Μέρος Πρώτο

Απαντήσεις Θεμάτων Σκέψης

Μορφες Ενεργειας

Θεμα Θ-15

Διατύπωση: *Χρησιμοποιώντας τη διαφορική έκφραση του στατικότροπου έργου μετατόπισης κλειστού συστήματος, να αποδειχθεί ότι το έργο δεν αποτελεί θερμοδυναμική ιδιότητα.*

Απάντηση: Υποθέτουμε ότι το έργο είναι ιδιότητα, τότε η μαθηματική έκφραση:

$$dw = pdV + (0)dp \tag{1}$$

πρέπει να είναι τέλειο διαφορικό. Αν η υπόθεση αυτή είναι σωστή, πρέπει να ισχύει το θεώρημα Euler, [Εξ. (1-44)], με τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_v = \left(\frac{\partial (0)}{\partial v}\right)_p \tag{2}$$

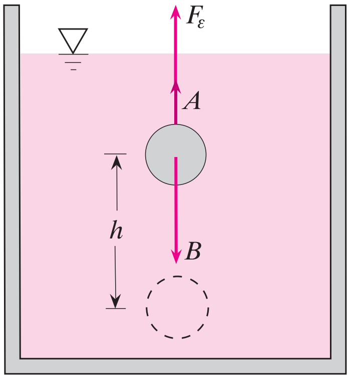
Η μερική παράγωγος $(\partial p/\partial p)_v = 1$ και η παράγωγος $[\partial(0)/\partial v]_p = 0$, συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη (και κατ΄ επέκταση η αρχική υπόθεση) δεν ισχύει. Άρα, *το έργο δεν είναι θερμοδυναμική ιδιότητα, αλλά μη καταστατικό μέγεθος.*

Θεμα Θ-16

Διατύπωση: *Μια κοίλη μεταλλική σφαίρα κρέμεται από ένα καλώδιο, βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους γ (βλ. Σχήμα Θ-16). Η σφαίρα έχει μάζα m και όγκο V. Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για την ανύψωση της σφαίρας, μέσα στο υγρό, σε απόσταση h από την αρχική θέση. Η ανύψωση της σφαίρας είναι πολύ αργή και οι δυνάμεις τριβής αμελητέες.*

Απάντηση: Στην κινούμενη κοίλη σφαίρα κάθε στιγμή, ασκούνται τρεις κατακόρυφες δυνάμεις: (i) η *δύναμη ανύψωσης* F_ε, (ii) η *άνωση* $A = \gamma V$ και (iii) το *βάρος* $B = mg$ (βλ. Σχήμα Θ-16). Επειδή η ανύψωση της σφαίρας μέσα στο υγρό γίνεται με σταθερή ταχύτητα, η συνισταμένη αυτών των τριών δυνάμεων (F_ε, A και B) είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$F_\varepsilon + A - B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_\varepsilon = B - A = mg - \gamma V \qquad (1)$$



Σχήμα Θ-16

Το έργο W που απαιτείται για την ανύψωση της σφαίρας, μέσα στο υγρό, σε απόσταση h από την αρχική της θέση υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^h F_\varepsilon dx = \int_0^h (mg - \gamma V)dx \quad \Rightarrow \quad W = (mg - \gamma V)h \qquad (2)$$

Θεμα Θ-17

Διατύπωση: *Ένα κλειστό σύστημα υφίσταται την κυκλική διεργασία που φαίνεται στο Σχήμα Θ-17. Το καθαρό έργο που εκτελείται από το σύστημα κατά τη διάρκεια 5 κύκλων είναι 40 kJ. Πόσο είναι το έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2;*

Απάντηση: Πρώτα βρίσκουμε το έργο που εκτελείται από το σύστημα ανά κύκλο:

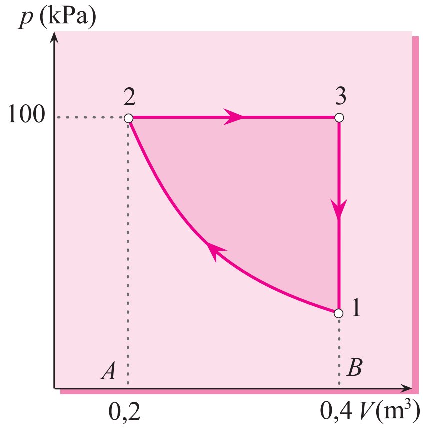
$$W_c = W_t / N = (40\,\text{kJ})/(5\,\text{cycles}) \quad \Rightarrow \quad W_c = 8\,\text{kJ/cycle} \qquad (1)$$

Το έργο W_c είναι ίσο με το άθροισμα των έργων που εκτελούνται κατά τη διάρκεια των επιμέρους διεργασιών του κύκλου (1-2, 2-3 και 3-1):

$$W_c = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-1} \qquad (2)$$

Επειδή οι τρεις διεργασίες (1-2, 2-3 και 3-1) που συνιστούν τον κύκλο παριστάνονται με *συνεχή* γραμμή στο διάγραμμα p-V του Σχήματος Θ-17, συμπεραίνουμε ότι είναι *στατικότροπες*. Το έργο $W_{3\text{-}1} = 0$, καθώς η διεργασία 3-1 είναι *ισόχωρη*. Το έργο $W_{2\text{-}3}$ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A-2-3-B κάτω από την ευθεία που παριστάνει την ισοβαρή διεργασία 2-3. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} W_{2-3} &= p_2(V_3 - V_2) \\ &= (100\,\text{kPa})[(0{,}4 - 0{,}2)\,\text{m}^3] \Rightarrow W_{2-3} = 20\,\text{kJ} \end{aligned} \qquad (3)$$



