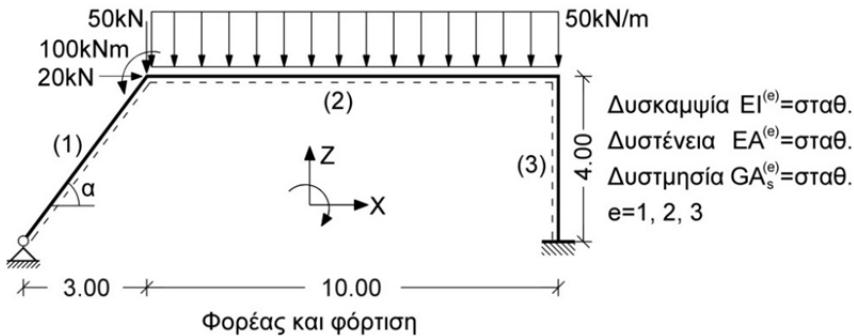


## 2.4 Επέκταση της ΜΠΣ σε επίπεδους πλαισιακούς φορείς

### 2.4.1 Εισαγωγή – Φορέας και φόρτιση

Το βασικό σκεπτικό της ΜΠΣ και τα υπολογιστικά βήματα που απαιτούνται για την επίλυση ενός δομικού φορέα (βλ. Πίνακα 2.2.1) εφαρμόζονται με τον ίδιο επί της ουσίας τρόπο σε οποιοδήποτε είδος δομικού φορέα. Προς περαιτέρω εμπέδωση και μερική γενίκευση της ενιαίας αυτής διαδικασίας επίλυσης, θα παρουσιαστεί στην παρούσα παράγραφο 2.4 η εφαρμογή της ΜΠΣ σε επίπεδους πλαισιακούς φορείς, ακολουθώντας την ίδια πορεία των πέντε βημάτων που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο 2.3 για επίπεδα δικτυώματα. Η παρουσίαση θα γίνει και εδώ, χάριν εποπτείας, με τη βοήθεια ενός σχετικά απλού παραδείγματος, προκειμένου να διατηρηθεί η δυνατότητα παρακολούθησης και ελέγχου όλων των αριθμητικών πράξεων εκ μέρους του αναγνώστη. Τα γεωμετρικά, ελαστικά και φορτιστικά δεδομένα του προς επίλυση επίπεδου πλαισίου δίνονται στο σχήμα 2.4.1-1. Εντούτοις, η παρουσίαση της διαδικασίας επίλυσης θα γίνει κατ' αρχάς χωρίς τους καθεαυτό αριθμητικούς υπολογισμούς, προκειμένου να κρατηθεί "συμπαγής" και με κύριο στόχο να εμπεδωθεί η λογική αλληλουχία των βημάτων υπολογισμού. Αμέσως μετά, στην § 2.4.9, θα ακολουθήσει η συγκεκριμένη αριθμητική υλοποίηση.

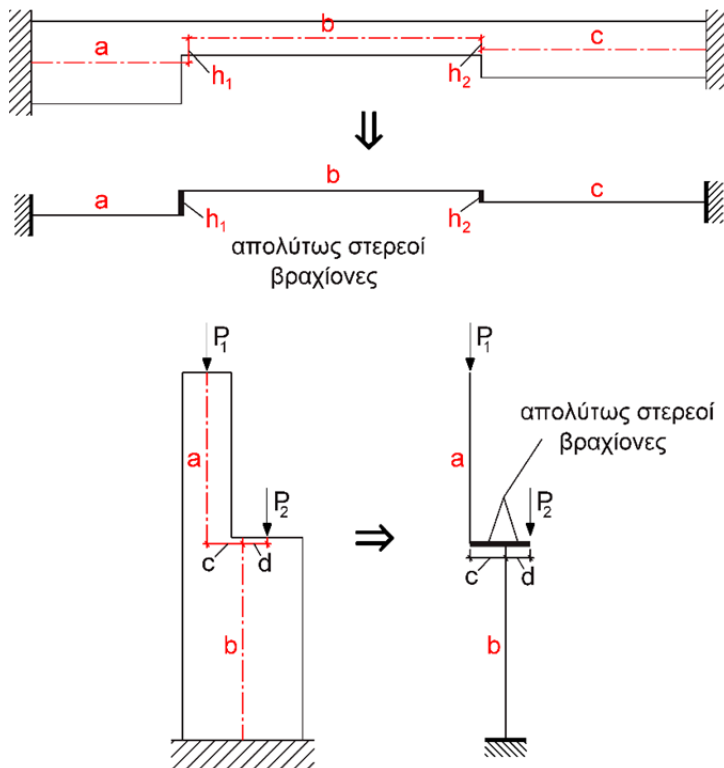


Σχ. 2.4.1-1 Απλό επίπεδο πλαίσιο.

#### Σημείωση σχετικά με την προσομοίωση πλαισιακών κατασκευών

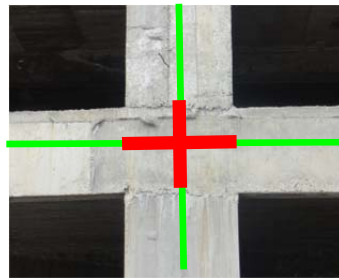
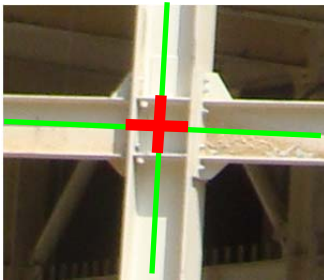
Δεδομένου ότι το πρώτο σκέλος της ανάλυσης μιας πραγματικής πλαισιακής κατασκευής είναι η προσομοίωσή της μέσω ενός μηχανικού προσομοιώματος (βλ. παρ. 1.1.4), θα γίνει εδώ μια σύντομη αναφορά στην προσομοίωση που χρησιμοποιείται στην πράξη για τον υπολογισμό πραγματικών πλαισίων. Η προσομοίωση αυτή δεν παρουσιάζει κανένα ιδιαίτερο πρόβλημα και βασίζεται στη γενικότερη ιδέα του "ισοδύναμου πλαισίου", που θα παρουσιαστεί λεπτομερέστερα στο κεφάλαιο 4.

