

Μέρος Πρώτο

Απαντήσεις Θεμάτων Σκέψης

ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Θ-15

Διατύπωση: Χρησιμοποιώντας τη διαφορική έκφραση του στατικότροπου έργου μετατόπισης κλειστού συστήματος, να αποδειχθεί ότι το έργο δεν αποτελεί θερμοδυναμική ιδιότητα.

Απάντηση: Υποθέτουμε ότι το έργο είναι ιδιότητα, τότε η μαθηματική έκφραση:

$$dw = pdV + (0)dp \quad (1)$$

πρέπει να είναι τέλει διαφορικό. Αν η υπόθεση αυτή είναι σωστή, πρέπει να ισχύει το θεώρημα Euler, [Εξ. (1-44)], με τη μορφή:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial p}\right)_v = \left(\frac{\partial(0)}{\partial v}\right)_p \quad (2)$$

Η μερική παράγωγος $(\partial p/\partial p)_v = 1$ και η παράγωγος $[\partial(0)/\partial v]_p = 0$, συνεπώς, η παραπάνω συνθήκη (και κατ' επέκταση η αρχική υπόθεση) δεν ισχύει. Άρα, το έργο δεν είναι θερμοδυναμική ιδιότητα, αλλά μη καταστατικό μέγεθος.

ΘΕΜΑ Θ-16

Διατύπωση: Μια κοίλη μεταλλική σφαίρα κρέμεται από ένα καλώδιο, βυθισμένη σε υγρό ειδικού βάρους γ (βλ. Σχήμα Θ-16). Η σφαίρα έχει μάζα m και όγκο V . Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για την ανύψωση της σφαίρας, μέσα στο υγρό, σε απόσταση h από την αρχική θέση.

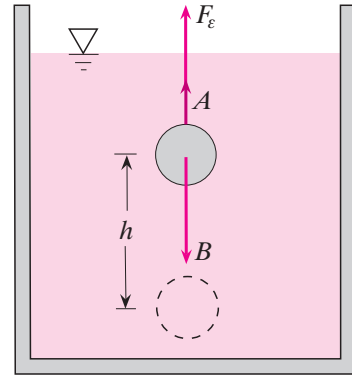
1 Η ανύψωση της σφαίρας είναι πολύ αργή και οι δυνάμεις τριβής αμελητέες.

Απάντηση: Στην κινούμενη κοίλη σφαίρα κάθε στιγμή, ασκούνται τρεις κατακόρυφες δυνάμεις: (i) η δύναμη ανύψωσης F_ϵ , (ii) η άνωση $A = \gamma V$ και (iii) το βάρος $B = mg$ (βλ. Σχήμα Θ-16). Επειδή η ανύψωση της σφαίρας μέσα στο υγρό γίνεται με σταθερή ταχύτητα, η συνισταμένη αυτών των τριών δυνάμεων (F_ϵ , A και B) είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$F_\epsilon + A - B = 0 \Rightarrow F_\epsilon = B - A = mg - \gamma V \quad (1)$$

Το έργο W που απαιτείται για την ανύψωση της σφαίρας, μέσα στο υγρό, σε απόσταση h από την αρχική της θέση υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W = \int_0^h F_\epsilon dx = \int_0^h (mg - \gamma V) dx \Rightarrow W = (mg - \gamma V)h \quad (2)$$



Σχήμα Θ-16

ΘΕΜΑ Θ-17

Διατύπωση: Ένα κλειστό σύστημα υφίσταται την κυκλική διεργασία που φαίνεται στο Σχήμα Θ-17. Το καθαρό έργο που εκτελείται από το σύστημα κατά τη διάρκεια 5 κύκλων είναι 40 kJ. Πόσο είναι το έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2;

Απάντηση: Πρώτα βρίσκουμε το έργο που εκτελείται από το σύστημα ανά κύκλο:

$$W_c = W_l / N = (40 \text{ kJ}) / (5 \text{ cycles}) \Rightarrow W_c = 8 \text{ kJ/cycle} \quad (1)$$

Το έργο W_c είναι ίσο με το άθροισμα των έργων που εκτελούνται κατά τη διάρκεια των επιμέρους διεργασιών του κύκλου (1-2, 2-3 και 3-1):

$$W_c = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{3-1} \quad (2)$$

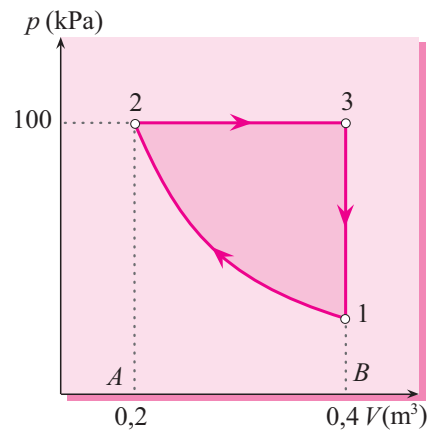
Επειδή οι τρεις διεργασίες (1-2, 2-3 και 3-1) που συνιστούν τον κύκλο παριστάνονται με *συνεχή* γραμμή στο διάγραμμα p - V του Σχήματος Θ-17, συμπεραίνουμε ότι είναι *στατικότροπες*. Το έργο $W_{3-1} = 0$, καθώς η διεργασία 3-1 είναι *ισόχωρη*. Το έργο W_{2-3} είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας A-2-3-B κάτω από την ευθεία που παριστάνει την *ισοβαρή* διεργασία 2-3. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} W_{2-3} &= p_2(V_3 - V_2) \\ &= (100 \text{ kPa})[(0,4 - 0,2) \text{ m}^3] \Rightarrow W_{2-3} = 20 \text{ kJ} \end{aligned} \quad (3)$$