Σχήμα Θ-17

Το έργο $W_{1\text{-}2}$ υπολογίζεται έμμεσα από την εξίσωση (2):

$$W_{1-2} = W_c - W_{2-3} - W_{3-1} = [(8) - (20) - (0)]\,\text{kJ} \quad \Rightarrow \quad W_{1-2} = -12\,\text{kJ} \qquad (4)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει *κατανάλωση* έργου, αφού κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 ο όγκος του συστήματος μειώνεται από 0,4 m³ σε 0,2 m³.

ΘΕΜΑ Θ-18

Διατύπωση: *Να παρασταθεί γραφικά το έργο που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελαστικού ελατηρίου από αρχικό μήκος l_1 σε l_2. Το μήκος του μη παραμορφωμένου ελατηρίου είναι $l_0 < l_1$.*

Απάντηση: Έστω F η δύναμη που ασκείται στο άκρο του ελατηρίου και x η επιμήκυνση αυτού. Επειδή το ελατήριο είναι ελαστικό, ισχύει ο *νόμος Hook*, σύμφωνα με τον οποίο, η δύναμη F είναι ανάλογη προς την επιμήκυνση x και τη σταθερά k του ελατηρίου:

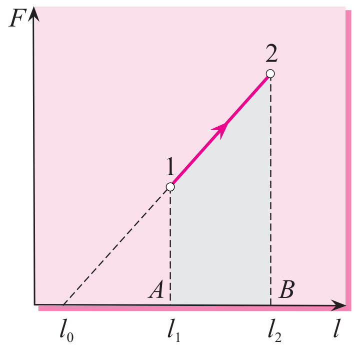
$$F = kx = k(l - l_0) \qquad (1)$$

όπου l είναι το μήκος του παραμορφωμένου ελατηρίου. Το έργο που απαιτείται για την επιμήκυνση του ελατηρίου από το αρχικό μήκος l_1 στο τελικό μήκος l_2 υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W_{1-2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 (-kx)dx = \int_1^2 (-k)(l - l_0)d(l - l_0) \qquad (2)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι απαραίτητο, επειδή το έργο εκτελείται *από* το περιβάλλον *στο* ελατήριο (σύστημα) όταν το dx είναι θετικό. Από την εκτέλεση της παραπάνω ολοκλήρωσης, προκύπτει:

$$W_{1-2} = \tfrac{1}{2}k\left[(l_1 - l_0)^2 - (l_2 - l_0)^2\right] \;\Rightarrow\; W_{1-2} = \tfrac{1}{2}k\left(x_1^2 - x_2^2\right) \qquad (3)$$



Σχήμα Θ-18

Το έργο $|W_{1\text{-}2}|$ παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα F-l του Σχήματος Θ-18 από το εμβαδόν της επιφάνειας Α-1-2-Β κάτω από την ευθεία 1-2.

ΘΕΜΑ Θ-19

Διατύπωση: *Να ευρεθεί η έκφραση του έργου που εκτελείται κατά τον σχηματισμό της επιφάνειας μιας σφαιρικής φυσαλίδας, διαμέτρου d, από διάλυμα σαπουνιού. Η διεργασία σχηματισμού της φυσαλίδας είναι ισόθερμη και στατικότροπη.*

Απάντηση: Το στοιχειώδες έργο που απαιτείται για της αύξηση της επιφάνειας της φυσαλίδας κατά dA δίνεται από την εξίσωση:

$$\delta W = -\sigma dA \qquad (1)$$

όπου σ είναι η επιφανειακή τάση του υγρού, η οποία για ισόθερμη διεργασία είναι σταθερή. Έτσι, το έργο που απαιτείται για τον σχηματισμό σφαιρικής φυσαλίδας με αρχική επιφάνεια $A_1 = 0$ και τελική επιφάνεια A_2 είναι:

$$W_{1-2} = -\int_1^2 \sigma dA = -\sigma(A_2 - A_1) \;\Rightarrow\; W_{1-2} = -\sigma A_2 \qquad (2)$$

Η υγρή μεμβράνη της φυσαλίδας αποτελείται από δύο σφαιρικές επιφάνειες μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα λεπτό στρώμα υγρού πεπερασμένου πάχους. Επομένως, η τελική επιφάνεια της φυσαλίδας είναι $A_2 = 2(4\pi R^2) = 2d^2$, οπότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$W_{1-2} = -2\pi\sigma d^2 \qquad (3)$$

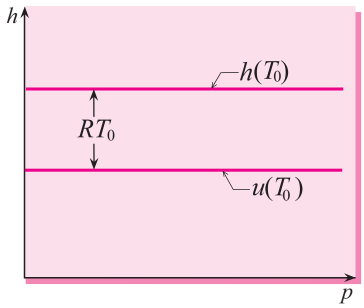
Να σημειωθεί ότι το έργο $W_{1\text{-}2}$, που απαιτείται για τον σχηματισμό της σφαιρικής επιφάνειας A_2, δεν εξαρτάται από το μέσο διαστολής (αέρας ή ατμός) που υπάρχει στο εσωτερικό της φυσαλίδας.

