ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Εισαγωγικά

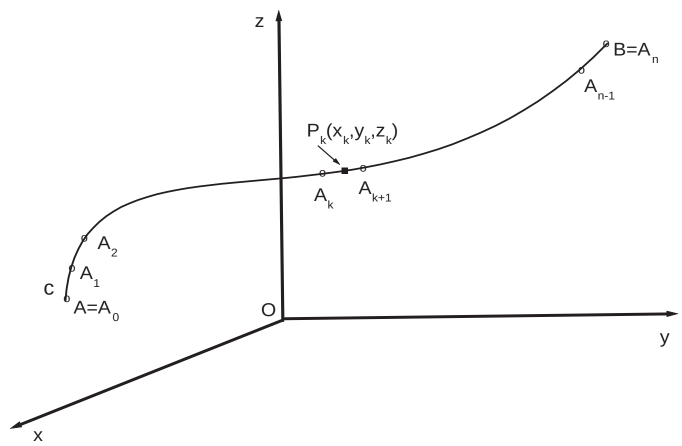
Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε και θα αναπτύξουμε διεξοδικά την έννοια του επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Θα παρουσιάσουμε τα δύο είδη επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων (α′ και β′ είδους) και θα παρουσιάσουμε μερικές από τις εφαρμογές τους στη Γεωμετρία και στη Φυσική. Έτσι θα δείξουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους είναι μία γενίκευση του υπολογισμού του μήκους τόξου μιας καμπύλης ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους συνδέεται με τον υπολογισμό του έργου μιας δύναμης κατά μήκος του τόξου μιας καμπύλης. Ορίζουμε επιπλέον και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γ′ είδους το οποίο χρησιμοποιείται εκτεταμένα στην Φυσική. Ιδιαίτερη έμφαση θα δωθεί στο θεώρημα Green ενώ θα γίνει εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος σε απλά συνεκτικούς και πολλαπλά συνεκτικούς τόπους. Θα παρουσιαστούν εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος στη Φυσική ενώ θα αναπτυχθεί εκτεταμένα η περίπτωση εκείνη της ανεξαρτησίας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους από την καμπύλη ολοκλήρωσης.

6.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους

Θεωρούμε μια καμπύλη c η οποία είναι ομαλή ή τμηματικά ομαλή και προσανατολισμένη και η οποία περιγράφεται από την παραμετρική παράσταση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [t_1, t_2]. \tag{6.1}$$

Έστω τώρα $\widehat{AB}$ είναι ένα τόξο της παραπάνω καμπύλης πάνω στο οποίο θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία $A_0 \equiv A_1, A_2, \cdots, A_n \equiv B$ (βλέπε σχήμα (6.1)). Συμβολίζουμε την παραπάνω διαμέριση του τόξου σε διαδοχικά τόξα ως D_1 και επίσης ονομάζουμε



Σχήμα 6.1: Διαμέριση τόξου σε διαδοχικά τόξα και ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α΄ είδους.

την ποσότητα $||D_1||$ μέτρο της διαμέρισης αυτής όπου

$$||D_1|| = \max|\widehat{A_k A_{k+1}}|, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.2}$$

Στην παραπάνω σχέση η ποσότητα $|\widehat{A_k A_{k+1}}| = \Delta s_k$ είναι το μήκος του στοιχειώδους τόξου $\widehat{A_k A_{k+1}}$. Θεωρούμε τώρα το τυχαίο σημείο $P_k(x_k, y_k, z_k)$ του τόξου $\widehat{A_k A_{k+1}}$ και σχηματίζουμε το άθροισμα

$$I_1 = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k, \tag{6.3}$$

όπου $f(x, y, z)$ είναι μία συνάρτηση η οποία ορίζεται κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$. Το παραπάνω άθροισμα εξαρτάται τόσο από την διαμέριση του τόξου $\widehat{AB}$ όσο και από την εκλογή του σημείου P_k. Θεωρούμε επιπλέον μία διαδοχική ακολουθία διαμερίσεων $\{D_n\}$ του τόξου $\widehat{AB}$ η οποία έχει την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} ||D_n|| = 0,$$

και έστω η ακολουθία των αντίστοιχων αθροισμάτων

$$I_1, I_2, \cdots, I_n. \tag{6.4}$$

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 1. *Αν το όριο της ακολουθίας (6.4) υπάρχει όταν $||D_n|| \to 0$ και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο διαμέρισης του τόξου και από την εκλογή του σημείου P_k*

τότε το όριο αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους της βαθμωτής συνάρτησης $f(x, y, z)$ κατά μήκος της καμπύλης c. Το ολοκλήρωμα αυτό συμβολίζεται ως εξής

$$I = \lim_{||D_n|| \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k, y_k, z_k) \Delta s_k = \int_c f(x, y, z) \mathrm{d}s. \tag{6.5}$$

Ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους από τον ορισμό του, δηλαδή από τη σχέση (6.5), είναι στις περισσότερες περιπτώσεις αρκετά δύσκολος. Όπως θα δείξουμε παρακάτω ο υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος. Έτσι, ο υπολογισμός του γίνεται εφαρμόζοντας τις γνωστές μεθόδους υπολογισμού ενός απλού ολοκληρώματος.

6.2 Υπολογισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους

Έστω ότι η διανυσματική παράσταση της καμπύλης c, κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το ολοκλήρωμα, δίνεται στη φυσική της αναπαράσταση, δηλαδή

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \qquad s \in [0, l]. \tag{6.6}$$

Εφόσον ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γίνεται κατά μήκος της παραπάνω καμπύλης οι μεταβλητές x, y, z της συνάρτησης $f(x, y, z)$ δεν είναι πλέον ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού είναι συνάρτηση της φυσικής παραμέτρου s και το ολοκλήρωμα (6.5) μπορεί να γραφεί

$$I = \int_0^l f(x(s), y(s), z(s)) \mathrm{d}s. \tag{6.7}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος. Όπως θα δείξουμε όμως παρακάτω η γεωμετρική σημασία των δύο ολοκληρωμάτων (απλού και επικαμπύλιου α′ είδους) είναι εν γένει διαφορετική.