Το έργο W_{1-2} υπολογίζεται έμμεσα από την εξίσωση (2):

$$W_{1-2} = W_c - W_{2-3} - W_{3-1} = [(8) - (20) - (0)] \text{ kJ} \Rightarrow W_{1-2} = -12 \text{ kJ} \quad (4)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει *κατανάλωση* έργου, αφού κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 ο όγκος του συστήματος μειώνεται από $0,4 \text{ m}^3$ σε $0,2 \text{ m}^3$.



Σχήμα Θ-17

ΘΕΜΑ Θ-18

Διατύπωση: Να παρασταθεί γραφικά το έργο που απαιτείται για την επιμήκυνση ενός ελαστικού ελατηρίου από αρχικό μήκος l_1 σε l_2 . Το μήκος του μη παραμορφωμένου ελατηρίου είναι $l_0 < l_1$.

Απάντηση: Έστω F η δύναμη που ασκείται στο άκρο του ελατηρίου και x η επιμήκυνση αυτού. Επειδή το ελατήριο είναι ελαστικό, ισχύει ο νόμος *Hook*, σύμφωνα με τον οποίο, η δύναμη F είναι ανάλογη προς την επιμήκυνση x και τη σταθερά k του ελατηρίου:

$$F = kx = k(l - l_0) \quad (1)$$

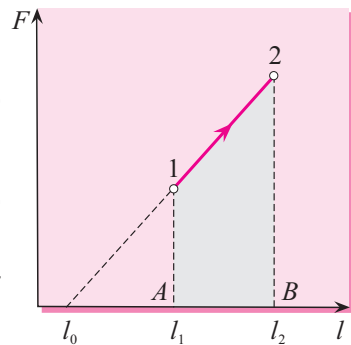
όπου l είναι το μήκος του παραμορφωμένου ελατηρίου. Το έργο που απαιτείται για την επιμήκυνση του ελατηρίου από το αρχικό μήκος l_1 στο τελικό μήκος l_2 υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα:

$$W_{1-2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 (-kx)dx = \int_1^2 (-k)(l - l_0)d(l - l_0) \quad (2)$$

Το αρνητικό πρόσημο είναι απαραίτητο, επειδή το έργο εκτελείται από το περιβάλλον στο ελατήριο (σύστημα) όταν το dx είναι θετικό. Από την εκτέλεση της παραπάνω ολοκλήρωσης, προκύπτει:

$$W_{1-2} = \frac{1}{2}k[(l_1 - l_0)^2 - (l_2 - l_0)^2] \Rightarrow W_{1-2} = \frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2) \quad (3)$$

Το έργο $|W_{1-2}|$ παριστάνεται γραφικά στο διάγραμμα $F-l$ του Σχήματος Θ-18 από το εμβαδόν της επιφάνειας A-1-2-B κάτω από την ευθεία 1-2.



Σχήμα Θ-18

ΘΕΜΑ Θ-19

Διατύπωση: Να ευρεθεί η έκφραση του έργου που εκτελείται κατά τον σχηματισμό της επιφάνειας μιας σφαιρικής φουσαλίδας, διαμέτρου d , από διάλυμα σαπουνιού. Η διεργασία σχηματισμού της φουσαλίδας είναι ισόθερμη και στατικότροπη.

Απάντηση: Το στοιχειώδες έργο που απαιτείται για της αύξηση της επιφάνειας της φουσαλίδας κατά dA δίνεται από την εξίσωση:

$$\delta W = -\sigma dA \quad (1)$$

όπου σ είναι η επιφανειακή τάση του υγρού, η οποία για ισόθερμη διεργασία είναι σταθερή. Έτσι, το έργο που απαιτείται για τον σχηματισμό σφαιρικής φουσαλίδας με αρχική επιφάνεια $A_1 = 0$ και τελική επιφάνεια A_2 είναι:

$$W_{1-2} = -\int_1^2 \sigma dA = -\sigma(A_2 - A_1) \Rightarrow W_{1-2} = -\sigma A_2 \quad (2)$$

Η υγρή μεμβράνη της φουσαλίδας αποτελείται από δύο σφαιρικές επιφάνειες μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα λεπτό στρώμα υγρού πεπερασμένου πάχους. Επομένως, η τελική επιφάνεια της φουσαλίδας είναι $A_2 = 2(4\pi R^2) = 2d^2$, οπότε η εξίσωση (2) γράφεται:

$$W_{1-2} = -2\pi\sigma d^2 \quad (3)$$

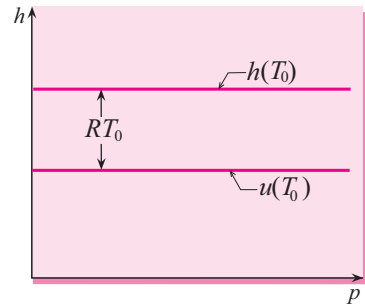
Να σημειωθεί ότι το έργο W_{1-2} , που απαιτείται για τον σχηματισμό της σφαιρικής επιφάνειας A_2 , δεν εξαρτάται από το μέσο διαστολής (αέρας ή ατμός) που υπάρχει στο εσωτερικό της φουσαλίδας.