Θεμα Θ-20

Διατύπωση: *Να σχεδιαστεί μια ισενθαλπική γραμμή και η αντίστοιχη γραμμή σταθερής εσωτερικής ενέργειας για ιδανικό αέριο σταθερής θερμοκρασίας T_0 σε κοινό διάγραμμα h-p.*

Απάντηση: Η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου εξαρτώνται *μόνο* από τη θερμοκρασία. Επομένως, επειδή $h \neq f(p)$ και $u \neq f(p)$, η ισενθαλπική γραμμή και η αντίστοιχη γραμμή σταθερής εσωτερικής ενέργειας για ιδανικό αέριο, σταθερής θερμοκρασίας T_0, θα παριστάνονται στο διάγραμμα *h-p* του Σχήματος Θ-20 με δύο ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της πίεσης. Η απόσταση μεταξύ των δύο γραμμών είναι ίση με RT_0, όπου R είναι η ειδική σταθερά του αερίου, όπως προκύπτει από την εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού της ενθαλπίας, $h = u + pv$, για ιδανικό αέριο:

$$h - u = pv = RT_0 \qquad (1)$$



Σχήμα Θ-20

Θεμα Θ-21

Διατύπωση: *Για την εύρεση των τιμών της εσωτερικής ενέργειας u και της ενθαλπίας h μιας καθαρής χημικής ουσίας, μπορεί να επιλεγεί η ίδια κατάσταση αναφοράς (π.χ. το τριπλό σημείο της ουσίας);*

Απάντηση: Επειδή η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια είναι εξαρτημένες μεταβλητές, καθώς συνδέονται με τη σχέση $h = u + pv$, δεν είναι δυνατόν να επιλεγεί η ίδια κατάσταση αναφοράς και για τις δύο ιδιότητες. Για παράδειγμα, στους πίνακες ιδιοτήτων νερού, η ειδική εσωτερική ενέργεια για κορεσμένο υγρό θεωρείται ότι είναι μηδέν στο *τριπλό σημείο* (p_t = 0,6113 kPa, v_t = 0,001 m³/kg). Για την ίδια κατάσταση αναφοράς, η ειδική ενθαλπία του κορεσμένου υγρού είναι:

$$h_{l,t} = u_{l,t} + p_t v_t = (0) + (0{,}6113)(0{,}001) \quad \Rightarrow \quad h_{l,t} = 6{,}113\times10^{-4}\ \text{kJ/kg} \qquad (1)$$

Μέρος Δεύτερο

Υποδειγματικές Λύσεις Προβλημάτων

Μορφες Ενεργειας

Προβλημα Α-19

Διατύπωση: *Ένας κύβος πάγου θερμοκρασίας 0 °C τήκεται σε περιβάλλον πίεσης 100 kPa. Η ακμή του πάγου είναι 10 cm. Η πυκνότητα του πάγου στους 0 °C είναι 915 kg/m³ και του νερού 1000 kg/m³. Να υπολογιστεί το εκτελούμενο έργο κατά τη διάρκεια της διεργασίας τήξης του πάγου.*

Λύση: Εδώ έχουμε την περίπτωση ενός *κλειστού* συστήματος που υφίσταται μια *στατικότροπη* διεργασία εκτόνωσης, λόγω της βραδείας τήξης του πάγου. Έτσι, το εκτελούμενο έργο κατά την *ισοβαρή* μετατροπή του πάγου (1) σε υγρό νερό (2) υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W = \int_1^2 p dV = \int_1^2 p_b dV \quad \Rightarrow \quad W = p_b(V_2 - V_1) \tag{1}$$

όπου p_b = 100 kPa. Ο αρχικός όγκος του πάγου είναι:

$$V_1 = a^3 = (0{,}10\ \text{m})^3 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0{,}001\ \text{m}^3 \tag{2}$$

Κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2, η μάζα του συστήματος διατηρείται σταθερή, δηλαδή $m_1 = m_2$ ή $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, αφού οι πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 είναι σταθερές. Επομένως, ο όγκος V_2 του νερού που προέρχεται από την τήξη του πάγου είναι:

$$V_2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) V_1 = \left(\frac{915}{1000}\right)(0{,}001\ \text{m}^3) \quad \Rightarrow \quad V_2 = 9{,}15 \times 10^{-3}\ \text{m}^3 \tag{3}$$

Άρα, το εκτελούμενο έργο κατά την ισοβαρή διεργασία 1-2 είναι:

$$W = (100 \times 10^{-3}\ \text{Pa})[(0{,}915 - 1{,}0) \times 10^{-3}\ \text{m}^3] \quad \Rightarrow \quad W = -8{,}5\ \text{J} \tag{4}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει κατανάλωση έργου.