Αν η καμπύλη δίνεται στην τυχαία αναπαράσταση της μορφής

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [t_1, t_2],$$

και λαμβάνοντας υπόψη τη γνωστή σχέση

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_a^t \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^*} \right| \mathrm{d}t^* = \left| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}, \tag{6.8}$$

τότε το ολοκλήρωμα (6.7) ανάγεται στον υπολογισμό του παρακάτω απλού ολοκληρώματος

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t), y(t), z(t)\right) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, \mathrm{d}t. \tag{6.9}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι για να γίνει ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους πρέπει να είναι γνωστή η παραμετρική παράσταση της καμπύλης κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το ολοκλήρωμα. Αυτό είναι συνήθως το δυσκολότερο μέρος του προβλήματος και πρέπει να ανατρέξει κανείς στο 1ο (ή και στο 2ο) κεφάλαιο όπου παρουσιάζονται οι τρόποι παραμετροποίησης μιας καμπύλης. Έπειτα ο υπολογισμός του ολοκληρώματος ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος.
Υπόδειξη: Θα πρέπει να είναι κανείς προσεκτικός στον υπολογισμό ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους. Τα όρια ολοκλήρωσης είναι εξαρτημένα από την παραμετροποίηση της καμπύλης. Αυτό σημαίνει ότι η παραμετροποίηση επιλέγεται με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος να εξασφαλίζεται η θετικότητα του στοιχειώδους μήκους $\mathrm{d}s$. *Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι θα πρέπει, αν τα όρια ολοκλήρωσης της παραμέτρου* t *είναι* $t \in [t_1, t_2]$, *να εξασφαλίζεται η ανισότητα* $t_2 > t_1$.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους κατά μήκος κλειστής καμπύλης

Μία ειδική περίπτωση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων α′ είδους είναι αυτή όπου το αρχικό και το τελικό σημείο του τόξου ολοκλήρωσης ταυτίζονται δηλαδή όταν η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης c. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως εξής

$$I = \oint_c f(x, y, z)\mathrm{d}s. \tag{6.10}$$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους και μήκος τόξου

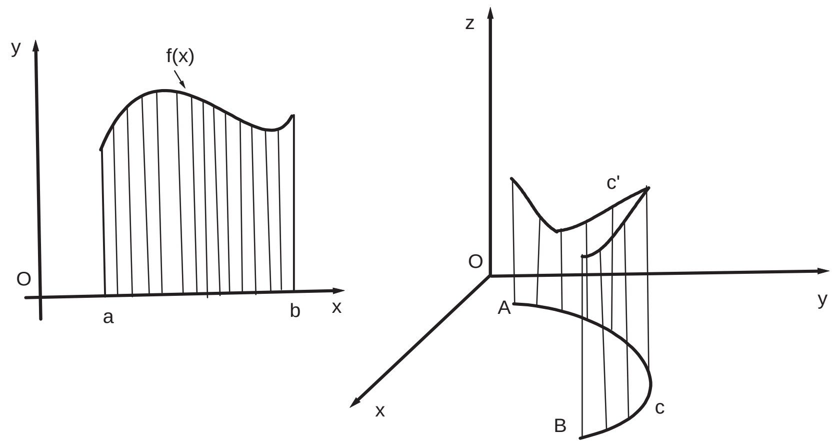
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους συνδέεται με το μήκος ενός τόξου καμπύλης. Έτσι από τη σχέση (6.5) (ή τη σχέση (6.9)) αν θέσουμε $f(x, y, z) = 1$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ισούται με το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ δηλαδή θα έχουμε

$$s = \int_{\widehat{AB}} \mathrm{d}s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, \mathrm{d}t. \tag{6.11}$$

Γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους

Παρότι υπολογιστικά, ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους ταυτίζεται με ένα απλό ολοκλήρωμα, η γεωμετρική τους σημασία είναι διαφορετική. Είναι γνωστό ότι αν θεωρήσουμε μία θετική συνάρτηση $f(x) > 0,\ x \in [a, b]$ τότε το απλό ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{x=a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ ταυτίζεται με τον εμβαδόν ενός τραπεζοειδούς όπως φαίνεται στο σχήμα (6.2).

Θεωρούμε τώρα μία επίπεδη καμπύλη στο επίπεδο xy με παραμετρική παράσταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{i}$ και έστω η θετική συνάρτηση $z = f(x, y)$ (βλέπε σχήμα



Σχήμα 6.2: Η γεωμετρική ερμηνεία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους και η σχέση του με ένα απλό ολοκλήρωμα.

(6.2)). Είναι προφανές ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους $I_a = \int_c f(x,y)\mathrm{d}s$ αντιστοιχεί στο εμβαδόν της κυλινδρικής επιφάνειας που σχηματίζεται από την καμπύλη c και την καμπύλη c' όπου

$$c': \quad \mathbf{r}'(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{i} + z(x(t), y(t))\mathbf{k}$$

(η καμπύλη c είναι η ορθή προβολή της καμπύλης c' στο επίπεδο xy).

Θα δείξουμε τώρα σε ποια περίπτωση ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους ταυτίζεται με ένα απλό ολοκλήρωμα. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $I_a = \int_c f(x,y)\mathrm{d}s$ υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης c η οποία βρίσκεται πάνω στον άξονα xx', τότε, και λαμβάνοντας υπόψη ότι θα είναι $f(x, y = c) = f(x)$ (όπου c μία σταθερά) και επιπλέον ότι θέτοντας $x = t$ θα έχουμε $\mathrm{d}s = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται

$$I_a = \int_c f(x,y)\mathrm{d}s = \int f(x)\mathrm{d}x.$$

Από την παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι, στην συγκεκριμένη περίπτωση, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους ταυτίζεται με ένα απλό ολοκλήρωμα.

6.3 Ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους

Αναφέρουμε παρακάτω, χωρίς απόδειξη, μερικές βασικές ιδιότητες των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων α′ είδους:

1. *Αν* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *είναι σταθερές και οι συναρτήσεις* $f_1, f_2, \cdots, f_n$ *είναι ολοκληρώσιμες κατά μήκος του τόξου* c *τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,y,z)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_c f_i(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.12}$$

2. *Αν το τόξο* c *είναι η ένωση των διαδοχικών τόξων* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *και η συνάρτηση* $f(x,y,z)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξων αυτών, τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} f(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.13}$$

3. *Αν ισχύει* $f(x,y,z) \geq 0$ *και η συνάρτηση* $f(x,y,z)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου* c*, τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s \geq 0. \tag{6.14}$$

4. *Αν η συνάρτηση* $f(x,y,z)$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος του τόξου* c*, τότε και η συνάρτηση* $|f(x,y,z)|$ *είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου* c *και ισχύει*

$$\left|\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s\right| \leq \int_c |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}s. \tag{6.15}$$

5. Θεώρημα μέσης τιμής. *Αν η συνάρτηση* $f(x,y,z)$ *είναι συνεχής και ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξου* c *και* l *είναι το μήκος του παραπάνω τόξου, τότε υπάρχει ένα σημείο* $P(x_P, y_P, z_P)$ *του τόξου* c *τέτοιο ώστε να είναι*