ΘΕΜΑ Θ-20

Διατύπωση: Να σχεδιαστεί μια ισενθαλπική γραμμή και η αντίστοιχη γραμμή σταθερής εσωτερικής ενέργειας για ιδανικό αέριο σταθερής θερμοκρασίας T_0 σε κοινό διάγραμμα $h-p$.

Απάντηση: Η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια ενός ιδανικού αερίου εξαρτώνται μόνο από τη θερμοκρασία. Επομένως, επειδή $h \neq f(p)$ και $u \neq f(p)$, η ισενθαλπική γραμμή και η αντίστοιχη γραμμή σταθερής εσωτερικής ενέργειας για ιδανικό αέριο, σταθερής θερμοκρασίας T_0 , θα παριστάνονται στο διάγραμμα $h-p$ του Σχήματος Θ-20 με δύο ευθείες παράλληλες προς τον άξονα της πίεσης. Η απόσταση μεταξύ των δύο γραμμών είναι ίση με RT_0 , όπου R είναι η ειδική σταθερά του αερίου, όπως προκύπτει από την εφαρμογή της εξίσωσης ορισμού της ενθαλπίας, $h = u + pv$, για ιδανικό αέριο:

$$h - u = pv = RT_0 \quad (1)$$



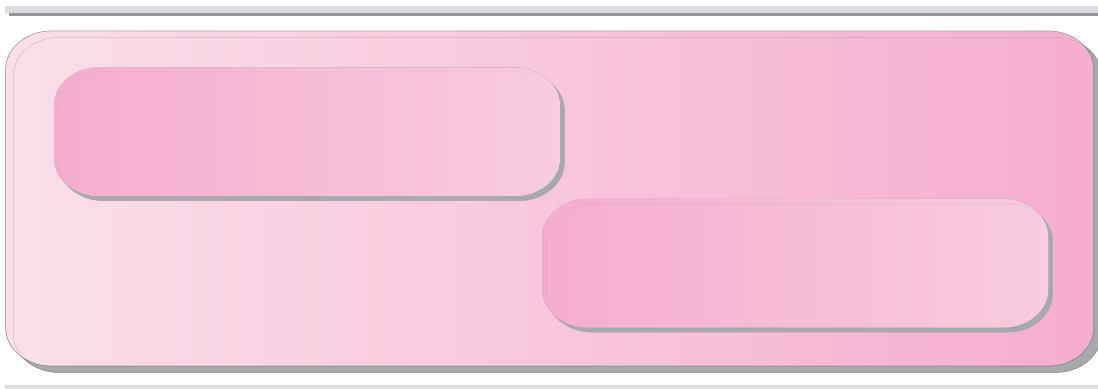
Σχήμα Θ-20

ΘΕΜΑ Θ-21

Διατύπωση: Για την εύρεση των τιμών της εσωτερικής ενέργειας u και της ενθαλπίας h μιας καθαρής χημικής ουσίας, μπορεί να επιλεγεί η ίδια κατάσταση αναφοράς (π.χ. το τριπλό σημείο της ουσίας);

Απάντηση: Επειδή η ενθαλπία και η εσωτερική ενέργεια είναι εξαρτημένες μεταβλητές, καθώς συνδέονται με τη σχέση $h = u + pv$, δεν είναι δυνατόν να επιλεγεί η ίδια κατάσταση αναφοράς και για τις δύο ιδιότητες. Για παράδειγμα, στους πίνακες ιδιοτήτων νερού, η ειδική εσωτερική ενέργεια για κορεσμένο υγρό θεωρείται ότι είναι μηδέν στο τριπλό σημείο ($p_t = 0,6113 \text{ kPa}$, $v_t = 0,001 \text{ m}^3/\text{kg}$). Για την ίδια κατάσταση αναφοράς, η ειδική ενθαλπία του κορεσμένου υγρού είναι:

$$h_{t,t} = u_{t,t} + p_t v_t = (0) + (0,6113)(0,001) \Rightarrow h_{t,t} = 6,113 \times 10^{-4} \text{ kJ/kg} \quad (1)$$



Υποδειγματικές Λύσεις Προβλημάτων

ΜΟΡΦΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α-19

Διατύπωση: Ένας κύβος πάγου θερμοκρασίας 0°C τήκεται σε περιβάλλον πίεσης 100 kPa . Η ακμή του πάγου είναι 10 cm . Η πυκνότητα του πάγου στους 0°C είναι 915 kg/m^3 και του νερού 1000 kg/m^3 . Να υπολογιστεί το εκτελούμενο έργο κατά τη διάρκεια της διεργασίας τήξης του πάγου.

