου  $x, y$  είναι οι χωρικές συντεταγμένες των σημείων του χώρου,  $t$  ο χρόνος και  $a$  σταθερά. Να ευρεθεί η εξίσωση της ροϊκής γραμμής η οποία διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής.

**A4-35** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ay\mathbf{i} - ax\mathbf{j} \quad (\text{m/s})$$

όπου οι  $x$  και  $y$  είναι σε m και η σταθερά  $a = 2 \text{ s}^{-1}$ .

- α. Να εξαχθεί η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής και να χαραχθούν μερικές στο καρτεσιανό επίπεδο  $xy$ .
- β. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ρευστού στο σημείο  $(3, 4)$ .

**A4-36** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$$

Να εξαχθεί η γενική εξίσωση των ροϊκών γραμμών

του πεδίου ροής και να σχεδιαστούν μερικές στο καρτεσιανό επίπεδο  $xy$ .

**A4-37** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ax\mathbf{i} - by\mathbf{j}$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι θετικές σταθερές. Ζητούνται:

- α. Η εξίσωση των ροϊκών γραμμών του πεδίου ροής.
- β. Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές στο πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου  $xy$  όταν οι σταθερές  $a$  και  $b$  είναι ίσες.
- γ. Η εξίσωση και η κλίση της ροϊκής γραμμής που διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$  του πεδίου ροής.

**A4-38** Σε ένα διδιάστατο πεδίο ροής, οι θέσεις των σωματιδίων του ρευστού δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x = c_1 \exp(at) \quad \text{και} \quad y = c_2 \exp(-bt)$$

όπου τα μεγέθη  $a, b, c_1$  και  $c_2$  είναι σταθερές. Να ευρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού που έχει υλικές συντεταγμένες  $(x_0, y_0) = (1, 2)$ .

**A4-39** Δίνεται το υλικό άνωμα ενός σωματιδίου:

$$\mathbf{R}_0 = x(1 + at)^{1/2}\mathbf{i} + y(1 + at)\mathbf{j},$$

όπου  $a$  είναι σταθερά.

Να ευρεθεί η εξίσωση (α) του χωρικού ανύσματος θέσης, (β) των ροϊκών γραμμών, (γ) των τροχιών και (δ) των ινώδων φλεβών του πεδίου ροής.

**A4-40** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = xe^{-m}\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

όπου  $m$  είναι σταθερά. Ζητούνται:

- α. Η εξίσωση της ροϊκής γραμμής που διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$ .
- β. Η εξίσωση της τροχιάς του σωματιδίου του ρευστού το οποίο τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$ .
- γ. Η εξίσωση της ινώδους φλέβας των σωματιδίων του ρευστού τα οποία διέρχονται από το σημείο  $(a, b)$ .

**A4-41** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{x}{1+t}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{1+2t}\right)\mathbf{j}$$

Να ευρεθεί η εξίσωση και να σχεδιαστεί (α) η ροϊκή γραμμή, (β) η τροχιά και (γ) ινώδης φλέβα που διέρχονται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής τη χρονική στιγμή  $t = 0$ .

**A4-42** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ab \exp(at)\mathbf{e}_r + ab \exp(at)\mathbf{e}_\theta$$

όπου τα μεγέθη  $a$  και  $b$  είναι σταθερές. Να ευρεθεί η εξίσωση (α) της ροϊκής γραμμής, (β) της τροχιάς και (γ) της ινώδους φλέβας που διέρχονται από το σημείο  $(r_1, \theta_1)$  του πεδίου ροής.

**A4-43** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = x(x+1)(y-1)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

- α. Να σχεδιαστεί η ροϊκή γραμμή που διέρχεται από το σημείο (0, 0) του πεδίου ροής.  
β. Να σημειωθεί (και αιτιολογηθεί) η φορά της κίνησης του ρευστού κατά μήκος της ροϊκής γραμμής.

**A4-44** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + x(x-1)(y+1)\mathbf{j}$$

όπου οι ταχύτητες  $u_x$  και  $u_y$  είναι σε m/s και οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε μέτρα. Να χαραχθούν: (α) η ροϊκή γραμμή και (β) η ινώδης φλέβα που διέρχονται από το σημείο (0, 0) του πεδίου ροής.

**A4-45** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = ax\mathbf{i} - ay\mathbf{j}$$

όπου η ταχύτητα  $v$  είναι σε m/s, οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  είναι σε μέτρα και η σταθερά  $a = 1 \text{ s}^{-1}$ .