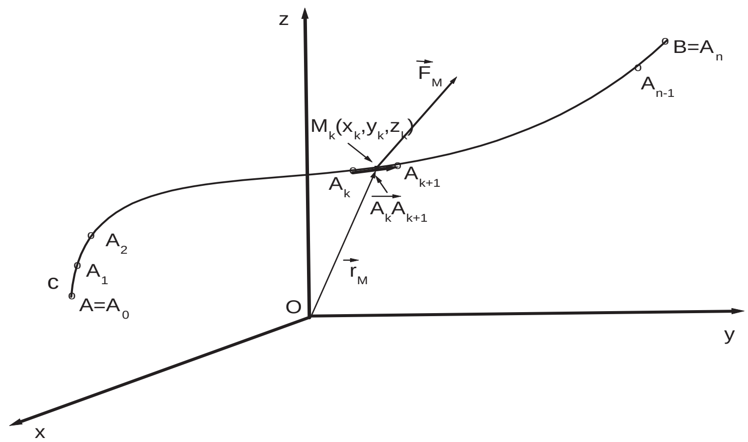
$$f(x_P,y_P,z_P) = \frac{1}{l}\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s, \quad l = \int_c \mathrm{d}s. \tag{6.16}$$

6. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α΄ είδους είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό του τόξου* $\widehat{AB}$ *της ολοκλήρωσης, δηλαδή ισχύει*

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.17}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος από τη σχέση (6.5). Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} f(x_k,y_k,z_k)\tilde{\Delta} s_k \\ &= \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k,y_k,z_k)\Delta s_k = \int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.18}$$



Σχήμα 6.3: Διαμέριση τόξου σε διαδοχικά τόξα και ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους.

όπου στην παραπάνω απόδειξη λάβαμε υπόψη την προφανή ισότητα $\tilde{\Delta} s_k = |\widehat{A_{k+1}A_k}| = |\widehat{A_kA_{k+1}}| = \Delta s_k$.

7. *Αν κατά μήκος του τόξου c είναι $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ και οι συναρτήσεις f, g είναι ολοκληρώσιμες κατά μήκος του παραπάνω τόξου, τότε ισχύει*

$$\int_c f(x,y,z)\mathrm{d}s \le \int_c g(x,y,z)\mathrm{d}s. \tag{6.19}$$

8. *Η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους είναι ανεξάρτητη από την παραμετρική παράσταση της καμπύλης κατά μήκος της οποίας ορίζεται το ολοκλήρωμα.*

6.4 Ορισμός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους

Θεωρούμε την ομαλή καμπύλη c και έστω $\widehat{AB}$ ένα τόξο της καμπύλης αυτής (βλέπε σχήμα (6.3)). Η παραμετρική παράσταση της καμπύλης δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \qquad t \in [t_1, t_2]. \tag{6.20}$$

Επιλέγουμε κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ την τυχαία διαμέριση η οποία περιλαμβάνει τα σημεία $A_0 \equiv A_1, A_2, \cdots, A_n \equiv B$. Συμβολίζουμε την παραπάνω διαμέριση του τόξου σε διαδοχικά τόξα ως D_1 και επίσης ονομάζουμε μέτρο της διαμέρισης αυτής την ποσότητα $||D_1||$ όπου

$$||D_1|| = \max|\widehat{A_kA_{k+1}}|, \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.21}$$

Θεωρούμε επίσης τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)$, η οποία ορίζεται κατά μήκος της καμπύλης c και έχει τη μορφή

$$\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}. \tag{6.22}$$

Κατασκευάζουμε το παρακάτω άθροισμα

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}(M_k)\mathbf{A_k A}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}(M_k)\Delta \mathbf{r}_{k,k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(P(M_k)\Delta x_{k,k+1} + Q(M_k)\Delta y_{k,k+1} + R(M_k)\Delta z_{k,k+1} \Big), \end{aligned} \tag{6.23}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι

$$\Delta \mathbf{r}_{k,k+1} = \Delta x_{k,k+1}\mathbf{i} + \Delta y_{k,k+1}\mathbf{j} + \Delta z_{k,k+1}\mathbf{k}, \tag{6.24}$$

και ότι $M_k(x_k, y_k, z_k)$ είναι τυχαίο σημείο του τόξου $\widehat{A_k A_{k+1}}$. Θεωρούμε τώρα επιπλέον μία διαδοχική ακολουθία διαμερίσεων $\{D_n\}$ του τόξου $\widehat{AB}$ που να έχει την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} ||D_n|| = 0,$$

και έστω η ακολουθία των αντίστοιχων αθροισμάτων

$$I_1, I_2, \cdots, I_n. \tag{6.25}$$

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2. *Αν το όριο της ακολουθίας (6.25) υπάρχει όταν $||D_n|| \to 0$ και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο διαμέρισης του τόξου και από την εκλογή του σημείου M_k τότε το όριο αυτό ονομάζεται επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους της διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{F}(x,y,z)$ κατά μήκος της καμπύλης c. Το ολοκλήρωμα αυτό συμβολίζεται ως εξής*

$$\begin{aligned} I &= \lim_{||D_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Big(P(M_k)\Delta x_{k,k+1} + Q(M_k)\Delta y_{k,k+1} + R(M_k)\Delta z_{k,k+1} \Big) \\ &= \int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{6.26}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (6.26) ονομάζεται και **κυκλοφορία του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ κατά μήκος του τόξου** $\widehat{AB}$. Το παραπάνω ολοκλήρωμα, αν λάβουμε υπόψη την παραμετρική παράσταση της καμπύλης η οποία δίνεται από τη σχέση (6.20), μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_1}^{t_2} \Big[P\Big(x(t), y(t), z(t) \Big) \dot{x}(t) + Q\Big(x(t), y(t), z(t) \Big) \dot{y}(t) \\ &+ R\Big(x(t), y(t), z(t) \Big) \dot{z}(t) \Big] \mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{6.27}$$

ή πιο απλά

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \Big(P(t)\dot{x}(t) + Q(t)\dot{y}(t) + R(t)\dot{z}(t) \Big) \,\mathrm{d}t. \tag{6.28}$$

Συνεπώς, σύμφωνα με την παραπάνω σχέση, ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος.

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους μπορεί να γραφεί και με διαφορετικούς τρόπους. Έτσι από τη σχέση (6.26) και λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathrm{d}x\mathbf{i} + \mathrm{d}y\mathbf{j} + \mathrm{d}z\mathbf{k},$$

θα έχουμε

$$I = \int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.29}$$

Επιπλέον θα έχουμε

$$I = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \,\mathrm{d}s, \tag{6.30}$$

όπου $\mathbf{t}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα σε τυχαίο σημείο το τόξου $\widehat{AB}$. Αν η προσανατολισμένη καμπύλη c δίνεται στη φυσική της αναπαράσταση, δηλαδή

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}, \qquad s \in [0, l], \tag{6.31}$$