Το βασικό σκεπτικό της συνίσταται στην υποκατάσταση κάθε ραβδόμορφου δομικού στοιχείου, που στην πραγματικότητα είναι ένα τρισδιάστατο σώμα, από ένα γραμμικό (μονοδιάστατο) στοιχείο, το οποίο τοποθετείται στον κεντροβαρικό άξονα του πραγματικού δομικού στοιχείου που υποκαθιστά και έχει τις ίδιες ιδιότητες διατομής (δυστένεια, δυσκαμψία, κτλ.) με αυτό. Στην περίπτωση μεταβολής της διατομής, τα αντίστοιχα άκρα των ευθύγραμμων τμημάτων συνδέονται με έναν απολύτως στερεό βραχίονα προκειμένου να αποδοθεί σωστά η υφιστάμενη εκκεντρότητα (Σχ. 2.4.1-2).

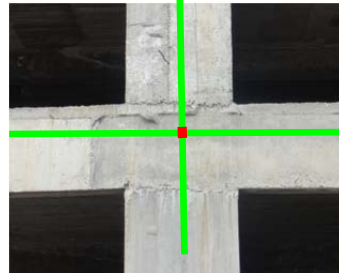
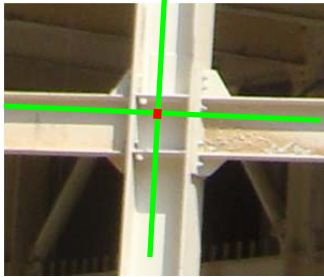


Σχ. 2.4.1-2 Προσομοίωση εκκεντροτήτων μέσω απολύτως στερεών βραχιόνων.

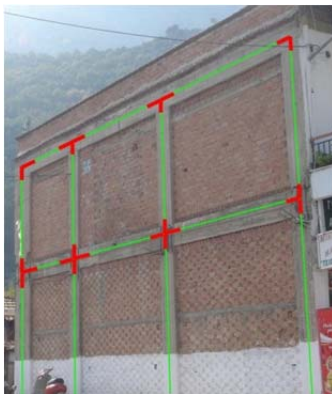
Κατά την εφαρμογή της προσομοίωσης αυτής σε πλαίσια, τοποθετούνται στους πλαισιακούς κόμβους απολύτως στερεοί βραχίονες από τον άξονα του εκάστοτε δομικού στοιχείου (δοκού ή στύλου) μέχρι τις εκατέρωθεν παρειές του (Σχ. 2.4.1-3). Με τον τρόπο αυτόν τα ελεύθερα μήκη των δοκών (π.χ. από τη δεξιά παρεία ενός υποστυλώματος έως την αριστερή παρεία του γειτονικού του) και τα ελεύθερα ύψη των στύλων (π.χ. από την άνω παρεία της δοκού δαπέδου έως την κάτω παρεία της δοκού οροφής) έχουν τις ίδιες τιμές όπως και στον πραγματικό φορέα. Έτσι, τα ακραία τμήματα των δομικών στοιχείων ενός πλαισίου που συμβάλλουν σε έναν κόμβο σχηματίζουν τους λεγόμενους *απολύτως στερεούς κόμβους*. Στα επαγγελματικά προγράμματα ανάλυσης/διαστασιολόγησης κατασκευών, η προσομοίωση αυτή γίνεται κατά κανόνα αυτόματα κατόπιν σχετικής επιλογής του χρήστη. Σημειώνεται πάντως ότι σε συμβατικές κατασκευές, όπως αυτές του σχήματος 2.4.1-3, η απλοποιημένη προσομοίωση πλαισίων χωρίς απολύτως στερεούς κόμβους (όπου π.χ. το μήκος του γραμμικού πεπερασμένου στοιχείου που προσομοιώνει μία δοκό ισούται με την αξονική απόσταση των εκατέρωθεν υποστυλωμάτων και συνεπώς είναι μεγαλύτερο από το ελεύθερο μήκος της πραγματικής δοκού) δεν δημιουργεί γενικώς αξιόλογες αποκλίσεις στα αποτελέσματα.



Προσομοίωση των πλαισιακών κόμβων με απολύτως στερεούς βραχίονες



Απλοποιημένη προσομοίωση των πλαισιακών κόμβων



Προσομοίωση επίπεδου πλαισίου Ο/Σ με στερεούς βραχίονες (αριστ.) και χωρίς (δεξιά)

Σχ. 2.4.1-3 Προσομοίωση πλαισιακών κατασκευών από χάλυβα και οπλισμένο σκυρόδεμα.

Σημειώνεται προκαταρκτικά ότι σε σύγκριση με τα δικτυώματα, τα πλαίσια εμφανίζουν τις εξής χαρακτηριστικές διαφορές:

(α) Σε αντίθεση προς τους κόμβους ενός δικτυώματος, οι οποίοι συνιστούν πλήρεις αρθρωσεις και εμφανίζουν μόνο μετατοπίσεις κατά  $X$  και  $Z$ , οι κόμβοι ενός πλαισιακού φορέα είναι γενικώς μονολιθικοί και εμφανίζουν γενικά τόσο μετατοπίσεις όσο και στροφές περί τον άξονα  $Y$ . Συνεπώς, κάθε κόμβος ενός επίπεδου πλαισίου έχει τρεις ΒΕ (και όχι μόνο δύο ΒΕ όπως οι κόμβοι των δικτυωμάτων): δύο μεταφορικούς ΒΕ ( $u_x, u_z$ ) και έναν στροφικό ΒΕ ( $\varphi = \varphi_y$ ).

(β) Τα δομικά στοιχεία ενός πλαισίου (δοκοί, στύλοι) καταπονούνται όχι μόνο σε διάταση (όπως οι ράβδοι ενός ιδανικού δικτυώματος), αλλά και σε κάμψη/διάτμηση. Συνεπώς απαιτείται η χρήση πεπερασμένων στοιχείων που παραλαμβάνουν όχι μόνο αξονικές δυνάμεις (όπως οι ράβδοι), αλλά επιπλέον ροπές και τέμνουσες δυνάμεις. Απαιτείται δηλαδή η ανάπτυξη ενός "διευρυμένου" μητρώου στιβαρότητας γραμμικών στοιχείων  $\mathbf{K}^e$ , το οποίο να διαθέτει αυτή τη δυνατότητα. Αυτό θα γίνει στις παραγράφους 2.4.3-Γ και Δ1.