Λύση: Εδώ έχουμε την περίπτωση ενός κλειστού συστήματος που υφίσταται μια στατικότροπη διεργασία εκτόνωσης, λόγω της βραδείας τήξης του πάγου. Έτσι, το εκτελούμενο έργο κατά την ισοβαρή μετατροπή του πάγου (1) σε υγρό νερό (2) υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W = \int_1^2 p dV = \int_1^2 p_b dV \Rightarrow W = p_b(V_2 - V_1) \quad (1)$$

όπου $p_b = 100\text{ kPa}$. Ο αρχικός όγκος του πάγου είναι:

$$V_1 = a^3 = (0,10\text{ m})^3 \Rightarrow V_1 = 0,001\text{ m}^3 \quad (2)$$

Κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2, η μάζα του συστήματος διατηρείται σταθερή, δηλαδή $m_1 = m_2$ ή $\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2$, αφού οι πυκνότητες ρ_1 και ρ_2 είναι σταθερές. Επομένως, ο όγκος V_2 του νερού που προέρχεται από την τήξη του πάγου είναι:

$$V_2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)V_1 = \left(\frac{915}{1000}\right)(0,001\text{ m}^3) \Rightarrow V_2 = 9,15 \times 10^{-3}\text{ m}^3 \quad (3)$$

Άρα, το εκτελούμενο έργο κατά την ισοβαρή διεργασία 1-2 είναι:

$$W = (100 \times 10^3\text{ Pa})[(0,915 - 1,0) \times 10^{-3}\text{ m}^3] \Rightarrow W = -8,5\text{ J} \quad (4)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει κατανάλωση έργου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ A-20

Διατύπωση: Σε μια διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου περιέχονται $0,25 \text{ m}^3$ υδρατμού, πίεσης 50 kPa και θερμοκρασίας $100 \text{ }^\circ\text{C}$. Ο ατμός συμπιέζεται στατικότροπα, διατηρώντας σταθερή τη θερμοκρασία, μέχρι τελικό όγκο $0,05 \text{ m}^3$.

α Να σχεδιαστεί η διεργασία στο διάγραμμα p - v .

β Να υπολογιστεί το έργο που απαιτείται για τη συμπίεση του αερίου.

Λύση: **α** Ας δούμε πρώτα ποιά είναι η αρχική κατάσταση (1) του συστήματος. Από τον Πίνακα Σ10-1B βρίσκεται ότι για $p_1 = 50 \text{ kPa}$ η αντίστοιχη θερμοκρασία κορεσμού του νερού είναι $T_{s,1} = 81,35 \text{ }^\circ\text{C}$. Επειδή $T_1 = 100 \text{ }^\circ\text{C} > T_{s,1}$, συμπεραίνουμε ότι το νερό στην κατάσταση (p_1, T_1) είναι *υπέρθερμος ατμός*. Επομένως, η τιμή του ειδικού όγκου του ατμού βρίσκεται από τον Πίνακα Σ10-1Γ για το ζεύγος ($50 \text{ kPa}, 100 \text{ }^\circ\text{C}$) και είναι $v_1 = 3,41833 \text{ m}^3/\text{kg}$. Από τις γνωστές τιμές του ολικού και του ειδικού όγκου στην κατάσταση 1, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα m του συστήματος που περιέχεται στη διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου:

$$m = \frac{V_1}{v_1} = \frac{0,25 \text{ m}^3}{3,41833 \text{ m}^3/\text{kg}} \Rightarrow m = 7,314 \times 10^{-2} \text{ kg} \quad (\alpha-1)$$

Γνωρίζοντας τώρα τη μάζα m και τον ολικό όγκο V_2 του νερού στην τελική κατάσταση (2), υπολογίζουμε τον ειδικό όγκο v_2 του συστήματος:

$$v_2 = \frac{V_2}{m} = \frac{0,05 \text{ m}^3}{7,314 \times 10^{-2} \text{ kg}} \Rightarrow v_2 = 0,6836 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-2)$$

Στη συνέχεια, από τον Πίνακα Σ10-1Α, βρίσκεται ότι για θερμοκρασία $T_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού είναι:

$$v_{l,2} = 0,001044 \text{ m}^3/\text{kg} \quad v_{g,2} = 1,6730 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-3)$$

Επειδή $v_{l,2} < v_2 < v_{g,2}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην τελική κατάσταση (p_2, T_2) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_2 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

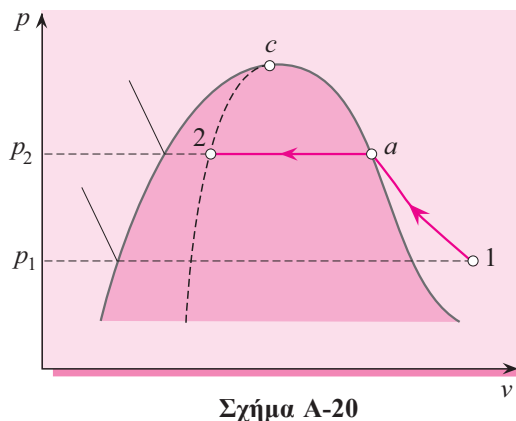
$$x_2 = \frac{v_2 - v_{l,2}}{v_{g,2} - v_{l,2}} = \frac{0,6836 - 0,001044}{1,6730 - 0,001044} \Rightarrow x_2 = 0,408 \quad (\alpha-4)$$

Επομένως, η ισόθερμη διεργασία συμπίεσης του υδρατμού, ως στατικότροπη, παριστάνεται στο διάγραμμα p - v του Σχήματος A-20 με τη συνεχή γραμμή 1- α -2.