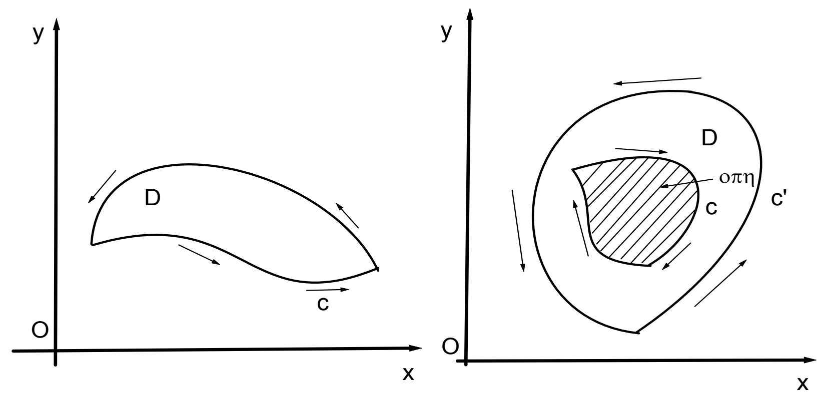
όπου l είναι το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ και επιπλέον λάβουμε υπόψη ότι

$$\mathbf{t} = \cos\tilde{\alpha}\mathbf{i} + \cos\tilde{\beta}\mathbf{j} + \cos\tilde{\gamma}\mathbf{k},$$

όπου $\cos\tilde{\alpha}$, $\cos\tilde{\beta}$, $\cos\tilde{\gamma}$ είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του διανύσματος $\mathbf{t}$ τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} I &= \int_{s=0}^{s=l} \Big(P(x(s), y(s), z(s)) \cos\tilde{\alpha} + Q(x(s), y(s), z(s)) \cos\tilde{\beta} \\ &+ R(x(s), y(s), z(s)) \cos\tilde{\gamma} \Big) \,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.32}$$

Ο παραπάνω τύπος για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους δεν είναι ιδιαίτερα εύχρηστος. Συνήθως, για την επίλυση των ασκήσεων χρησιμοποιείται μία από τις δύο εκδοχές της σχέσης (6.29).



Σχήμα 6.4: Θετική φορά διαγραφής καμπύλης που περιβάλλει έναν τόπο D. Στο δεξιό σχήμα ο τόπος περιβάλλεται από τις καμπύλες c (εσωτερικά) και c' (εξωτερικά).

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους κατά μήκος κλειστής καμπύλης

Όπως στην περίπτωση του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους έτσι και στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους μία ειδική περίπτωση είναι αυτή όπου το αρχικό και τελικό σημείο του τόξου ολοκλήρωσης ταυτίζονται δηλαδή όταν η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης c. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα συμβολίζεται ως εξής

$$I = \oint_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.33}$$

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα β′ είδους κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης, αποτελούν μία σημαντική κατηγορία ολοκληρωμάτων με πολλές εφαρμογές κυρίως στη Φυσική. Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος χαρακτηρίζει και το είδος του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$. Έτσι έχουμε τις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

1. $I = \oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 0$, **Αστρόβιλο** διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

2. $I = \oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \neq 0$, **Στροβιλό** διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$.

Φορά διαγραφής επίπεδης καμπύλης

Σε μία επίπεδη καμπύλη c (χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα θεωρούμε ότι βρίσκεται πάνω στο επίπεδο xy) η οποία περιβάλλει έναν τόπο D ορίζουμε ως **θετική φορά διαγραφής** της καμπύλης εκείνη κατά την οποία ένας άνθρωπος βαδίζοντας πάνω στην καμπύλη με το κεφάλι προς την θετική κατεύθυνση του άξονα z αφήνει τον τόπο προς τα αριστερά του (σχήμα (6.4)). Με ανάλογο τρόπο ορίζεται η θετική φορά διαγραφής επίπεδης καμπύλης η οποία βρίσκεται στο επίπεδο xz ή στο yz.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο επίπεδο xy

Θεωρούμε στο επίπεδο xy το παρακάτω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I = \int_c \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$

όπου $\mathbf{F} = P(x,y)\mathbf{i} + Q(x,y)\mathbf{j}$ και c η καμπύλη ολοκλήρωσης της οποίας η αλγεβρική παράσταση είναι $y = y(x)$. Θεωρώντας τη μεταβλητή x ως παραμέτρο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} I &= \int_{c:y(x)} P(x,y(x))\mathrm{d}x + Q(x,y(x))\mathrm{d}y \\ &= \int_{c:y(x)} \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Την παραπάνω έκφραση τη χρησιμοποιούμε συχνά για τον υπολογισμό ολοκληρω μάτων στο επίπεδο xy. Είναι προφανές ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους υπολογιστικά ισοδυναμεί με ένα απλό ολοκλήρωμα. Επιπλέον, η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους $\int_{c:y(x)} P(x,y(x))\mathrm{d}x$ συμπίπτει με αυτήν του απλού ολοκληρώματος $\int P(x,y(x))\mathrm{d}x$ αν και έχουν διαφορετική γεωμετρική σημασία. Έτσι το ολοκλήρωμα $\int_{c:y(x)} P(x,y(x))\mathrm{d}x$ αποτελεί τμήμα ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους που υπολογίζεται κατά μήκος της καμπύλης $c : y(x)$, ενώ το ολοκλήρωμα $\int P(x,y(x))\mathrm{d}x$ είναι ένα απλό ολοκλήρωμα με ολοκληρωτέα συνάρτηση την $P(x,y(x))$ και όρια που καθορίζονται από τη συνάρτηση $y(x)$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω στην περίπτωση εκείνη όπου το διπλό ολοκλήρωμα υπολογίζεται κατά μήκος τυχαίας καμπύλης στο χώρο και θεωρώντας τη μεταβλητή x ως παράμετρο, δηλαδή θα είναι $y = y(x)$ και $z = z(x)$. Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_c P(x,y(x),z(x))\mathrm{d}x + Q(x,y(x),z(x))\mathrm{d}y + R(x,y(x),z(x))\mathrm{d}z \qquad (6.35) \\ &= \int_c \left(P(x,y(x),z(x)) + Q(x,y(x),z(x))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + R(x,y(x),z(x))\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Έργο δύναμης και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους

Μία βασική εφαρμογή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους στη Φυσική είναι αυτή του υπολογισμού του έργου μιας δύναμης. Έτσι, αν θεωρήσουμε ότι ένα υλικό σημείο κινείται στον χώρο, και κατά μήκος μιας καμπύλης c, με την επίδραση της δύναμης $\mathbf{F}(x,y,z)$ τότε το έργο W που παράγει η παραπάνω δύναμη, όταν το σώμα μετατοπίζεται κατά μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ (το οποίο είναι τμήμα της καμπύλης c), υπολογίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$W = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.36}$$

Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους και απλού ολοκληρώματος

Έστω το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους της μορφής

$$I = \int_c P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

όπου c το τόξο της καμπύλης με παραμετρική παράσταση $y = y(x)$ που ενώνει τα σημεία $A(x_A, y_B)$ και $B(x_B, y_B)$. Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η $x = x(y)$ είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $y(x)$, τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_{A\longrightarrow B} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{A\longrightarrow B} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{A\longrightarrow B} Q(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{x=x_A}^{x_B} P(x,y(x))\mathrm{d}x + \int_{y=y_A}^{y_B} Q(x(y),y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό είναι φανερό ότι ο υπολογισμός ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους ανάγεται στον υπολογισμό δύο απλών ολοκληρωμάτων ως προς x και y αντίστοιχα εφόσον είναι δοσμένη η αλγεβρική μορφή του τόξου ολοκλήρωσης ($y(x)$ και $x(y)$ επίσης). Επίσης από την παραπάνω απόδειξη συμπεραίνουμε ότι είναι δυνατή και η αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή η αναγωγή ενός απλού ολοκληρώματος σε επικαμπύλιο εφόσον δίνεται η παράσταση της καμπύλης ολοκλήρωσης $y(x)$ (ή/και $x(y)$). Η παραπάνω μεθοδολογία, όπως θα δείξουμε, είναι χρήσιμη στην απόδειξη του θεωρήματος Green αλλά είναι χρήσιμη και γενικότερα για την βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους.