(γ) Τα πεπερασμένα στοιχεία ενός πλαισίου δεν είναι οπωσδήποτε αφόριστα (όπως είναι εξ ορισμού οι ράβδοι ενός ιδανικού δικτυώματος). Συνεπώς, το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  των κομβικών δυνάμεων του φορέα (που στα δικτυώματα εμπεριέχει μόνο αμιγώς κομβικά φορτία  $\mathbf{f}$  και αντιδράσεις στήριξης  $\mathbf{r}$ ) πρέπει να "διευρυνθεί" προκειμένου να συμπεριλάβει και τις επιρροές από τα φορτία των στοιχείων. Οι επιρροές αυτές συνοψίζονται -όπως θα δούμε πιο κάτω- στο *διάνυσμα κομβικών φορτίων*  $\mathbf{s}^{oe}$  κάθε στοιχείου  $e$ , το οποίο στα ιδανικά δικτυώματα ήταν εξ ορισμού μηδενικό (βλ. [Παρατήρηση](#) στη § 2.3.3-Γ). Το διάνυσμα  $\mathbf{s}^{oe}$  αποτελεί αντικείμενο της § 2.4.3-Δ2.

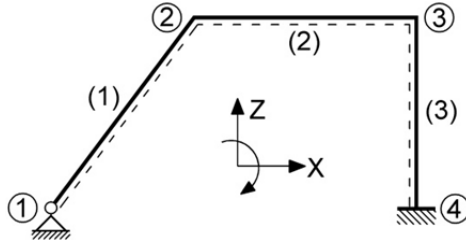
(δ) Οι στήριξεις του φορέα δεν είναι μόνο αρθρωτές (όπως στα δικτυώματα), αλλά μπορεί να είναι και πλήρεις πακτώσεις (δηλ. κόμβοι στήριξης με μηδενικό στροφικό ΒΕ). Αυτό σημαίνει ότι για τον καθορισμό του δεσμευμένου μητρώου στιβαρότητας  $\mathbf{K}_R$  διαγράφονται και εκείνες οι σειρές και στήλες του ελεύθερου μητρώου στιβαρότητας  $\mathbf{K}$ , οι οποίες αντιστοιχούν σε μηδενικούς στροφικούς ΒΕ (§ 2.4.4-Δ). Αντίστοιχα προσδιορίζεται και το δεσμευμένο διάνυσμα  $\mathbf{p}_R$  των φορτιστικών όρων.

Τα παραπάνω σημεία διαφοροποιούν την ανάλυση πλαισιακών κατασκευών με τη ΜΠΣ έναντι της ανάλυσης δικτυωμάτων, χωρίς όμως να αλλάζουν την αλληλουχία των υπολογιστικών βημάτων. Έτσι, στις ακόλουθες παραγράφους θα επιλυθεί με τη ΜΠΣ το πλαίσιο του παραδείγματός μας (Σχ. 2.4.1-1) ακολουθώντας τα ίδια ακριβώς βήματα όπως και για το δικτύωμα της § 2.3. Η παρουσίαση θα είναι συντομότερη, αλλά -χάριν εμπέδωσης της ορολογίας, των συμβολισμών και της ίδιας της διαδικασίας επίλυσης- χωρίς ιδιαίτερη προσπάθεια να αποφευχθούν ορισμένες επαναλήψεις.

## 2.4.2 Βήμα 1<sup>ο</sup>: Η διακριτοποίηση του φορέα (πλαisiού) και της φόρτισης

### A. Καθορισμός και αρίθμηση των κόμβων και στοιχείων του φορέα

Ως κόμβοι ενός γραμμικού φορέα θεωρούνται γενικώς εκείνα τα σημεία του, μεταξύ των οποίων υπάρχουν ευθύγραμμα στοιχεία σταθερής καθ' όλο το μήκος τους διατομής (Σημ.: Για περισσότερα περί κόμβων βλ. § 2.5.1). Τα στοιχεία αυτά αποτελούν τα πεπερασμένα στοιχεία του φορέα. Συνεπώς, το πλαίσιο του παραδείγματός μας (Σχ. 2.4.1-1) διαθέτει τέσσερεις κόμβους ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) και τρία πεπερασμένα στοιχεία ( $e = 1, 2, 3$ ), όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4.2-1.



Σχ. 2.4.2-1 Αρίθμηση κόμβων και στοιχείων του διακριτοποιημένου φορέα.

Παρατηρούμε ότι ως κόμβοι του πλαισιού έχουν επιλεγεί εκείνα τα σημεία στα οποία είτε υπάρχουν δεσμεύσεις των μετακινήσεων (δηλ. στηρίξεις οιοδήποτε είδους, εδώ: κόμβοι 1 και 4) είτε αλλάζει η διεύθυνση του άξονα του φορέα (εδώ: κόμβοι 2 και 3). Για τον λόγο αυτόν η "τοπολογία" των κόμβων μπορεί να χαρακτηριστεί ως "φυσική". Όπως θα δούμε αργότερα, σε γραμμικούς φορείς που περιλαμβάνουν καμπύλα δομικά στοιχεία ή/και δομικά στοιχεία μεταβλητής διατομής, οι θέσεις των κόμβων δεν μπορούν να προσδιοριστούν με έναν τέτοιο "φυσικό" και πρακτικά μονοσήμαντο τρόπο. Το ίδιο ισχύει για επιφανειακούς φορείς και φορείς όγκου.

Τονίζεται ότι η σειρά αρίθμησης τόσο των κόμβων όσο και των πεπερασμένων στοιχείων έχει τυπικό (συμβατικό) χαρακτήρα και ως εκ τούτου δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της επίλυσης, τα οποία αναφέρονται στο πραγματικό, φυσικό φαινόμενο της επιπόνησης του φορέα.

#### Παρατηρήσεις

(1) Τα ευθύγραμμα πεπερασμένα στοιχεία πλαισιακών φορέων μπορεί να είναι οριζόντιες δοκοί, κατακόρυφα υποστυλώματα ή κεκλιμένες δοκοί. Χάρην συντομίας, όλα αυτά τα στοιχεία χαρακτηρίζονται ως *πεπερασμένα στοιχεία δοκού*. Ενίοτε συναντάει κανείς και τον όρο *πεπερασμένο στοιχείο δοκού-στύλου*.