β Το έργο W_{1-2} που απαιτείται για τη συμπίεση του συστήματος από την αρχική στην τελική κατάσταση είναι ίσο με το άθροισμα των έργων $W_{1-\alpha}$ και $W_{\alpha-2}$ που εκτελούνται κατά τις επιμέρους διεργασίες 1- α και α -2:

$$W_{1-2} = W_{1-\alpha} + W_{\alpha-2} \quad (\beta-1)$$

όπου στην κατάσταση α το σύστημα είναι κορεσμένος ατμός θερμοκρασίας $100 \text{ }^\circ\text{C}$ και



Σχήμα A-20

πίεσης 100,325 kPa, που είναι η πίεση κορεσμού η οποία αντιστοιχεί σε αυτή τη θερμοκρασία. Κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-α, το νερό είναι σε κατάσταση ατμού, για τον οποίο δεχόμαστε ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, λόγω της χαμηλής πίεσης. Έτσι, αν λάβουμε υπόψη ότι η διεργασία 1-α είναι στατικότροπη και ισόθερμη, το έργο $W_{1-\alpha}$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_{1-\alpha} = \int_1^\alpha p dV = mRT_1 \int_1^\alpha \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_\alpha}{V_1} \Rightarrow W_{1-\alpha} = p_1 V_1 \ln \frac{V_\alpha}{V_1} \quad (\beta-2)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (β-2), προκύπτει:

$$W_{1-\alpha} = (50 \text{ kPa})(0,25 \text{ m}^3) \ln(1,6730/3,41833) \Rightarrow W_{1-\alpha} = -8,93 \text{ kJ} \quad (\beta-3)$$

Σε ότι αφορά στη διεργασία α-2, αυτή είναι στατικότροπη και ισοβαρής, συνεπώς, το έργο $W_{\alpha-2}$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W_{\alpha-2} = \int_\alpha^2 p dV = \int_\alpha^2 p_{s,T_1} dV = p_{s,T_1} (V_2 - V_\alpha) \Rightarrow W_{\alpha-2} = p_{s,T_1} (V_2 - m v_\alpha) \quad (\beta-4)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει:

$$W_{\alpha-2} = (101,325)[(0,05) - (0,07312)(1,6730)] \text{ kPa} \cdot \text{m}^3 \Rightarrow W_{\alpha-2} = -7,33 \text{ kJ} \quad (\beta-5)$$

Άρα το εκτελούμενο ολικό έργο κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 είναι:

$$W_{1-2} = (-8,93 \text{ kJ}) + (-7,33 \text{ kJ}) \Rightarrow W_{1-2} = -16,3 \text{ kJ} \quad (\beta-6)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει κατανάλωση έργου.

■ ΠΡΟΒΛΗΜΑ A-21

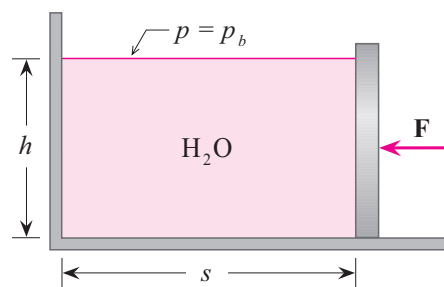
Διατύπωση: Θεωρούμε τη διάταξη της ανοικτής ορθογωνικής δεξαμενής-εμβόλου που φαίνεται στο Σχήμα A-21. Η δεξαμενή έχει αρχικό μήκος $s_1 = 1 \text{ m}$, πλάτος $b = 1 \text{ m}$ και περιέχει νερό (20°C) μέχρι ύψος $h_1 = 0,45 \text{ m}$. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι $p_b = 100 \text{ kPa}$. Το έμβολο μετατοπίζεται αργά, χωρίς τριβές, έως ότου το μήκος της δεξαμενής γίνει $s_2 = 1,25 \text{ m}$. Να υπολογιστεί το έργο που εκτελείται: (α) από το νερό στο έμβολο και (β) από την ατμόσφαιρα στο νερό.

Λύση: α Η κατανομή της πίεσης στο νερό που περιέχεται στη δεξαμενή είναι γραμμική, με ακραίες τιμές $p_{h=0} = p_b$ και $p_h = p_b + \gamma h$. Η μέση πίεση p_m που ασκείται από το νερό στο έμβολο είναι:

$$p_m = \frac{1}{2}(p_{h=0} + p_h) \Rightarrow p_m = p_b + \frac{1}{2}\gamma h \quad (\alpha-1)$$

Επειδή η μετατόπιση του εμβόλου γίνεται αργά, χωρίς τριβές, η συγκεκριμένη διεργασία μπορεί να θεωρηθεί στατικότροπη. Επομένως, το έργο $W_{w-\varepsilon}$ που εκτελείται από το νερό (w) στο έμβολο (ε) είναι:

$$W_{w-\varepsilon} = \int_1^2 F_p ds = \int_1^2 p_m A ds = \int_1^2 (p_b + \frac{1}{2}\gamma h)(bh) ds \quad (\alpha-2)$$



Σχήμα A-21

Κατά τη μετατόπιση του εμβόλου ο όγκος του νερού παραμένει ο ίδιος, συνεπώς, το γινόμενο hs είναι σταθερό, όπου s είναι τυχαίο μήκος της δεξαμενής και h το αντίστοιχο βάθος του νερού. Δηλαδή:

$$hs = h_1s_1 \Rightarrow h = \frac{h_1s_1}{s} \quad (\alpha-3)$$

Λόγω αυτής της έκφρασης του βάθους h , η εξίσωση (α-2) τροποποιείται ως εξής:

$$W_{w-\varepsilon} = \int_1^2 \left[p_b + \frac{1}{2}\gamma \left(\frac{h_1s_1}{s} \right) \right] \left[b \left(\frac{h_1s_1}{s} \right) \right] ds = A + B \quad (\alpha-4)$$