Προβλημα Α-20

Διατύπωση: *Σε μια διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου περιέχονται 0,25 m³ υδρατμού, πίεσης 50 kPa και θερμοκρασίας 100 °C. Ο ατμός συμπιέζεται στατικότροπα, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία, μέχρι τελικό όγκο 0,05 m³.*

α *Να σχεδιαστεί η διεργασία στο διάγραμμα p-v.*

β *Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για τη συμπίεση του αερίου.*

Λύση: α Ας δούμε πρώτα ποιά είναι η αρχική κατάσταση (1) του συστήματος. Από τον Πίνακα **Σ**10-1Β βρίσκεται ότι για p_1 = 50 kPa η αντίστοιχη θερμοκρασία κορεσμού του νερού είναι $T_{s,1}$ = 81,35 °C. Επειδή T_1 = 100 °C > $T_{s,1}$, συμπεραίνουμε ότι το νερό στην κατάσταση (p_1, T_1) είναι *υπέρθερμος ατμός*. Επομένως, η τιμή του ειδικού όγκου του ατμού βρίσκεται από τον Πίνακα **Σ**10-1Γ για το ζεύγος (50 kPa, 100 °C) και είναι v_1 = 3,41833 m³/kg. Από τις γνωστές τιμές του ολικού και του ειδικού όγκου στην κατάσταση 1, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα m του συστήματος που περιέχεται στη διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου:

$$m = \frac{V_1}{v_1} = \frac{0{,}25\ \text{m}^3}{3{,}41833\ \text{m}^3/\text{kg}} \quad \Rightarrow \quad m = 7{,}314\times10^{-2}\ \text{kg} \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Γνωρίζοντας τώρα τη μάζα m και τον ολικό όγκο V_2 του νερού στην τελική κατάσταση (2), υπολογίζουμε τον ειδικό όγκο v_2 του συστήματος:

$$v_2 = \frac{V_2}{m} = \frac{0{,}05\ \text{m}^3}{7{,}314\times10^{-2}\ \text{kg}} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 0{,}6836\ \text{m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

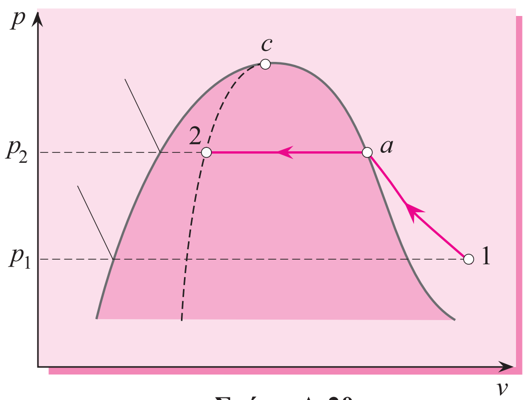
Στη συνέχεια, από τον Πίνακα **Σ**10-1Α, βρίσκεται ότι για θερμοκρασία T_2 = 100 °C οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού είναι:

$$v_{l,2} = 0{,}001044\ \text{m}^3/\text{kg} \qquad v_{g,2} = 1{,}6730\ \text{m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Επειδή $v_{l,2} < v_2 < v_{g,2}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην τελική κατάσταση (p_2, T_2) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_2 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_2 = \frac{v_2 - v_{l,2}}{v_{g,2} - v_{l,2}} = \frac{0{,}6836 - 0{,}001044}{1{,}6370 - 0{,}001044} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}408 \qquad (\alpha\text{-}4)$$

Επομένως, η ισόθερμη διεργασία συμπίεσης του υδρατμού, ως στατικότροπη, παριστάνεται στο διάγραμμα *p-v* του Σχήματος Α-20 με τη συνεχή γραμμή 1-*α*-2.



Σχήμα Α-20

β Το έργο $W_{1\text{-}2}$ που απαιτείται για τη συμπίεση του συστήματος από την αρχική στην τελική κατάσταση είναι ίσο με το άθροισμα των έργων $W_{1\text{-}\alpha}$ και $W_{\alpha\text{-}2}$ που εκτελούνται κατά τις επιμέρους διεργασίες 1-*α* και *α*-2:

$$W_{1-2} = W_{1-\alpha} + W_{\alpha-2} \qquad (\beta\text{-}1)$$

όπου στην κατάσταση *α* το σύστημα είναι κορεσμένος ατμός θερμοκρασίας 100 °C και πίεσης 100,325 kPa, που είναι η πίεση κορεσμού η οποία αντιστοιχεί σε αυτή τη θερμοκρασία. Κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-α, το νερό είναι σε κατάσταση ατμού, για τον οποίο δεχόμαστε ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, λόγω της χαμηλής πίεσης. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη ότι η διεργασία 1-α είναι στατικότροπη και ισόθερμη, το έργο $W_{1\text{-}\alpha}$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_{1-\alpha} = \int_1^\alpha pdV = mRT_1\int_1^\alpha \frac{dV}{V} = p_1V_1\ln\frac{V_\alpha}{V_1} \quad\Rightarrow\quad W_{1-\alpha} = p_1V_1\ln\frac{v_\alpha}{v_1} \qquad (\beta\text{-}2)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (β-2), προκύπτει:

$$W_{1-\alpha} = (50\text{ kPa})(0{,}25\text{ m}^3)\ln(1{,}6730/3{,}41833) \quad\Rightarrow\quad W_{1-\alpha} = -8{,}93\text{ kJ} \qquad (\beta\text{-}3)$$