(2) Υπενθυμίζεται ότι οι αριθμοί των κόμβων γράφονται ως *κάτω δείκτες* των διαφόρων μεγεθών που αναφέρονται στους κόμβους του φορέα, ενώ οι αριθμοί των στοιχείων γράφονται ως *άνω δείκτες* των διαφόρων μεγεθών που αφορούν στα στοιχεία και μπαίνουν σε παρένθεση προς αποφυγή σύγχυσης με εκθέτες (βλ. Σχ. 2.4.2-1).

### B. Καθορισμός του καθολικού συστήματος αναφοράς

Η μελέτη του πλαισιού μας θα γίνει -όπως και για το δικτύωμα της § 2.3- στο επίπεδο X-Z (βλ. Σχ. 2.4.2-1).

**Γ. Τα στατικά μεγέθη του διακριτοποιημένου φορέα και οι ΒΕ του**

Με τον καθορισμό των κόμβων έχει γίνει επί της ουσίας η *διακριτοποίηση του φορέα*. Η επίλυση του διακριτοποιημένου φορέα αφορά πλέον ουσιαστικά μόνο στον υπολογισμό των άγνωστων κομβικών μετατακινήσεων, από τις οποίες προκύπτουν στη συνέχεια όλα τα υπόλοιπα στατικά μεγέθη.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στο τέλος της εισαγωγικής παραγράφου 2.4.1, κάθε κόμβος  $k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) του αποδεδειγμένου από τις στηρίξεις του (δηλ. "ελεύθερου") πλαισιακού φορέα μας μπορεί να εμφανίσει τρεις μετακινήσεις: Δύο μετατοπίσεις,  $u_{kX}$  κατά  $X$  και  $u_{kZ}$  κατά  $Z$ , και μία στροφή  $\varphi_k$  περί τον κάθετο στο επίπεδο  $X-Z$  άξονα  $Y$  (*Σημ.*: Ο πληρέστερος συμβολισμός των στροφών θα ήταν  $\varphi_{kY}$ , αλλά χάριν απλοποίησης παραλείπεται ο κάτω δείκτης  $Y$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Με άλλα λόγια: Κάθε πλαισιακός κόμβος διαθέτει δύο δρομικούς και έναν στροφικό ΒΕ. Οι τρεις αυτές μετακινήσεις συνθέτουν το διάνυσμα στήλης  $u_k$  των κομβικών μετακινήσεων στον κόμβο  $k$  (Σχ. 2.4.2-2(α)):

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{1Z} \\ \varphi_1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{2X} \\ u_{2Z} \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad u_3 = \begin{bmatrix} u_{3X} \\ u_{3Z} \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad u_4 = \begin{bmatrix} u_{4X} \\ u_{4Z} \\ \varphi_4 \end{bmatrix}, \quad (2.4.2-1)$$

όπου ο κάτω αριθμητικός δείκτης  $k$  είναι ο αριθμός του εκάστοτε κόμβου του φορέα. Συνολικά έχουμε για ολόκληρο τον φορέα το  $12 \times 1$  διάνυσμα στήλης  $u$  όλων των κομβικών του μετακινήσεων:

*Διάνυσμα κομβικών μετακινήσεων του φορέα*

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{1Z} \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{4X} \\ u_{4Z} \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad \eta \quad u^T = \begin{bmatrix} u_1^T & u_2^T & u_3^T & u_4^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1X} & u_{1Z} & \varphi_1 & u_{2X} & u_{2Z} & \varphi_2 & u_{3X} & u_{3Z} & \varphi_3 & u_{4X} & u_{4Z} & \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (2.4.2-2)$$

Σημείωση 1.

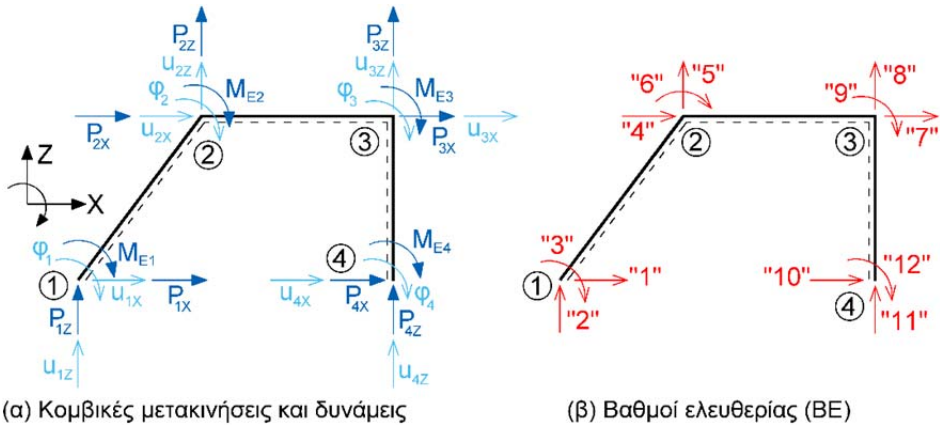
Υπενθυμίζεται ότι το διάνυσμα σειράς  $u^T$  είναι το ανάστροφο του διανύσματος στήλης  $u$ , και χρησιμοποιείται εδώ χάριν οικονομίας χώρου. Αντιστοίχως ισχύει:  $u = [u_{1X} \ u_{1Z} \ \varphi_1 \ u_{2X} \ u_{2Z} \ \varphi_2 \ u_{3X} \ u_{3Z} \ \varphi_3 \ u_{4X} \ u_{4Z} \ \varphi_4]^T$ .