6.5 Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ και β′ είδους

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα α′ και β′ είδους αποτελούν εξ' ορισμού δύο διαφορετικά είδη ολοκληρωμάτων. Όπως δείξαμε η γεωμετρική σημασία του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους συνδέεται με τον υπολογισμό του εμβαδού της κυλινδρικής επιφάνειας που σχηματίζεται από την καμπύλη ολοκλήρωσης c και την καμπύλη c' όπου

$$c' :\ \mathbf{r}'(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{i} + z(x(t), y(t))\mathbf{k}.$$

Από την άλλη μία από τις εφαρμογές του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους, είναι ότι αντιστοιχεί με το έργο μιας δύναμης που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος της καμπύλης ολοκλήρωσης c. Παρότι τα δύο ολοκληρώματα έχουν εξ' ορισμού *εγγενή διαφορά* ο υπολογισμός τους ανάγεται, σε κάθε περίπτωση, στον υπολογισμό ενός απλού ολοκληρώματος.

Το παραπάνω συμπέρασμα προκύπτει αν συγκρίνουμε τον ορισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος α′ είδους, δηλαδή

$$I_\alpha = \int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s,$$

με τον τύπο για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους που προκύπτει από τη σχέση (6.30), δηλαδή

$$I_\beta = \int_{\widehat{AB}} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{t})\ \mathrm{d}s.$$

Επιπλέον έχουμε δείξει ότι ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους μπορεί να υπολογιστεί κυρίως με τους παρακάτω τρόπους

$$\begin{aligned}
I_\alpha &= \int_{s=0}^{l} f(x(s),y(s),z(s))\mathrm{d}s,\\
I_\alpha &= \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\dot{z}^2(t)}\ \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους μπορεί να υπολογιστεί, αντίστοιχα ως εξής

$$\begin{aligned}
I_\beta &= \int_{s=0}^{s=l}\Big[\,P(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\alpha} + Q(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\beta}\\
&+ R(x(s),y(s),z(s))\cos\tilde{\gamma}\,\Big]\,\mathrm{d}s,\\
I_\beta &= \int_{t_1}^{t_2}\Big[\,P(t)\dot{x}(t)+Q(t)\dot{y}(t)+R(t)\dot{z}(t)\Big]\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

6.6 Ιδιότητες του επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους

Αναφέρουμε παρακάτω, χωρίς απόδειξη, μερικές βασικές ιδιότητες των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων β′ είδους:

1. *Αν $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ είναι σταθερές και οι συναρτήσεις $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2,\cdots,\mathbf{F}_n$ είναι ολοκληρώσιμες κατά μήκος του τόξου c τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathbf{F}_i(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_c \mathbf{F}_i(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.37}$$

2. *Αν το τόξο c είναι η ένωση των διαδοχικών τόξων $c_1, c_2, \cdots, c_n$ και η συνάρτηση $\mathbf{F}$ είναι ολοκληρώσιμη κατά μήκος των τόξων αυτών, τότε ισχύει η σχέση*

$$\int_c \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_i} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.38}$$

3. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους εξαρτάται από τον προσανατολισμό του τόξου $\widehat{AB}$ της ολοκλήρωσης, δηλαδή*

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_{\widehat{BA}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.39}$$

Απόδειξη: *Θα αποδείξουμε την παραπάνω ιδιότητα χρησιμοποιώντας τη σχέση (6.26). Έτσι θα έχουμε*

$$\begin{aligned}
\tilde{I} &= \int_{\widehat{BA}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} \mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\mathbf{r}_{k+1,k} \\
&= -\lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=n-1}^{0} \mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\mathbf{r}_{k,k+1} \\
&= -\lim_{||\Delta_n||\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{F}(x_k,y_k,z_k)\cdot \Delta\mathbf{r}_{k,k+1} \\
&= -\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

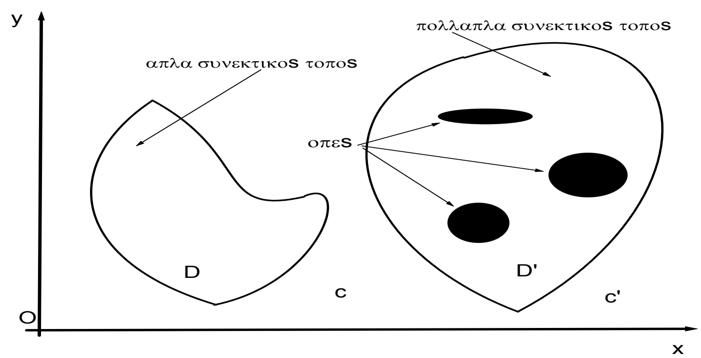
4. *Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος ενός κλειστού τόξου ολοκλήρωσης $c = \widehat{AB\Gamma A}$ είναι ανεξάρτητο της αφετηρίας ολοκλήρωσης, δηλαδή ισχύει*

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\widehat{AB\Gamma A}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_{\widehat{B\Gamma AB}} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.41}$$

5. *Αν έχουμε δύο καμπύλες c_1 και c_2 με ισοδύναμες παραμετρικές εξισώσεις τότε ισχύει*

$$\oint_{c_1} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \pm \oint_{c_2} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}, \tag{6.42}$$

όπου το πρόσημο $+$ ισχύει όταν οι καμπύλες c_1, c_2 έχουν την ίδια φορά διαγραφής και το $-$ όταν έχουν αντίθετη φορά.



Σχήμα 6.5: Απλά συνεκτικός (αριστερά) και πολλαπλά συνεκτικός τόπος (δεξιά).