Σε ότι αφορά στη διεργασία α-2, αυτή είναι στατικότροπη και ισοβαρής, συνεπώς, το έργο $W_{\alpha\text{-}2}$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_{\alpha-2} = \int_\alpha^2 pdV = \int_\alpha^2 p_{s,T_1}dV = p_{s,T_1}(V_2 - V_\alpha) \quad\Rightarrow\quad W_{\alpha-2} = p_{s,T_1}(V_2 - mv_\alpha) \qquad (\beta\text{-}4)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει:

$$W_{\alpha-2} = (101{,}325)[(0{,}05) - (0{,}07312)(1{,}6730)]\,\text{kPa}\cdot\text{m}^3 \quad\Rightarrow\quad W_{\alpha-2} = -7{,}33\text{ kJ} \qquad (\beta\text{-}5)$$

Άρα το εκτελούμενο ολικό έργο κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 είναι:

$$W_{1-2} = (-8{,}93\text{ kJ}) + (-7{,}33\text{ kJ}) \quad\Rightarrow\quad W_{1-2} = -16{,}3\text{ kJ} \qquad (\beta\text{-}6)$$

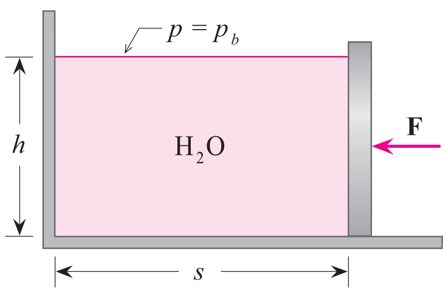
Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει *κατανάλωση* έργου.

Πρόβλημα Α-21

Διατύπωση: *Θεωρούμε τη διάταξη της ανοικτής ορθογωνικής δεξαμενής-εμβόλου που φαίνεται στο Σχήμα Α-21. Η δεξαμενή έχει αρχικό μήκος $s_1 = 1$ m, πλάτος $b = 1$ m και περιέχει νερό (20 °C) μέχρι ύψος $h_1 = 0{,}45$ m. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_b = 100$ kPa. Το έμβολο μετατοπίζεται αργά, χωρίς τριβές, έως ότου το μήκος της δεξαμενής γίνει $s_2 = 1{,}25$ m. Να υπολογιστεί το έργο που εκτελείται: **(α)** από το νερό στο έμβολο και **(β)** από την ατμόσφαιρα στο νερό.*

Λύση: α Η κατανομή της πίεσης στο νερό που περιέχεται στη δεξαμενή είναι *γραμμική*, με ακραίες τιμές $p_{h=0} = p_b$ και $p_h = p_b + \gamma h$. Η μέση πίεση p_m που ασκείται από το νερό στο έμβολο είναι:

$$p_m = \frac{1}{2}(p_{h=0} + p_h) \quad\Rightarrow\quad p_m = p_b + \frac{1}{2}\gamma h \qquad (\alpha\text{-}1)$$



Σχήμα Α-21

Επειδή η μετατόπιση του εμβόλου γίνεται αργά, χωρίς τριβές, η συγκεκριμένη διεργασία μπορεί να θεωρηθεί στατικότροπη. Επομένως, το έργο $W_{w\text{-}\varepsilon}$ που εκτελείται *από* το νερό (w) *στο* έμβολο (ε) είναι:

$$W_{w-\varepsilon} = \int_1^2 F_p\,ds = \int_1^2 p_mA\,ds = \int_1^2 (p_b + \frac{1}{2}\gamma h)(bh)ds \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Κατά τη μετατόπιση του εμβόλου ο όγκος του νερού παραμένει ο ίδιος, συνεπώς, το γινόμενο *hs* είναι σταθερό, όπου *s* είναι τυχαίο μήκος της δεξαμενής και *h* το αντίστοιχο βάθος του νερού. Δηλαδή:

$$hs = h_1 s_1 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{h_1 s_1}{s} \tag{α-3}$$

Λόγω αυτής της έκφρασης του βάθους *h*, η εξίσωση (α-2) τροποποιείται ως εξής:

$$W_{w-\varepsilon} = \int_1^2 \left[p_b + \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{h_1 s_1}{s}\right)\right]\left[b\left(\frac{h_1 s_1}{s}\right)\right] ds = A + B \tag{α-4}$$

Οι ενεργειακοί όροι *A* και *B* έχουν τις παρακάτω εκφράσεις:

$$A = p_b b h_1 s_1 \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right) \tag{α-5}$$

$$B = b\gamma h_1 s_1 \ln\left(\frac{1}{s_1^3} - \frac{1}{s_2^3}\right) \tag{α-6}$$

Από τις εξισώσεις (α-5) και (α-6), για $b = 1$ m, $h_1 = 0{,}45$ m, $s_1 = 1$ m, $s_2 = 1{,}25$ m, $p_b = 100$ kPa και $\gamma = 9{,}79$ kN/m^3, προκύπτουν οι τιμές: $A = 10$ kJ και $B = 1$ kJ. Επομένως, το εκτελούμενο έργο από το νερό στο έμβολο είναι 11 kJ.