Τονίζεται ότι το  $12 \times 1$  διάνυσμα  $u$  των κομβικών μετακινήσεων περιλαμβάνει όλες τις μετακινήσεις των κόμβων του φορέα, δηλαδή ακόμη και αυτές που λόγω των δεδομένων στηρίξεων είναι εξαρχής γνωστές (μηδενικές ή προδιαγεγραμμένες λόγω καταναγκασμού). Σε διαφορετική λεκτική διατύπωση μπορούμε να πούμε ότι ο αποδεδειγμένος από τις στηρίξεις του ("ελεύθερος") φορέας μας έχει 12 ΒΕ: "1",

"2", ..., "12", στους οποίους αντιστοιχούν οι 12 μετακινήσεις  $u_n$  ( $n = 1, \dots, 12$ ), όπου ο δείκτης  $n$  αναφέρεται στον  $n$ -στό ΒΕ και όχι στον  $n$ -στό κόμβο (Σχ. 2.4.2-2(β)). Οι 12 αυτές μετακινήσεις  $u_n$  συνθέτουν ένα  $12 \times 1$  διάνυσμα στήλης που είναι ταυτόσημο με το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  που ορίσαμε προηγουμένως:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{1Z} \\ \varphi_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ u_{4X} \\ u_{4Z} \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{u}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11} \ u_{12}]$$

$$= [u_{1X} \ u_{1Z} \ \varphi_1 \ u_{2X} \ u_{2Z} \ \varphi_2 \ u_{3X} \ u_{3Z} \ \varphi_3 \ u_{4X} \ u_{4Z} \ \varphi_4]. \quad (2.4.2-3)$$



Σχ. 2.4.2-2 Κομβικά στατικά μεγέθη και ΒΕ του ελεύθερου φορέα.

Οι λόγω των στηρίξεων του πλαισίου μηδενικές μετακινήσεις είναι οι:  $u_{1X}=u_1=0$ ,  $u_{1Z}=u_2=0$  στον κόμβο 1 και  $u_{4X}=u_{10}=0$ ,  $u_{4Z}=u_{11}=0$ ,  $\varphi_4=u_{12}=0$  στον κόμβο 4 (Σχ. 2.4.2-3). Οι βαθμοί ελευθερίας που αντιστοιχούν σ' αυτές, δηλαδή οι ΒΕ "1", "2" στον κόμβο 1 και "10", "11", "12" στον κόμβο 4, χαρακτηρίζονται ως *μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας*. Οι υπόλοιπες μετακινήσεις είναι άγνωστες.

Σημείωση 2

Όπως ήδη γνωρίζουμε (βλ. § 2.3.4-Δ3), σε "χειρωνακτικές" επιλύσεις φορέων οι *συνθήκες στήριξης* λαμβάνονται συχνά εξαρχής υπόψη, έτσι ώστε εξαρχής να περιοριστεί και το πλήθος των αγνώστων του προβλήματος. Οι μηδενικοί ΒΕ συμβολίζονται με ένα μηδενικό "0" και δεν συμμετέχουν στην αρίθμηση των ΒΕ του φορέα. Συνεπώς, στην περίπτωση του πλαισίου μας θα είχαμε μόνο 7 ΒΕ, τους "3", "4", "5", "6", "7", "8" και "9", οι οποίοι θα αριθμούσαν ως "1", "2", "3", "4", "5", "6" και "7" αντιστοίχως (Σχ. 2.4.2-3, δεξιά). Αντίθετα, κατά τη συστηματική κωδικοποίηση της ΜΠΣ σε Η/Υ, οι συνθήκες στήριξης λαμβάνονται υπόψη *όχι εξαρχής*, αλλά στο τελευταίο

στάδιο της ανάλυσης, πριν την επίλυση του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων ισοροπίας. Στα επόμενα θα ακολουθήσουμε τη γενικότερη αυτή πορεία.

Η διακριτοποίηση του προβλήματος περιλαμβάνει όχι μόνο τη διακριτοποίηση του δεδομένου φορέα, αλλά και την *αντίστοιχη διακριτοποίηση της φόρτισης*. Με άλλα λόγια: Σε κάθε ΒΕ του ελεύθερου φορέα, δηλαδή σε κάθε κομβική μετακίνηση (μετατόπιση ή στροφή), αντιστοιχίζεται μία κομβική δύναμη, όπου ο όρος "δύναμη" χρησιμοποιείται ως γενική έννοια που περιλαμβάνει και ροπές: Στις δύο κομβικές μετατοπίσεις  $u_{kx}$  και  $u_{kz}$  αντιστοιχούν οι δύο κομβικές δυνάμεις  $P_{kx}$  κατά X και  $P_{kz}$  κατά Z, ενώ στην κομβική στροφή  $\phi_k$  αντιστοιχεί η κομβική ροπή  $M_{Ek}$ , όπου ο κάτω δείκτης E (Εξωτερικές επιρροές) τοποθετείται προς διάκριση από άλλες ροπές (Σχ. 2.4.2-2(α)). (Σημ.: Ο πληρέστερος συμβολισμός των ροπών θα ήταν  $M_{Eky}$ , αλλά χάριν απλοποίησης παραλείπεται ο κάτω δείκτης Y, δεδομένου ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Συνολικά, στις 12 κομβικές μετακινήσεις  $\mathbf{u}$  του φορέα, αντιστοιχούν οι 12 κομβικές δυνάμεις  $\mathbf{p}$ , οι οποίες συμπεριλαμβάνουν όλες τις εξωτερικές επιρροές που ασκούνται στους κόμβους του. Το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  ονομάζεται (καταχρηστικά όμως, λόγω της συμπερίληψης σ' αυτό των αντιδράσεων στήριξης) και *διάνυσμα κομβικών φορτίων* ή *διάνυσμα φόρτισης του ελεύθερου φορέα* ή, χάριν συντομίας, *ελεύθερο διάνυσμα φόρτισης*.

Οι τρεις δυνάμεις κάθε κόμβου k συνθέτουν το διάνυσμα στήλης  $\mathbf{p}_k$  των κομβικών δυνάμεων στον κόμβο k (Σχ. 2.4.2-2(α)):

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Z} \\ M_{E1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} P_{2X} \\ P_{2Z} \\ M_{E2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} P_{3X} \\ P_{3Z} \\ M_{E3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} P_{4X} \\ P_{4Z} \\ M_{E4} \end{bmatrix} \quad (2.4.2-4)$$

Συνολικά έχουμε για ολόκληρο τον φορέα το  $12 \times 1$  διάνυσμα στήλης  $\mathbf{p}$  όλων των κομβικών του δυνάμεων:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Z} \\ M_{E1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ P_{4X} \\ P_{4Z} \\ M_{E4} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{p}^T = [\mathbf{p}_1^T \mathbf{p}_2^T \mathbf{p}_3^T \mathbf{p}_4^T] \\ = [P_{1X} \ P_{1Z} \ M_{E1} \ P_{2X} \ P_{2Z} \ M_{E2} \ P_{3X} \ P_{3Z} \ M_{E3} \ P_{4X} \ P_{4Z} \ M_{E4}] \quad (2.4.2-5)$$