6.7 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γ′ είδους

Μπορούμε να ορίσουμε και ένα τρίτο είδος επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος μιας καμπύλης c ως εξής

$$\mathbf{I} = \int_c \mathbf{F} \times \mathrm{d}\mathbf{r}. \tag{6.43}$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί και με τον ακόλουθο τρόπο

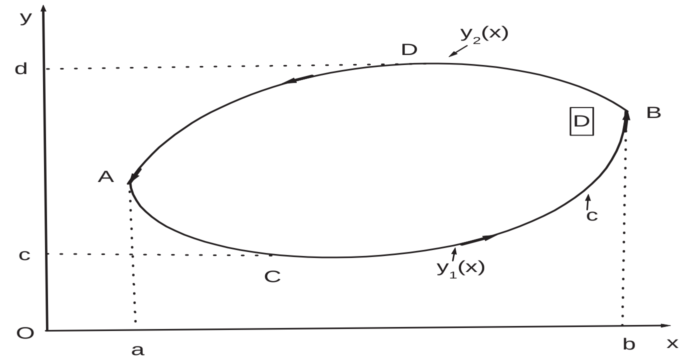
$$\mathbf{I} = \int_c \left(\mathbf{F} \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} \right) \mathrm{d}s = \int_c (\mathbf{F} \times \mathbf{t})\, \mathrm{d}s. \tag{6.44}$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γ′ είδους είναι ένα διανυσματικό μέγεθος και έχει εκτεταμένες εφαρμογές στην Φυσική και ιδιαίτερα στην Ηλεκτρομαγνητική θεωρία.

6.8 Το θεώρημα του Green

Το θεώρημα του Green είναι ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης. Το θεώρημα αυτό, το οποίο συνδέει ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης με ένα διπλό ολοκλήρωμα στο τόπο ο οποίος περικλείεται από την παραπάνω κλειστή καμπύλη, έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές στη Φυσική και επίσης το πλεονέκτημα ότι η χρήση του, διευκολύνει την επίλυση πολλών προβλημάτων. Πριν διατυπώσουμε και αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του απλά και πολλαπλά συνεκτικού τόπου οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 3. *Ένας επίπεδος τόπος D ονομάζεται* **απλά συνεκτικός** *αν κάθε κλειστή καμπύλη η οποία ανήκει στον τόπο D, μπορεί να συρρικνωθεί ώστε να γίνει σημείο χωρίς να εγκαταλείψει τον τόπο αυτόν. Αν ο τόπος D δεν είναι απλά συνεκτικός ονομάζεται* **πολλαπλά συνεκτικός**. *Πολλαπλά συνεκτικός είναι για παράδειγμα ένας*



Σχήμα 6.6: Το θεώρημα του Green σε απλά συνεκτικό τόπο.

τόπος ο οποίος περιέχει τρύπες (περιοχές για παράδειγμα όπου δεν ορίζεται ή απειρίζεται η ολοκληρωτέα συνάρτηση). Παραδείγματα απλά συνεκτικών και πολλαπλά συνεκτικών τόπων φαίνονται στο σχήμα (6.5).

Παρακάτω θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα του Green σε *απλά και πολλαπλά συνεκτικό τόπο* καθώς επίσης και σε *μη κανονικό τόπο.*

6.8.1 Το θεώρημα του Green σε απλά συνεκτικό τόπο

Θεώρημα 1. *Δίνεται ο απλά συνεκτικός τόπος D και οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ οι οποίες ορίζονται είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές πρώτες παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ στον τόπο D. Επίσης στον τόπο D θεωρούμε την ομαλή ή τμηματικά ομαλή κλειστή καμπύλη c η οποία περιβάλλει τον κανονικό τόπο D. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:*

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.45}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον τόπο D του σχήματος (6.6) ο οποίος μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : \quad a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y(x) \le y_2(x)\},$$

είτε ως:

$$D = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : \quad c \le y \le d, \quad x_1(y) \le x(y) \le x_2(y)\}.$$

Θα έχουμε τώρα:

$$\begin{aligned}\int_D\int \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=a}^{b}\left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \Big[\, P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x))\Big]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b P(x,y_2(x))\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,y_1(x))\mathrm{d}x. \qquad (6.46)\end{aligned}$$

Επειδή η συνάρτηση $y_1(x)$ παριστάνει το τόξο $\widehat{ACB}$ και αντίστοιχα η συνάρτηση $y_2(x)$ παριστάνει το τόξο $\widehat{ADB}$ τα απλά ολοκληρώματα της σχέσης (6.46) μπορούν να γραφούν ως επικαμπύλια ολοκληρώματα κατά μήκος των τόξων $\widehat{ACB}$ και $\widehat{BDA}$ αντίστοιχα και άρα θα έχουμε:

$$\int_D\int \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\widehat{BDA}} P(x,y)\mathrm{d}x - \int_{\widehat{ACB}} P(x,y)\mathrm{d}x = -\oint_c P(x,y)\mathrm{d}x. \quad (6.47)$$

Με ανάλογους υπολογισμούς τώρα θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_D\int \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{y=c}^{d}\left[\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d \Big[\, Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y)\Big]\, dy \\ &= \int_c^d Q(x_2(y),y)\mathrm{d}y - \int_c^d Q(x_1(y),y)\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d Q(x_2(y),y)\mathrm{d}y + \int_d^c Q(x_1(y),y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\widehat{CBD}} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\widehat{DAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (6.48)\end{aligned}$$

Είναι όμως προφανές ότι

$$\int_{\widehat{CBD}} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\widehat{DAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y = \oint_c Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad (6.49)$$

Δηλαδή έχουμε

$$\int_D\int \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c Q(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (6.50)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (6.47) και (6.50) λαμβάνουμε τελικά

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (6.51)$$

Θεώρημα του Green και εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

Όπως θα δείξουμε παρακάτω, με τη βοήθεια του θεωρήματος Green μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν μιας επίπεδης επιφάνειας. Συνήθως θεωρούμε ότι αυτή η επιφάνεια βρίσκεται σε ένα από τα συντεταγμένα επίπεδα xy, xz ή yz αλλά μπορεί να είναι οποιαδήποτε επίπεδη.

Θεώρημα 2. *Αν θεωρήσουμε ότι ο απλά συνεκτικός τόπος D είναι μία επίπεδη επιφάνεια του επιπέδου xy η οποία περιβάλλεται από την κλειστή καμπύλη c τότε αποδεικνύεται ότι το εμβαδόν S της παραπάνω επιφάνειας δίνεται από τον τύπο*

$$S = \frac{1}{2}\oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \tag{6.52}$$

ορισμένο κατά μήκος της καμπύλης c η οποία περιβάλλει τον απλά συνεκτικό τόπο D και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green στον τόπο αυτό θα έχουμε

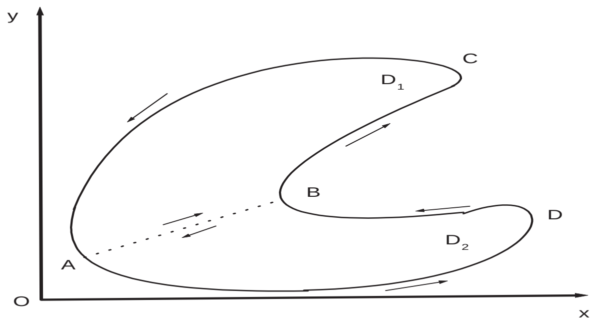
$$\begin{aligned}
&\int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \Rightarrow\\
&\int_D\int(1-(-1))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \Rightarrow\\
&S = \int_D\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_c -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Από την παραπάνω σχέση διαπιστώνουμε ότι ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επίπεδης επιφάνειας μπορεί να αναχθεί στον υπολογισμό ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος β′ είδους.