- α. Να αποδειχθεί ότι οι ροϊκές γραμμές είναι ορθογώνιες υπερβολές ( $xy = c$ ).  
β. Να σχεδιαστούν οι ροϊκές γραμμές που αντιστοιχούν στις τιμές της σταθεράς  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1$  και  $c_3 = 2 \text{ m}^2$  για  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ .  
γ. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του ρευστού στα σημεία (1/2, 2), (1, 1) και (2, 1/2) και να χαραχθούν τα ανύσματα τους στο διάγραμμα των ροϊκών γραμμών.

**A4-46** Σε μια οριζόντια, μονοδιάστατη ροή κατά τη θετική φορά του άξονα  $x$ , η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται γραμμικά από μηδέν (στη θέση  $y = 0$ ) σε 30 m/s (στη θέση  $y_0 = 1,25 \text{ m}$ ). Να ευρεθούν:

- α. Η έκφραση της ροϊκής συνάρτησης της ροής.  
β. Η  $y$ -συντεταγμένη πάνω από την οποία η ογκομετρική παροχή του ρευστού είναι ίση με το μισό της ολικής παροχής όγκου μεταξύ των τιμών  $y = 0$  και  $y_0$ .

**A4-47** Το πεδίο ταχύτητας μιας ροής περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} \quad (\text{m/s})$$

για το διάστημα  $0 \leq t \leq 20 \text{ s}$ , και από την εξίσωση:

$$\mathbf{v} = -4\mathbf{i} \quad (\text{m/s})$$

για το διάστημα  $20 < t \leq 40 \text{ s}$ . Να χαραχθούν:

- α. Οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής τις χρονικές στιγμές  $t = 10 \text{ s}$  και  $t = 30 \text{ s}$ .  
β. Οι τροχιές των δύο σωματιδίων τα οποία περνάνε από το σημείο (0, 0) του πεδίου ροής, το πρώτο, τη στιγμή  $t = 0$  και, το δεύτερο, τη στιγμή  $t = 20 \text{ s}$ , για το χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq 30 \text{ s}$ .

**A4-48** Το πεδίο ταχύτητας μιας ασυμπίεστης ροής δίνεται από την ανυσματική εξίσωση:

$$\mathbf{v} = -\left(\frac{ay}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{ax}{x^2 + y^2}\right)\mathbf{j}$$

όπου  $a$  είναι σταθερά. Να ευρεθεί η εξίσωση της ροϊκής συνάρτησης και να σχεδιαστούν οι ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής.

**A4-49** Η ροϊκή συνάρτηση μιας ασυμπίεστης ροής δίνεται από την εξίσωση:

$$\Psi = 3x^2y - y^3$$

όπου η ροϊκή συνάρτηση είναι σε  $\text{m}^2/\text{s}$  και οι συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε μέτρα.

- α. Να σχεδιαστούν οι ροϊκές γραμμές που διέρχονται από το σημείο (0, 0) του πεδίου ροής.  
β. Να υπολογιστεί η ανά μονάδα βάθους ογκομετρική παροχή του ρευστού διαμέσου ευθείας γραμμής η οποία ορίζεται από τα σημεία  $A(x = 1 \text{ m}, y = 0)$  και  $B(x = 0, y = 1 \text{ m})$ .

**A4-50** Η μαθηματική έκφραση της ροϊκής συνάρτησης μιας διδιάστατης, ασυμπίεστης ροής είναι:

$$\Psi = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

όπου  $a$  και  $b$  είναι σταθερές ( $a > 0$  και  $b < 0$ ).

- α. Να σχεδιαστούν μερικές ροϊκές γραμμές του πεδίου ροής στο καρτεσιανό επίπεδο  $xy$ .  
β. Να υπολογιστούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση ροής στο σημείο ( $x = 2a, y = 2b$ ) και να σχεδιαστούν τα αντίστοιχα ανύσματα.

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 4-01** Douglas, J., et. al., *Fluid Mechanics*, 5th ed., Pearson (Prentice-Hall), New York, 2005.  
**4-02** Finnemore, E., and Franzini, J., *Fluid Mechanics with Engineering Applications*, 10th ed., Mac-Graw-Hill, New York, 2002.  
**4-03** National Committee for Fluid Mechanics, *Illustrated Experiments in Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1972.

**4-04** Παπαϊωάννου, Α., *Ανύσματα και Τανυστές: Θεωρία και Εφαρμογές στις Φυσικές Επιστήμες*, Εκδόσεις Κοράλι, Αθήνα, 2003.

**1-05** Preyret, R., and Taylor, T., *Computational Methods for Fluid Flow*, Spinger-Verlag, New York, 1983.

**4-06** Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Stanford, California, The Parabolic Press, 1982.