Όπως για τις κομβικές μετακινήσεις, έτσι και εδώ μπορούμε να πούμε ότι σε κάθε έναν από τους 12 ΒΕ του φορέα αντιστοιχεί μία κομβική δύναμη  $P_n$  ( $n = 1, \dots, 12$ ), όπου και πάλι ο δείκτης n αναφέρεται στον n-στό βαθμό ελευθερίας (και όχι στον n-στό κόμβο). Οι 12 κομβικές δυνάμεις συνθέτουν ένα  $12 \times 1$  διάνυσμα στήλης που είναι ταυτόσημο με το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  που ορίσαμε προηγουμένως:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Z} \\ M_{E1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ P_{4X} \\ P_{4Z} \\ M_{E4} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \mathbf{p}^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ P_4 \ P_5 \ P_6 \ P_7 \ P_8 \ P_9 \ P_{10} \ P_{11} \ P_{12}] \quad (2.4.2-6)$$

$$= [P_{1X} \ P_{1Z} \ M_{E1} \ P_{2X} \ P_{2Z} \ M_{E2} \ P_{3X} \ P_{3Z} \ M_{E3} \ P_{4X} \ P_{4Z} \ M_{E4}]$$

Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι στα ιδανικά δικτυώματα, αλλά και γενικότερα σε φορείς με αφόρτιστα πεπερασμένα στοιχεία, το διάνυσμα  $\mathbf{p}$  των κομβικών δυνάμεων του ελεύθερου φορέα λόγω εξωτερικών επιρροών συντίθεται από τα δεδομένα εξωτερικά μοναχικά κομβικά φορτία  $\mathbf{f}$  και τις -κατ' αρχάς άγνωστες- αντιδράσεις στήριξης  $\mathbf{r}$ , δηλαδή (βλ. § 2.3.2-Γ):

*Διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων του φορέα λόγω εξωτερικών επιρροών για φορείς με αφόρτιστα πεπερασμένα στοιχεία*

$$\mathbf{p} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (2.4.2-7)$$

Σε πλαίσιακούς φορείς όμως με κατά κανόνα φορτισμένα στοιχεία περιλαμβάνει επιπλέον και τις επιρροές από τα φορτία των στοιχείων. Οι επιρροές αυτές από όλα τα στοιχεία συνοψίζονται -όπως θα δούμε πιο κάτω (§ 2.4.4-A2)- στο διάνυσμα  $\mathbf{s}^0$  των ισοδύναμων κομβικών φορτίων του φορέα λόγω φόρτισης των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, το διάνυσμα  $\mathbf{s}^0$  περιέχει τα επιράβδια σκέλη των φορτίων διατομής στα άκρα των στοιχείων, τα οποία ενεργούν επί των κόμβων με αντίθετη φορά από εκείνη των επιρράβδιων σκελών. Συνεπώς, ισχύει γενικότερα:

*Διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων του φορέα λόγω εξωτερικών επιρροών*

$$\mathbf{p} = \mathbf{f} + \mathbf{r} - \mathbf{s}^0 \quad (2.4.2-8)$$

Τα τρία διανύσματα  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{s}^0$  έχουν την ίδια ακριβώς δομή όπως το διάνυσμα  $\mathbf{p}$ , δηλαδή:

*Διάνυσμα εξωτερικών κομβικών φορτίων του φορέα*

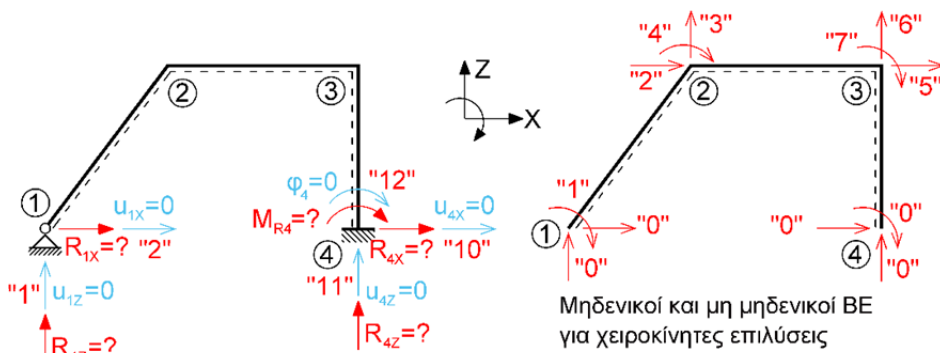
*Διάνυσμα αντιδράσεων στήριξης του φορέα*

*Διάνυσμα κομβικών φορτίων του φορέα λόγω φόρτισης των στοιχείων του*

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Z} \\ M_{L1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ F_{4X} \\ F_{4Z} \\ M_{L4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ R_{10} \\ R_{11} \\ R_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{1X} \\ R_{1Z} \\ M_{R1} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ R_{4X} \\ R_{4Z} \\ M_{R4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} S_1^0 \\ S_2^0 \\ S_3^0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_{10}^0 \\ S_{11}^0 \\ S_{12}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1X}^0 \\ S_{1Z}^0 \\ M_1^0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ S_{4X}^0 \\ S_{4Z}^0 \\ M_4^0 \end{bmatrix} \quad (2.4.2-9)$$

όπου ο κάτω δείκτης L στις ροπές δείχνει ότι πρόκειται για εξωτερική ροπή-φορτίο, ενώ ο κάτω δείκτης R δείχνει ότι πρόκειται για ροπή αντίδρασης (ροπή πάκτωσης). (Σημ.: Ο πληρέστερος συμβολισμός των ροπών θα έπρεπε να φέρει και τον κάτω δείκτη Y, ο οποίος όμως παραλείπεται χάριν απλοποίησης). Το διάνυσμα  $s^o$  των κομβικών φορτίων του φορέα λόγω φόρτισης των στοιχείων του χαρακτηρίζεται και ως διάνυσμα των *ισοδύναμων* κομβικών φορτίων του φορέα.