Ο υπολογισμός του εμβαδού μιας επιφάνειας μπορεί να γίνει επίσης με ένα απλούστερο τρόπο αν επιλέξουμε για παράδειγμα το διανυσματικό πεδίο να έχει τη μορφή $\mathbf{F}(x,y) = P\mathbf{i} = -y\mathbf{i}$ ή τη μορφή $\mathbf{F}(x,y) = Q\mathbf{j} = x\mathbf{j}$. Στις παραπάνω περιπτώσεις προκύπτει άμμεσα από τη σχέση (6.53) ότι το εμβαδόν της επιφάνειας θα δίνεται αντίστοιχα από τα ολοκληρώματα $S = -\oint_c y\mathrm{d}x$ και $S = \oint_c x\mathrm{d}y$.

Η παραπάνω μέθοδος μπορεί να γενικευτεί έτσι ώστε να συμπεριλάβει και την περίπτωση υπολογισμού ενός διπλού ολοκληρώματος το οποίο έχει τη μορφή $I = \int_D\int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Έτσι αν απαιτήσουμε οι συναρτήσεις $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ να ικανοποιούν τη διαφορική εξίσωση $\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right) = f(x,y)$ τότε ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος I ανάγεται στον υπολογισμό ενός επικαμπύλιου ολοκληρώματος, αφού είναι

$$I = \int_D\int f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$



Σχήμα 6.7: Το θεώρημα του Green σε μη κανονικό τόπο.

όπου c η καμπύλη η οποία περιβάλλει τον τόπο.

Το επόμενο ερώτημα είναι αν μπορούμε να γενικεύσουμε την παραπάνω μέθοδο έτσι ώστε να είναι δυνατός ο υπολογισμός εμβαδών μη επίπεδων επιφανειών. Όπως θα δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, αυτό είναι δυνατόν να γίνει χρησιμοποιώντας τη γενίκευση του θεωρήματος του Green που είναι το θεώρημα του Stokes.

6.8.2 Το θεώρημα του Green σε μη κανονικό τόπο

Το θεώρημα του Green μπορεί να επεκταθεί και σε τόπους οι οποίοι είναι μη κανονικοί, όπως για παράδειγμα ο τόπος του σχήματος (6.7). Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3. *Το θεώρημα του Green ισχύει και στην περίπτωση όπου ο τόπος ολοκλήρωσης είναι μη κανονικός.*

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα στο μη κανονικό τόπο του σχήματος (6.7). Στην περίπτωση αυτή διαμερίζουμε τον τόπο D σε δύο κανονικούς τόπους D_1 και D_2 με τη βοήθεια της γραμμής AB και εφαρμόζουμε σε καθέναν από αυτούς το θεώρημα του Green. Έτσι θα έχουμε διαδοχικά για τους τόπους D_1 και D_2

$$\int_{ABCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{D_1}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{6.54}$$

$$\int_{ADBA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{D_2}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{6.55}$$

Αν προσθέσουμε τα αριστερά μέλη των παραπάνω σχέσεων θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_L &= \int_{ABCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{ADBA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BCA} P\mathrm{d}x \qquad (6.56) \\ &+ Q\mathrm{d}y + \int_{ADB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{BCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{ADB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{ADBCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

όπου λάβαμε υπόψη ότι

$$\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\int_{BA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \qquad (6.57)$$

Επιπλέον, προσθέτοντας τα δεξιά μέλη θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_R &= \int_{D_1}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{D_2}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{D}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (6.58) \end{aligned}$$

Συνολικά από τις σχέσεις (6.56) και (6.58) θα έχουμε τελικά

$$\oint_{ADBCA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{D}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (6.59)$$

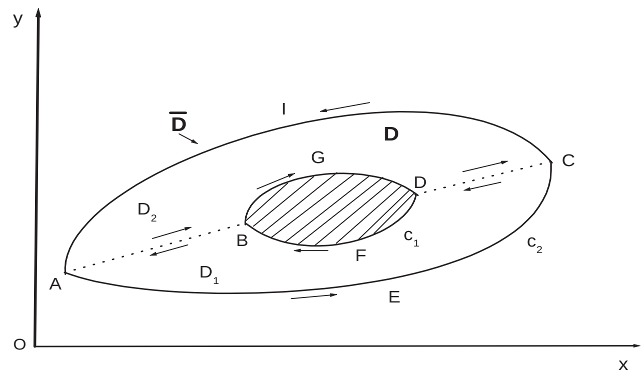
6.8.3 Το θεώρημα του Green σε πολλαπλά συνεκτικό τόπο

Η εφαρμογή του θεωρήματος του Green στην περίπτωση των πολλαπλά συνεκτικών τόπων είναι εξαιρετικής σημασίας. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 4. *Δίνεται ο πολλαπλά συνεκτικός τόπος $\bar{D}$ ο οποίος περιβάλλεται από την καμπύλη c_2 και περιέχει μία τρύπα η οποία περιβάλλεται από την καμπύλη c_1 (σχήμα (6.8)) και έστω D ο τόπος ο οποίος περικλείεται από τις δύο παραπάνω καμπύλες. Έστω επίσης οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ οι οποίες ορίζονται είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές πρώτες παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ στον τόπο D. Τότε ισχύει*

$$\int_{D}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{c_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{c_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε τον πολλαπλά συνεκτικό τόπο $\bar{D}$ όπως φαίνεται στο σχήμα



Σχήμα 6.8: Το θεώρημα του Green σε πολλαπλά συνεκτικό τόπο.

(6.8). Ο τόπος $\bar{D}$ περιέχει μία τρύπα η οποία περιβάλλεται από την ομαλή κλειστή καμπύλη c_1 και έστω c_2 η ομαλή καμπύλη η οποία περιβάλλει τον τόπο $\bar{D}$. Ο τύπος του Green δεν ισχύει στον τόπο $\bar{D}$ αλλά ισχύει στη λουρίδα η οποία περιβάλλεται από τις καμπύλες c_1 και c_2, δηλαδή στον τόπο D. Φέρνουμε τώρα τις γραμμές AB και DC και με αυτό τον τρόπο χωρίζουμε τον τόπο D στους δύο απλά συνεκτικούς τόπους D_1 και D_2. Έτσι θα έχουμε

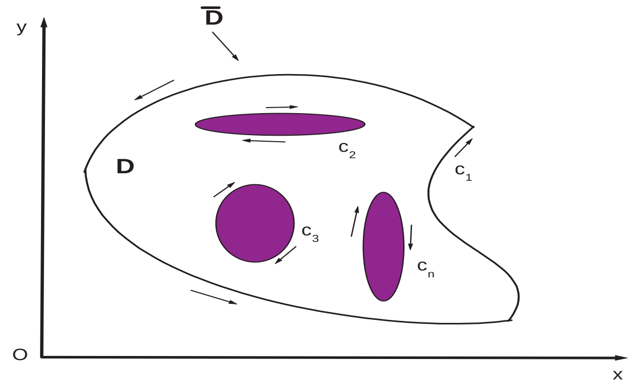
$$\begin{aligned} I &= \int_D\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{D_1}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{D_2}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.60}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green στους τόπους D_1 και D_2 οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{D_1}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{AECDFBA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AEC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{CD}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &+ \int_{DFB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{6.61}$$