Οι ενεργειακοί όροι A και B έχουν τις παρακάτω εκφράσεις:

$$A = p_b b h_1 s_1 \ln \left(\frac{s_2}{s_1} \right) \quad (\alpha-5) \quad \quad \quad B = b \gamma h_1 s_1 \ln \left(\frac{1}{s_1^3} - \frac{1}{s_2^3} \right) \quad (\alpha-6)$$

Από τις εξισώσεις (α-5) και (α-6), για $b = 1$ m, $h_1 = 0,45$ m, $s_1 = 1$ m, $s_2 = 1,25$ m, $p_b = 100$ kPa και $\gamma = 9,79$ kN/m³, προκύπτουν οι τιμές: $A = 10$ kJ και $B = 1$ kJ. Επομένως, το εκτελούμενο έργο από το νερό στο έμβολο είναι 11 kJ.

β Το έργο που εκτελείται από την ατμόσφαιρα (α) στο νερό (w) είναι:

$$W_{\alpha-w} = \int_1^2 p_b dV = \int_1^2 p_b A dh = \int_1^2 p_b (bs) dh \quad (\beta-1)$$

Αν λάβουμε υπόψη τη σχέση (α-3), η εξίσωση (β-1) γράφεται ως εξής:

$$W_{\alpha-w} = \int_1^2 p_b b \left(\frac{h_1s_1}{h} \right) dh = p_b b h_1 s_1 \ln \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \quad (\beta-2)$$

Το βάθος h_2 του νερού στη δεξαμενή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$h_2 = \frac{h_1s_1}{s_2} = \frac{(0,45 \text{ m})(1,0 \text{ m})}{1,25 \text{ m}} \Rightarrow h_2 = 0,36 \text{ m} \quad (\beta-3)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (β-2), προκύπτει:

$$W_{\alpha-w} = (100 \text{ kPa})(1 \text{ m})(0,45 \text{ m})(1 \text{ m}) \ln \left(\frac{0,36}{0,45} \right) \Rightarrow W_{\alpha-w} = -10 \text{ kJ} \quad (\beta-4)$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι το έργο μεταφέρεται από την ατμόσφαιρα στο νερό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ A-22

Διατύπωση: Θεωρούμε ως σύστημα 0,5 kmol αζώτου, θερμοκρασίας 25 °C και όγκου 4 m³. Το σύστημα συμπιέζεται στατικότεροπα μέχρι τελικό όγκο 2 m³, υπό σταθερή θερμοκρασία. Να υπολογιστεί το απαιτούμενο έργο για τη συμπίεση του συστήματος, αν το άζωτο ακολουθεί:

α Τη δυναμική ΚΕ περικομμένη στους τρεις πρώτους όρους της.

β Την καταστατική εξίσωση ιδανικού αερίου.

Λύση: α Η θεωρούμενη δυναμική ΚΕ μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$z = \frac{p\bar{v}}{RT} = 1 + \frac{B}{\bar{v}} + \frac{C}{\bar{v}^2} \Rightarrow \Rightarrow p = \frac{\bar{R}T}{\bar{v}} \left(1 + \frac{B}{\bar{v}} + \frac{C}{\bar{v}^2} \right) \quad (\alpha-1)$$

Έστω 1 η αρχική και 2 η τελική κατάσταση του συστήματος. Η διεργασία συμπίεσης 1-2 του N_2 είναι στατικότροπη και ισόθερμη. Το εκτελούμενο έργο W κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-2 είναι:

$$W = \int_1^2 p dV = n \int_1^2 p d\bar{v} = n\bar{R}T \int_1^2 \left(\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}^2} + \frac{d\bar{v}}{\bar{v}^3} \right) \quad (\alpha-2)$$

Μετά την εκτέλεση της παραπάνω ολοκλήρωσης, προκύπτει:

$$W = n\bar{R}T \left[\ln \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} + B \left(\frac{1}{\bar{v}_2} - \frac{1}{\bar{v}_1} \right) - \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\bar{v}_2^2} - \frac{1}{\bar{v}_1^2} \right) \right] \quad (\alpha-3)$$

Οι γραμμομοριακοί όγκοι \bar{v}_1 και \bar{v}_2 υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\bar{v}_1 = V_1 / n = (4 \text{ m}^3) / (0,5 \text{ kmol}) \Rightarrow \bar{v}_1 = 8 \text{ m}^3 / \text{kmol} \quad (\alpha-4)$$

$$\bar{v}_2 = V_2 / n = (2 \text{ m}^3) / (0,5 \text{ kmol}) \Rightarrow \bar{v}_2 = 4 \text{ m}^3 / \text{kmol} \quad (\alpha-5)$$

Οι δυναμικοί συντελεστές B και C για το άζωτο βρίσκονται από τον Πίνακα Σ5-1:

$$B = -0,0045 \text{ m}^3 / \text{kmol} \quad C = 0,0011 \text{ m}^6 / \text{kmol}^2 \quad (\alpha-6)$$