β Το έργο που εκτελείται *από* την ατμόσφαιρα (*α*) *στο* νερό (*w*) είναι:

$$W_{\alpha-w} = \int_1^2 p_b\, dV = \int_1^2 p_b A\, dh = \int_1^2 p_b (bs)\, dh \tag{β-1}$$

Αν λάβουμε υπόψη τη σχέση (α-3), η εξίσωση (β-1) γράφεται ως εξής:

$$W_{\alpha-w} = \int_1^2 p_b b\left(\frac{h_1 s_1}{h}\right) dh = p_b b h_1 s_1 \ln\left(\frac{h_2}{h_1}\right) \tag{β-2}$$

Το βάθος h_2 του νερού στη δεξαμενή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h_2 = \frac{h_1 s_1}{s_2} = \frac{(0{,}45\ \text{m})(1{,}0\ \text{m})}{1{,}25\ \text{m}} \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0{,}36\ \text{m} \tag{β-3}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (β-2), προκύπτει:

$$W_{\alpha\to w} = (100\ \text{kPa})(1\ \text{m})(0{,}45\ \text{m})(1\ \text{m})\ln\left(\frac{0{,}36}{0{,}45}\right) \quad \Rightarrow \quad W_{\alpha\to w} = -10\ \text{kJ} \tag{β-4}$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι το έργο μεταφέρεται *από* την ατμόσφαιρα *στο* νερό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α-22

Διατύπωση: *Θεωρούμε ως σύστημα 0,5 kmol αζώτου, θερμοκρασίας 25 °C και όγκου 4 m^3. Το σύστημα συμπιέζεται στατικότροπα μέχρι τελικό όγκο 2 m^3, υπό σταθερή θερμοκρασία. Να υπολογιστεί το απαιτούμενο έργο για τη συμπίεση του συστήματος, αν το άζωτο ακολουθεί:*

α *Τη δυναμική ΚΕ περικομμένη στους τρεις πρώτους όρους της.*

β *Την καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου.*

Λύση: α Η θεωρούμενη δυναμική ΚΕ μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$z = \frac{p\bar{v}}{\bar{R}T} = 1 + \frac{B}{\bar{v}} + \frac{C}{\bar{v}^2} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\bar{R}T}{\bar{v}}\left(1 + \frac{B}{\bar{v}} + \frac{C}{\bar{v}^2}\right) \tag{α-1}$$

Έστω 1 η αρχική και 2 η τελική κατάσταση του συστήματος. Η διεργασία συμπίεσης 1-2 του N_2 είναι στατικότροπη και ισόθερμη. Το εκτελούμενο έργο W κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 είναι:

$$W = \int_1^2 pdV = n\int_1^2 pd\bar{v} = n\bar{R}T\int_1^2\left(\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}^2} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}^3}\right) \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Μετά την εκτέλεση της παραπάνω ολοκλήρωσης, προκύπτει:

$$W = n\bar{R}T\left[\ln\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} + B\left(\frac{1}{\bar{v}_2} - \frac{1}{\bar{v}_1}\right) - \frac{C}{2}\left(\frac{1}{\bar{v}_2^{\,2}} - \frac{1}{\bar{v}_1^{\,2}}\right)\right] \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Οι γραμμομοριακοί όγκοι $\bar{v}_1$ και $\bar{v}_2$ υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\bar{v}_1 = V_1/n = (4\ \mathrm{m^3})/(0{,}5\ \mathrm{kmol}) \quad\Rightarrow\quad \bar{v}_1 = 8\ \mathrm{m^3/kmol} \qquad (\alpha\text{-}4)$$

$$\bar{v}_2 = V_2/n = (2\ \mathrm{m^3})/(0{,}5\ \mathrm{kmol}) \quad\Rightarrow\quad \bar{v}_2 = 4\ \mathrm{m^3/kmol} \qquad (\alpha\text{-}5)$$

Οι δυναμικοί συντελεστές B και C για το άζωτο βρίσκονται από τον Πίνακα **Σ**5-1:

$$B = -0{,}0045\ \mathrm{m^3/kmol} \qquad C = 0{,}0011\ \mathrm{m^6/kmol^2} \qquad (\alpha\text{-}6)$$

Για ευκολία υπολογίζουμε χωριστά τους παρακάτω όρους:

$$n\bar{R}T = (0{,}5\ \mathrm{kmol})[8{,}3145\ \mathrm{kJ/(kmol{\cdot}K)}](298\ \mathrm{K}) = 1239\ \mathrm{kJ} \qquad (\alpha\text{-}7)$$

$$\ln(\bar{v}_2/\bar{v}_1) = \ln(4/8) = -0{,}693 \qquad (\alpha\text{-}8)$$

$$B\left(\frac{1}{\bar{v}_2} - \frac{1}{\bar{v}_1}\right) = 5{,}625\times10^{-4} \qquad \frac{C}{2}\left(\frac{1}{\bar{v}_2^2} - \frac{1}{\bar{v}_1^2}\right) = 2{,}578\times10^{-5} \qquad (\alpha\text{-}9)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραπάνω όρων στην εξίσωση (α-3), βρίσκεται ότι το απαιτούμενο έργο W για τη συμπίεση του συστήματος όταν ο N_2 ακολουθεί την ΚΕ (α-1) είναι:

$$W = -858\ \mathrm{kJ} \qquad (\alpha\text{-}10)$$

β Υποθέτουμε ότι το άζωτο συμπεριφέρεται σαν *ιδανικό* αέριο, οπότε ισχύει η καταστατική εξίσωση $p\bar{v} = n\bar{R}T$. Στη θεωρούμενη περίπτωση, επειδή η διεργασία συμπίεσης 1-2 είναι *στατικότροπη* και *ισόθερμη*, το απαιτούμενο έργο υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W = \int_1^2 pdV = n\int_1^2 p\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} \quad\Rightarrow\quad W = n\bar{R}T\ln\left(\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1}\right) \qquad (\beta\text{-}1)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει ότι το ζητούμενο έργο είναι:

$$W = (1293\ \mathrm{kJ})\ln(4/8) \quad\Rightarrow\quad W = -859\ \mathrm{kJ} \qquad (\beta\text{-}2)$$

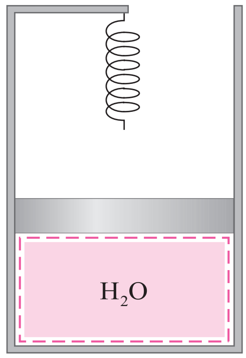
ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α-23

Διατύπωση: *10 kg νερού περιέχονται στη διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου που φαίνεται στο Σχήμα Α-23. Οι αρχικές συνθήκες του νερού είναι 500 kPa και 10 °C. Το έμβολο έχει εγκάρσια διατομή 0,05 m*^{2}*. Το ελατήριο είναι ελαστικό με σταθερά 80 kN/m. Το νερό αρχίζει να θερμαίνεται με προσθήκη θερμότητας, με αποτέλεσμα τη συνεχή αύξηση του όγκου του. Όταν ο όγκος του νερού γίνει 0,020 m*^{3}*, το έμβολο ακουμπά στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Η θέρμανση του νερού διακόπτεται όταν το έμβολο* *ανυψωθεί ακόμη 10 cm μετά την επαφή του με το ελατήριο. Η διεργασία αύξησης του όγκου του νερού είναι στατικότροπη.*

α *Να ευρεθούν η πίεση και η θερμοκρασία νερού στην τελική κατάσταση.*

β *Να σχεδιαστεί η όλη διεργασία σε διάγραμμα p-V.*

γ *Να υπολογιστεί το εκτελούμενο έργο κατά τη διεργασία θέρμανσης.*



Σχήμα Α-23

Λύση: α Ας δούμε πρώτα ποιά είναι η αρχική κατάσταση (1) του συστήματος. Από τον Πίνακα **Σ**10-1Β βρίσκεται ότι για p_1 = 500 kPa η αντίστοιχη θερμοκρασία κορεσμού του νερού είναι $T_{s,1}$ = 151,84 °C. Επειδή T_1 = 10 °C < $T_{s,1}$, συμπεραίνουμε ότι το νερό στη κατάσταση (p_1, T_1) είναι *υπόψυκτο υγρό*. Η τιμή του ειδικού όγκου του νερού βρίσκεται από τον Πίνακα **Σ**10-1Δ για το ζεύγος (500 kPa, 10 °C) και είναι v_1 = 0,001 m³/kg. Επομένως, ο όγκος V_1 του συστήματος είναι:

$$V_1 = mv_1 = (10 \text{ kg})(0{,}001 \text{ m}^3/\text{kg}) \quad \Rightarrow \quad V_1 = 0{,}01 \text{ m}^3 \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Έστω 2 η κατάσταση του συστήματος όταν το έμβολο ακουμπά στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Η διεργασία 1-2 είναι ισοβαρής, συνεπώς, $p_2 = p_1$ = 500 kPa. Ο ειδικός όγκος v_2 του νερού είναι:

$$v_2 = V_2/m = (0{,}020 \text{ m}^3)/(10\text{kg}) \quad \Rightarrow \quad v_2 = 0{,}002 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Στη συνέχεια, από τον Πίνακα **Σ**10-1Α, βρίσκεται ότι για πίεση p_2 = 500 kPa οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού είναι:

$$v_{l,2} = 0{,}001093 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad v_{g,2} = 0{,}3747 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Επειδή $v_{l,2} < v_2 < v_{g,2}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην κατάσταση (p_2, T_2) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_2 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_2 = \frac{v_2 - v_{l,2}}{v_{g,2} - v_{l,2}} = \frac{0{,}002 - 0{,}001093}{1{,}6370 - 0{,}001093} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0{,}00243 \qquad (\alpha\text{-}4)$$

Ας δούμε τώρα ποιά είναι η τελική κατάσταση (3) του συστήματος. Επειδή το μήκος του ελατηρίου μειώνεται κατά Δx = 10 cm, ο όγκος V_3 είναι:

$$V_3 = V_2 + (\Delta x)A = (0{,}02 \text{ m}^3) + (0{,}1 \text{ m})(0{,}05 \text{ m}^2) \quad \Rightarrow \quad V_3 = 0{,}025 \text{ m}^3 \qquad (\alpha\text{-}5)$$