και

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{D_2}\int\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{ABGDCIA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{BGD}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \\ &+ \int_{DC}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{CIA}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.62}$$



Σχήμα 6.9: Το θεώρημα του Green σε πολλαπλά συνεκτικό τόπο ο οποίος περιέχει περισσότερες από μία τρύπες.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (6.60) θα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{AECIA} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{BGDFB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \oint_{c_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{c_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \end{aligned} \quad (6.63)$$

Στη σχέση (6.63) οι καμπύλες διαγράφονται κατά την συμβατικά θετική φορά. Το παραπάνω θεώρημα μπορεί εύκολα να γενικευτεί στην περίπτωση όπου ο τόπος περιέχει περισσότερες από μία τρύπες, όπως φαίνεται στο σχήμα (6.9), και να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 5. *Έστω ο πολλαπλά συνεκτικός τόπο $\bar{D}$ ο οποίος περιβάλλεται από την καμπύλη c_1 και περιέχει τις τρύπες $2, 3, \ldots, n$ οι οποίες περιβάλλονται από τις κλειστές καμπύλες $c_2, c_3, \ldots, c_n$ αντίστοιχα. Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται στον υποτόπο D του $\bar{D}$, ο οποίος δεν περιέχει τρύπες και ισχύει:*

$$\begin{aligned} I &= \int_D\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (6.64) \\ &= \oint_{c_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \oint_{c_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \cdots + \oint_{c_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Μία ειδική περίπτωση: $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Μία σημαντική εφαρμογή του θεωρήματος Green, στην περίπτωση των πολλαπλά συνεκτικών τόπων (που περιέχουν μία τρύπα), είναι η περίπτωση κατά την οποία ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Στην παραπάνω περίπτωση από τη σχέση (6.63) θα έχουμε

$$\oint_{c_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = -\oint_{c_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{\bar{c}_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{6.65}$$

όπου η καμπύλη $\bar{c}_1$ ταυτίζεται με την c_1 αλλά έχει αντίθετη φορά διαγραφής και συνεπώς την ίδια με την καμπύλη c_2. Μπορούμε να διατυπώσουμε τώρα το σχετικό θεώρημα:

Θεώρημα 6. *Έστω ο διπλά συνεκτικός τόπος D ο οποίος περιέχει μία τρύπα και έστω ότι στον παραπάνω τόπο ισχύει η σχέση $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος κλειστής καμπύλης που περιβάλλει την τρύπα, είναι ίση με την τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής καμπύλης που περιβάλλει την ίδια τρύπα.*

Το παραπάνω θεώρημα διευκολύνει σημαντικά υπολογισμούς επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων κατά μήκος πολύπλοκων καμπυλών οι οποίες περιβάλλουν μία ή και περισσότερες τρύπες. Και αυτό γιατί επιτρέπει την ελευθερία επιλογής καμπύλης για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.

Μπορούμε να συνοψίσουμε τις δυνατές εκείνες περιπτώσεις οι οποίες εμφανίζονται στον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων κατά μήκος κλειστών καμπυλών ως εξής:

1. Αν ο τόπος ολοκλήρωσης D είναι **απλά συνεκτικός** τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε απλά τον τύπο του Green.

2. Αν ο τόπος ολοκλήρωσης είναι **πολλαπλά συνεκτικός (με μία τρύπα) και ισχύει** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ τότε μπορούμε να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα επιλέγοντας οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που περιβάλλει την τρύπα.

3. Αν ο τόπος ολοκλήρωσης είναι **πολλαπλά συνεκτικός (με μία τρύπα) και ισχύει** $\dfrac{\partial Q}{\partial x} \neq \dfrac{\partial P}{\partial y}$ τότε το ολοκλήρωμα πρέπει αναγκαστικά να υπολογιστεί κατά μήκος της δοσμένης καμπύλης.

Το θεώρημα 6 μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση που ο τόπος D είναι πολλαπλά συνεκτικός και περιέχει περισσότερες από μία τρύπες. Στην περίπτωση αυτή το αντίστοιχο θεώρημα, που είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 5, διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 7. *Έστω ο πολλαπλά συνεκτικός τόπος D ο οποίος περιέχει περισσότερες από μία τρύπες και έστω ότι στον παραπάνω τόπο ισχύει η σχέση $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Στην περίπτωση αυτή η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος κατά μήκος κλειστής καμπύλης που περιβάλλει τις τρύπες είναι ίση με το άθροισμα των κλειστών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων που περιβάλουν κάθε μία τρύπα.*

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα και θεωρώντας την περίπτωση του σχήματος

(6.9) θα έχουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned}\oint_{c_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= -\oint_{c_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \cdots - \oint_{c_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \oint_{\bar{c}_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \cdots + \oint_{\bar{c}_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.66}$$

Το παραπάνω θεώρημα έχει πολύ σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία της ολοκλήρωσης μιγαδικών συναρτήσεων στο μιγαδικό επίπεδο (θεώρημα Cauchy).

6.9 Αστρόβιλο πεδίο και δυναμική συνάρτηση

Μία ιδιαίτερη εφαρμογή των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων β′ είδους είναι αυτή όπου η τιμή που λαμβάνει το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητη της καμπύλης ολοκλήρωσης και εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο της ολοκλήρωσης. Τέτοιες περιπτώσεις ολοκληρωμάτων εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα Φυσικής. Θα μελετήσουμε αναλυτικά την παραπάνω περίπτωση ξεκινώντας με την διατύπωση του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 8. *Αν οι συναρτήσεις $P(x, y)$ και $Q(x, y)$ οι οποίες είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, στον απλά συνεκτικό τόπο D τότε οι παρακάτω τέσσερις συνθήκες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους (αυτό σημαίνει ότι αν ισχύει η μια συνθήκη τότε ισχύουν και οι υπόλοιπες):*

1. *Το ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης c η οποία ανήκει στον τόπο D είναι μηδέν, δηλαδή ισχύει:*

$$\oint_c P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0. \tag{6.67}$$

2. *Έστω τα σημεία A και B που ανήκουν στον τόπο D. Το ολοκλήρωμα*

$$\int_{A(c)}^{B} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{6.68}$$

είναι ανεξάρτητο από την καμπύλη ολοκλήρωσης c που συνδέει τα σημεία A και B.

3. *Η παράσταση $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ είναι ολικό διαφορικό μιας μονότιμης συνάρτησης $U(x, y)$ η οποία ορίζεται στον D, δηλαδή ισχύει*

$$\mathrm{d}U = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

4. Η συνθήκη

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{6.69}$$