Για ευκολία υπολογίζουμε χωριστά τους παρακάτω όρους:

$$n\bar{R}T = (0,5 \text{ kmol}) [8,3145 \text{ kJ} / (\text{kmol} \cdot \text{K})] (298 \text{ K}) = 1239 \text{ kJ} \quad (\alpha-7)$$

$$\ln(\bar{v}_2 / \bar{v}_1) = \ln(4 / 8) = -0,693 \quad (\alpha-8)$$

$$B \left(\frac{1}{\bar{v}_2} - \frac{1}{\bar{v}_1} \right) = 5,625 \times 10^{-4} \quad \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\bar{v}_2^2} - \frac{1}{\bar{v}_1^2} \right) = 2,578 \times 10^{-5} \quad (\alpha-9)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των παραπάνω όρων στην εξίσωση (α-3), βρίσκεται ότι το απαιτούμενο έργο W για τη συμπίεση του συστήματος όταν ο N_2 ακολουθεί την ΚΕ (α-1) είναι:

$$W = -858 \text{ kJ} \quad (\alpha-10)$$

β Υποθέτουμε ότι το άζωτο συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, οπότε ισχύει η καταστατική εξίσωση $p\bar{v} = n\bar{R}T$. Στη θεωρούμενη περίπτωση, επειδή η διεργασία συμπίεσης 1-2 είναι στατικότροπη και ισόθερμη, το απαιτούμενο έργο υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$W = \int_1^2 p dV = n \int_1^2 p \frac{d\bar{v}}{\bar{v}} \Rightarrow W = n\bar{R}T \ln \left(\frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} \right) \quad (\beta-1)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της τελευταίας εξίσωσης, προκύπτει ότι το ζητούμενο έργο είναι:

$$W = (1293 \text{ kJ}) \ln(4 / 8) \Rightarrow W = -859 \text{ kJ} \quad (\beta-2)$$

■ ΠΡΟΒΛΗΜΑ Α-23

Διατύπωση: 10 kg νερού περιέχονται στη διάταξη κυλίνδρου-εμβόλου που φαίνεται στο Σχήμα Α-23. Οι αρχικές συνθήκες του νερού είναι 500 kPa και 10 °C. Το έμβολο έχει εγκάρσια διατομή 0,05 m². Το ελατήριο είναι ελαστικό με σταθερά 80 kN/m. Το νερό αρχίζει να θερμαίνεται με προσθήκη θερμότητας, με αποτέλεσμα τη συνεχή αύξηση του όγκου του. Όταν ο όγκος του νερού γίνει 0,020 m³, το έμβολο ακουμπά στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Η θέρμανση του νερού διακόπτεται όταν το έμβολο

ανυψωθεί ακόμη 10 cm μετά την επαφή του με το ελατήριο. Η διεργασία αύξησης του όγκου του νερού είναι στατικότροπη.

α Να ευρεθούν η πίεση και η θερμοκρασία νερού στην τελική κατάσταση.

β Να σχεδιαστεί η όλη διεργασία σε διάγραμμα p - V .

γ Να υπολογιστεί το εκτελούμενο έργο κατά τη διεργασία θέρμανσης.

Λύση: **α** Ας δούμε πρώτα ποιά είναι η αρχική κατάσταση (1) του συστήματος. Από τον Πίνακα Σ10-1B βρίσκεται ότι για $p_1 = 500$ kPa η αντίστοιχη θερμοκρασία κορεσμού του νερού είναι $T_{s,1} = 151,84$ °C. Επειδή $T_1 = 10$ °C < $T_{s,1}$, συμπεραίνουμε ότι το νερό στη κατάσταση (p_1, T_1) είναι *υπόψυκτο υγρό*. Η τιμή του ειδικού όγκου του νερού βρίσκεται από τον Πίνακα Σ10-1Δ για το ζεύγος (500 kPa, 10 °C) και είναι $v_1 = 0,001$ m³/kg. Επομένως, ο όγκος V_1 του συστήματος είναι:

$$V_1 = mv_1 = (10 \text{ kg})(0,001 \text{ m}^3/\text{kg}) \Rightarrow V_1 = 0,01 \text{ m}^3 \quad (\alpha-1)$$

Έστω 2 η κατάσταση του συστήματος όταν το έμβολο ακουμπά στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου. Η διεργασία 1-2 είναι ισοβαρής, συνεπώς, $p_2 = p_1 = 500$ kPa. Ο ειδικός όγκος v_2 του νερού είναι:

$$v_2 = V_2 / m = (0,020 \text{ m}^3) / (10 \text{ kg}) \Rightarrow v_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-2)$$

Στη συνέχεια, από τον Πίνακα Σ10-1A, βρίσκεται ότι για πίεση $p_2 = 500$ kPa οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού είναι:

$$v_{l,2} = 0,001093 \text{ m}^3/\text{kg} \quad v_{g,2} = 0,3747 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-3)$$

Επειδή $v_{l,2} < v_2 < v_{g,2}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην κατάσταση (p_2, T_2) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_2 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_2 = \frac{v_2 - v_{l,2}}{v_{g,2} - v_{l,2}} = \frac{0,002 - 0,001093}{1,6370 - 0,001093} \Rightarrow x_2 = 0,00243 \quad (\alpha-4)$$

Ας δούμε τώρα ποιά είναι η τελική κατάσταση (3) του συστήματος. Επειδή το μήκος του ελατηρίου μειώνεται κατά $\Delta x = 10$ cm, ο όγκος V_3 είναι:

$$V_3 = V_2 + (\Delta x)A = (0,02 \text{ m}^3) + (0,1 \text{ m})(0,05 \text{ m}^2) \Rightarrow V_3 = 0,025 \text{ m}^3 \quad (\alpha-5)$$