Παρατηρούμε ότι στις κομβικές δυνάμεις  $P_1=P_{1X}$ ,  $P_2=P_{1Z}$  στον κόμβο 1 και  $P_{4X}=P_{10}$ ,  $P_{4Z}=P_{11}$ ,  $M_{E4}=P_{12}$  στον κόμβο 4, οι οποίες αντιστοιχούν στους μηδενικούς βαθμούς ελευθερίας "1", "2" στον κόμβο 1 και "10", "11", "12" στον κόμβο 4, αντιστοίχως, συμπεριλαμβάνονται οι αντιδράσεις στήριξης του πλαισίου μας και συνεπώς δεν είναι εξαρχής γνωστές (Σχ. 2.4.2-3). Οι υπόλοιπες κομβικές δυνάμεις, που αντιστοιχούν στους *μη* δεσμευμένους BE "3", "4", "5", "6", "7", "8" και "9" (κατά την έννοια των οποίων δεν υφίστανται αντιδράσεις στήριξης), προσδιορίζονται από τη δεδομένη φόρτιση κόμβων και στοιχείων και είναι γνωστές εξαρχής (μηδενικές ή μη). Σ' αυτές θα επανέλθουμε αργότερα κατά τη θεώρηση των συνθηκών ισοροπίας (§ 2.4.4-A2).



Γνωστές κομβικές μετακινήσεις:  $u_{1X}=u_1=0$ ,  $u_{1Z}=u_2=0$ ,  $u_{4X}=u_{10}=0$ ,  $u_{4Z}=u_{11}=0$ ,  $\phi_4=u_{12}=0$   
 → Αγνωστές αντιδράσεις στηρίξεων:  $R_{1X}=R_1$ ,  $R_{1Z}=R_2$ ,  $R_{4X}=R_{10}$ ,  $R_{4Z}=R_{11}$ ,  $M_{R4}=R_{12}$   
 Μηδενικοί BE: "1", "2", "10", "11", "12"

Αγνωστές κομβικές μετακινήσεις:  $\phi_1=u_3$ ,  $u_{2X}=u_4$ ,  $u_{2Z}=u_5$ ,  $\phi_2=u_6$ ,  $u_{3X}=u_7$ ,  $u_{3Z}=u_8$ ,  $\phi_3=u_9$   
 → Γνωστές κομβικές δυνάμεις:  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$ ,  $P_6$ ,  $P_7$ ,  $P_8$ ,  $P_9$   
 Μη μηδενικοί BE: "3", "4", "5", "6", "7", "8", "9"

Σχ. 2.4.2-3 Συνθήκες στήριξης του φορέα και μηδενικοί βαθμοί ελευθερίας.

#### Δ. Συσχέτιση των κομβικών στατικών μεγεθών: Το μητρώο σπιβαρότητας του ελεύθερου φορέα

Μέσα στα όρια της γραμμικής θεωρίας, κάθε μία από τις 12 κομβικές δυνάμεις του ελεύθερου φορέα μας αποτελεί γραμμική συνάρτηση των 12 κομβικών μετακινήσεών του. Οι 12 αυτές γραμμικές συναρτήσεις συνιστούν τις *εξισώσεις σπιβαρότητας του ελεύθερου φορέα* και γράφονται τυπικά σε μητρωική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \dots \\ \dots \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & \dots & \dots & K_{1,12} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & \dots & \dots & K_{2,12} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & \dots & \dots & K_{3,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{10,1} & K_{10,2} & K_{10,3} & K_{10,4} & K_{10,5} & \dots & \dots & K_{10,12} \\ K_{11,1} & K_{11,2} & K_{11,3} & K_{11,4} & K_{11,5} & \dots & \dots & K_{11,12} \\ K_{12,1} & K_{12,2} & K_{12,3} & K_{12,4} & K_{12,5} & \dots & \dots & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ \dots \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{bmatrix} \quad (2.4.2-10\alpha)$$

και συμβολικά

$$\mathbf{p} = \mathbf{K}\mathbf{u} \quad \text{ή} \quad [P_m] = [K_{mn}][u_n], \quad (2.4.2-10\beta)$$

όπου βέβαια οι συντελεστές  $K_{mn}$  ( $m, n = 1, \dots, 12$ ) δεν είναι ακόμη γνωστοί και θα πρέπει να υπολογιστούν. Οι παραπάνω εξισώσεις εμπεριέχουν την παραδοχή ότι αν οι κομβικές μετακινήσεις  $\mathbf{u}$  του φορέα είναι μηδενικές, τότε και οι κομβικές δυνάμεις  $\mathbf{p}$  είναι μηδενικές (δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη η περίπτωση της προέντασης).

### Προσοχή

Όπως γνωρίζουμε (βλ. § 2.3.2-Δ), το αντίστροφο δεν ισχύει. Διότι, αν ο αποδεσμευμένος από τις στηρίξεις του ("ελεύθερος") φορέας υποστεί μία μετακίνηση απολύτως στερεού σώματος, τότε είναι αυτονόητο ότι παραμένει άτονος. Μαθηματικά αυτό σημαίνει ότι το μητρώο  $\mathbf{K}$  δεν αντιστρέφεται και συνεπώς δεν μπορούμε να γράψουμε  $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{p}$ , δηλαδή δεν μπορούμε από τις εξισώσεις (2.4.2-10) να υπολογίσουμε τις μετακινήσεις  $\mathbf{u}$ .

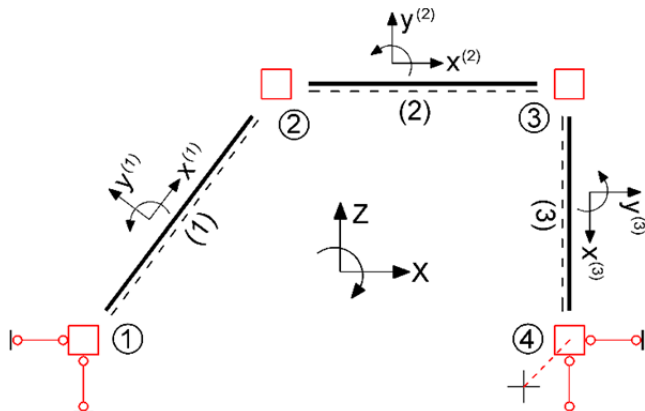
Το μη αντιστρέψιμο  $12 \times 12$  μητρώο  $\mathbf{K} = [K_{mn}]$ , ( $m, n = 1, \dots, 12$ ), είναι το *μητρώο στιβαρότητας του ελεύθερου φορέα* (ονομάζεται επίσης *ελεύθερο μητρώο στιβαρότητας του φορέα*) και εμπεριέχει τρεις γραμμικές εξαρτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στις τρεις κινήσεις στερεού σώματος στο επίπεδο X-Z: Δύο παράλληλες μεταθέσεις (κατά X και κατά Z) και μία στροφή περί τον άξονα Y. Οι συντελεστές  $K_{mn}$  του μητρώου  $\mathbf{K}$  ονομάζονται *συντελεστές στιβαρότητας του φορέα* και για τη *φυσική ερμηνεία* τους ισχύουν όσα αναφέρθηκαν στην § 2.3.2-Δ.