Επομένως, ο ειδικός όγκος v_3 του συστήματος είναι:

$$v_3 = V_3/m = (0{,}025 \text{ m}^3)/(10 \text{ kg}) \quad \Rightarrow \quad v_3 = 0{,}0025 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}6)$$

Η πίεση του συστήματος στην κατάσταση 3 δίνεται από τη σχέση:

$$p_3 = p_2 + \frac{k\Delta x}{A} = (500 \text{ kPa}) + \frac{(80 \text{ kN/m})}{0{,}05 \text{ m}^2} \quad \Rightarrow \quad p_3 = 660 \text{ kPa} \qquad (\alpha\text{-}7)$$

Στην εξίσωση (α-7) καταλήγουμε με το ίδιο σκεπτικό που οδήγησε στην εξίσωση (8) του Προβλήματος Α-10. Γνωρίζοντας τώρα την πίεση p_3 και τον ειδικό όγκο v_3, μπορούμε να καθορίσουμε τη φύση του συστήματος στην τελική κατάσταση. Από τον Πίνακα **Σ**10-1Α, για p_3 = 660 kPa βρίσκονται οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού στην κατάσταση (3) του συστήματος:

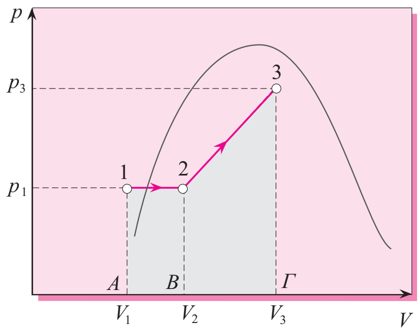
$$v_{l,3} = 0{,}001105 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad v_{g,3} = 0{,}2883 \text{ m}^3/\text{kg} \qquad (\alpha\text{-}8)$$

Επειδή $v_{l,3} < v_3 < v_{g,3}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην κατάσταση (p_3, v_3) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_3 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_3 = \frac{v_3 - v_{l,3}}{v_{g,3} - v_{l,3}} = \frac{0{,}0025 - 0{,}001105}{0{,}2883 - 0{,}001105} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 0{,}00486 \qquad (\alpha\text{-}9)$$

β Η γραμμή που παριστάνει τη στατικότροπη διεργασία θέρμανσης του νερού στο διάγραμμα *p-V* αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα, ένα οριζόντιο και ένα κεκλιμένο όπως φαίνεται στο Σχήμα Α-23α. Το *οριζόντιο* τμήμα παριστάνει την ισοβαρή διεργασία 1-2 και το *κεκλιμένο* τη διεργασία 2-3. Το δεύτερο τμήμα είναι ευθύγραμμο, επειδή η πίεση $p_x > p_2$ είναι ανάλογη προς τον όγκο *V* του συστήματος σύμφωνα με την εξίσωση:

$$p_x = p_2 + \frac{k\Delta x}{A} = p_2 + \left(\frac{k}{A^2}\right)V \qquad (\beta\text{-}1)$$



Σχήμα Α-23α

γ Επειδή η διεργασία θέρμανσης του νερού είναι *στατικότροπη*, το εκτελούμενο έργο $W_{1\text{-}3}$ μπορεί να υπολογιστεί γραφικά από το διάγραμμα *p-V* του Σχήματος Α-23α ως το άθροισμα των δύο επιμέρους έργων $W_{1\text{-}2}$ και $W_{2\text{-}3}$:

$$W_{1-3} = W_{1-2} + W_{2-3} \qquad (\gamma\text{-}1)$$

Το έργο $W_{1\text{-}2}$ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας Α-1-2-Β κάτω από την οριζόντια ευθεία, που παριστάνει την ισοβαρή διεργασία 1-2:

$$W_{1-2} = \text{εμβ(Α12Β)} = p_1(V_2 - V_1) = (500\ \text{kPa})[(0{,}02 - 0{,}01)\ \text{m}^3]) \quad \Rightarrow \quad W_{1-2} = 5\ \text{kJ} \qquad (\gamma\text{-}2)$$

Το έργο $W_{2\text{-}3}$ είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας Β-2-3-Γ κάτω από την κεκλιμένη ευθεία, που παριστάνει την διεργασία 2-3:

$$W_{2-3} = \text{εμβ(Β23Γ)} = \frac{(\overline{\text{Α2}} + \overline{\text{Γ3}})(\overline{\text{ΒΓ}})}{2} \quad \Rightarrow \quad W_{2-3} = \frac{(p_2 + p_3)(V_3 - V_2)}{2} \qquad (\gamma\text{-}3)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, προκύπτει:

$$W_{2-3} = \frac{[(500 + 660)\ \text{kPa}][(0{,}025 - 0{,}020\ \text{m}^3]}{2} \quad \Rightarrow \quad W_{2-3} = 2{,}9\ \text{kJ} \qquad (\gamma\text{-}4)$$

Επομένως, το ολικό έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-3 είναι:

$$W_{1-3} = (5\,\text{kJ}) + (2{,}9\,\text{kJ}) = 7{,}9\,\text{kJ} \qquad (\gamma\text{-}5)$$