Επομένως, ο ειδικός όγκος v_3 του συστήματος είναι:

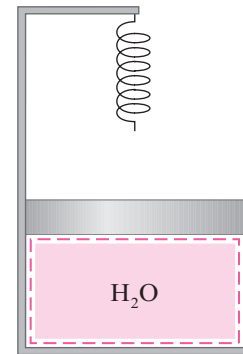
$$v_3 = V_3 / m = (0,025 \text{ m}^3) / (10 \text{ kg}) \Rightarrow v_3 = 0,0025 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-6)$$

Η πίεση του συστήματος στην κατάσταση 3 δίνεται από τη σχέση:

$$p_3 = p_2 + \frac{k\Delta x}{A} = (500 \text{ kPa}) + \frac{(80 \text{ kN/m})}{0,05 \text{ m}^2} \Rightarrow p_3 = 660 \text{ kPa} \quad (\alpha-7)$$

Στην εξίσωση (α-7) καταλήγουμε με το ίδιο σκεπτικό που οδήγησε στην εξίσωση (8) του Προβλήματος Α-10. Γνωρίζοντας τώρα την πίεση p_3 και τον ειδικό όγκο v_3 , μπορούμε να καθορίσουμε τη φύση του συστήματος στην τελική κατάσταση. Από τον Πίνακα Σ10-1A, για $p_3 = 660$ kPa βρίσκονται οι τιμές των ειδικών όγκων κορεσμένου υγρού και κορεσμένου ατμού στην κατάσταση (3) του συστήματος:

$$v_{l,3} = 0,001105 \text{ m}^3/\text{kg} \quad v_{g,3} = 0,2883 \text{ m}^3/\text{kg} \quad (\alpha-8)$$



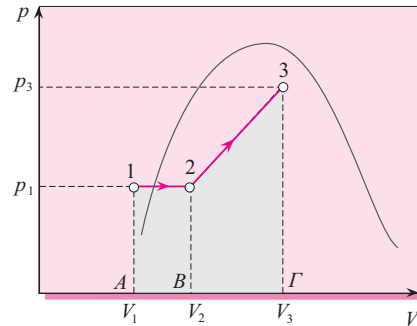
Σχήμα Α-23

Επειδή $v_{l,3} < v_3 < v_{g,3}$, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα στην κατάσταση (p_3, v_3) είναι *υγρός ατμός*, η ποιότητα x_3 του οποίου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$x_3 = \frac{v_3 - v_{l,3}}{v_{g,3} - v_{l,3}} = \frac{0,0025 - 0,001105}{0,2883 - 0,001105} \Rightarrow x_3 = 0,00486 \quad (\alpha-9)$$

β Η γραμμή που παριστάνει τη στατικότροπη διεργασία θέρμανσης του νερού στο διάγραμμα p - V αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα, ένα οριζόντιο και ένα κεκλιμένο όπως φαίνεται στο Σχήμα Α-23α. Το *οριζόντιο* τμήμα παριστάνει την ισοβαρή διεργασία 1-2 και το *κεκλιμένο* τη διεργασία 2-3. Το δεύτερο τμήμα είναι ευθύγραμμο, επειδή η πίεση $p_x > p_2$ είναι ανάλογη προς τον όγκο V του συστήματος σύμφωνα με την εξίσωση:

$$p_x = p_2 + \frac{k\Delta x}{A} = p_2 + \left(\frac{k}{A^2}\right)V \quad (\beta-1)$$



Σχήμα Α-23α

γ Επειδή η διεργασία θέρμανσης του νερού είναι *στατικότροπη*, το εκτελούμενο έργο W_{1-3} μπορεί να υπολογιστεί γραφικά από το διάγραμμα p - V του Σχήματος Α-23α ως το άθροισμα των δύο επιμέρους έργων W_{1-2} και W_{2-3} :

$$W_{1-3} = W_{1-2} + W_{2-3} \quad (\gamma-1)$$

Το έργο W_{1-2} είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας Α-1-2-Β κάτω από την οριζόντια ευθεία, που παριστάνει την ισοβαρή διεργασία 1-2:

$$W_{1-2} = \text{εμβ}(A12B) = p_1(V_2 - V_1) = (500 \text{ kPa})[(0,02 - 0,01) \text{ m}^3] \Rightarrow W_{1-2} = 5 \text{ kJ} \quad (\gamma-2)$$

Το έργο W_{2-3} είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας Β-2-3-Γ κάτω από την κεκλιμένη ευθεία, που παριστάνει την διεργασία 2-3:

$$W_{2-3} = \text{εμβ}(B23\Gamma) = \frac{(A\bar{2} + \Gamma\bar{3})(B\bar{\Gamma})}{2} \Rightarrow W_{2-3} = \frac{(p_2 + p_3)(V_3 - V_2)}{2} \quad (\gamma-3)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, προκύπτει:

$$W_{2-3} = \frac{[(500 + 660) \text{ kPa}][(0,025 - 0,020) \text{ m}^3]}{2} \Rightarrow W_{2-3} = 2,9 \text{ kJ} \quad (\gamma-4)$$

Επομένως, το ολικό έργο που εκτελείται κατά τη διάρκεια της διεργασίας 1-3 είναι:

$$W_{1-3} = (5 \text{ kJ}) + (2,9 \text{ kJ}) = 7,9 \text{ kJ} \quad (\gamma-5)$$