Για τις ιδιότητες του ελεύθερου μητρώου στιβαρότητας  $\mathbf{K}$  ισχύουν επίσης όσα αναφέρθηκαν στην § 2.3.2-Δ.

### **E. Η διάσπαση του φορέα σε επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία**

Με δεδομένη τη διακριτοποίηση του φορέα προχωρούμε στη διάσπασή του στα επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία του, δηλαδή αποσπούμε ή αποσυνδέουμε τα πεπερασμένα στοιχεία από το σύμπλεγμα που συνιστά τον διακριτοποιημένο φορέα, προκειμένου στο επόμενο βήμα της διαδικασίας επίλυσης να τα μελετήσουμε ως ανεξάρτητα το ένα από το άλλο (Σχ. 2.4.2-4). Στο στάδιο αυτό δεν έχουμε πλέον ένα "συνεκτικό" φορέα, αλλά ένα ασύνδετο πλήθος πεπερασμένων στοιχείων και νοητών κόμβων. Στο παράδειγμά μας: τα τρία πεπερασμένα στοιχεία δοκού (1), (2), (3) και τους τέσσερεις κόμβους 1, 2, 3 και 4.

Επισημαίνεται ότι από πρακτική άποψη είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση της ακόλουθης διαδικασίας επίλυσης η θεώρηση των κόμβων ως ξεχωριστών υλικών σημείων (απειροστών διαστάσεων), στα οποία πριν τη διάσπαση του διακριτοποιημένου φορέα συνδέονταν (μονολιθικά ή αρθρωτά) τα πεπερασμένα στοιχεία του. Στο εξής οι (νοητοί) κόμβοι του πλαισιακού μας φορέα θα συμβολίζονται στα σχήματα με ένα μικρό τετράγωνο.



**Σχ. 2.4.2-4** Η διάσπαση του φορέα σε επί μέρους πεπερασμένα στοιχεία και τα τοπικά συστήματα αναφοράς.

Ακολουθεί η θεώρηση των μεμονωμένων πεπερασμένων στοιχείων, που συνιστά το δεύτερο βήμα της διαδικασίας επίλυσης φορέων με τη ΜΠΣ.

### 2.4.3 Βήμα 2<sup>ο</sup>: Η θεώρηση των μεμονωμένων πεπερασμένων στοιχείων

Η μηχανική (στατική) συμπεριφορά κάθε πεπερασμένου στοιχείου περιγράφεται πλήρως από τις σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των εντασιακών και παραμορφωσιακών μεγεθών του. Επίσης, γνωρίζουμε από την Κλασική Στατική ότι τα εντασιακά και παραμορφωσιακά μεγέθη σε οποιοδήποτε σημείο ενός γραμμικού δομικού στοιχείου μπορούν να υπολογιστούν με στοιχειώδεις διαδικασίες από τα εντασιακά και παραμορφωσιακά μεγέθη στα άκρα του (στους κόμβους του). Συνεπώς, η μηχανική (στατική) συμπεριφορά κάθε πεπερασμένου στοιχείου περιγράφεται πλήρως από τις σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των κομβικών εντασιακών και των κομβικών παραμορφωσιακών μεγεθών του.

Τα κομβικά μεγέθη έντασης συνοψίζονται στο διάνυσμα των *κομβικών δυνάμεων*  $\underline{s}^e$  (που στην περίπτωση του πεπερασμένου στοιχείου δοκού περιλαμβάνει όχι μόνο δυνάμεις, όπως στο στοιχείο ράβδου, αλλά και ροπές) και τα κομβικά μεγέθη παραμόρφωσης στο διάνυσμα των *κομβικών μετακινήσεων*  $\underline{u}^e$  (που στην περίπτωση του πεπερασμένου στοιχείου δοκού περιλαμβάνει όχι μόνο μετατοπίσεις, όπως στο στοιχείο ράβδου, αλλά και στροφές). Οι σχέσεις μεταξύ  $\underline{s}^e$  και  $\underline{u}^e$  αποτυπώνονται με τη βοήθεια του μητρώου στιβαρότητας  $\underline{K}^e$  και του διανύσματος φόρτισης  $\underline{s}^{oe}$  του πεπερασμένου στοιχείου δοκού. Ο υπολογισμός των  $\underline{K}^e$  και  $\underline{s}^{oe}$  αποτελεί το αντικείμενο των αμέσως επόμενων υποπαρagraφών.

### A. Αρίθμηση των κόμβων του στοιχείου και καθορισμός του τοπικού συστήματος αναφοράς

Για κάθε πεπερασμένο στοιχείο  $e$  του παραδείγματός μας ( $e = 1, 2, 3$ ) καθορίζεται ένα καρτεσιανό τοπικό σύστημα αναφοράς  $\{x^e, y^e\}$  σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην § 2.3.3-A. Τα τοπικά συστήματα αναφοράς φαίνονται στο σχήμα 2.3.2-4. Ο προσανατολισμός του τοπικού άξονα  $x^e$  καθορίζει ποιός κόμβος είναι ο κόμβος αρχής  $a$  και ποιός ο κόμβος τέλους  $b$  του στοιχείου.

#### Υπενθύμιση

Το  $e$  είναι άνω δείκτης και όχι εκθέτης. Όταν για τον άνω δείκτη  $e$  χρησιμοποιείται ο συγκεκριμένος αριθμός ενός στοιχείου, τότε ο αριθμός αυτός μπαίνει σε παρενθέσεις προς αποφυγή σύγχυσης με εκθέτη.

### B. Τα τοπικά κομβικά στατικά μεγέθη του πεπερασμένου στοιχείου

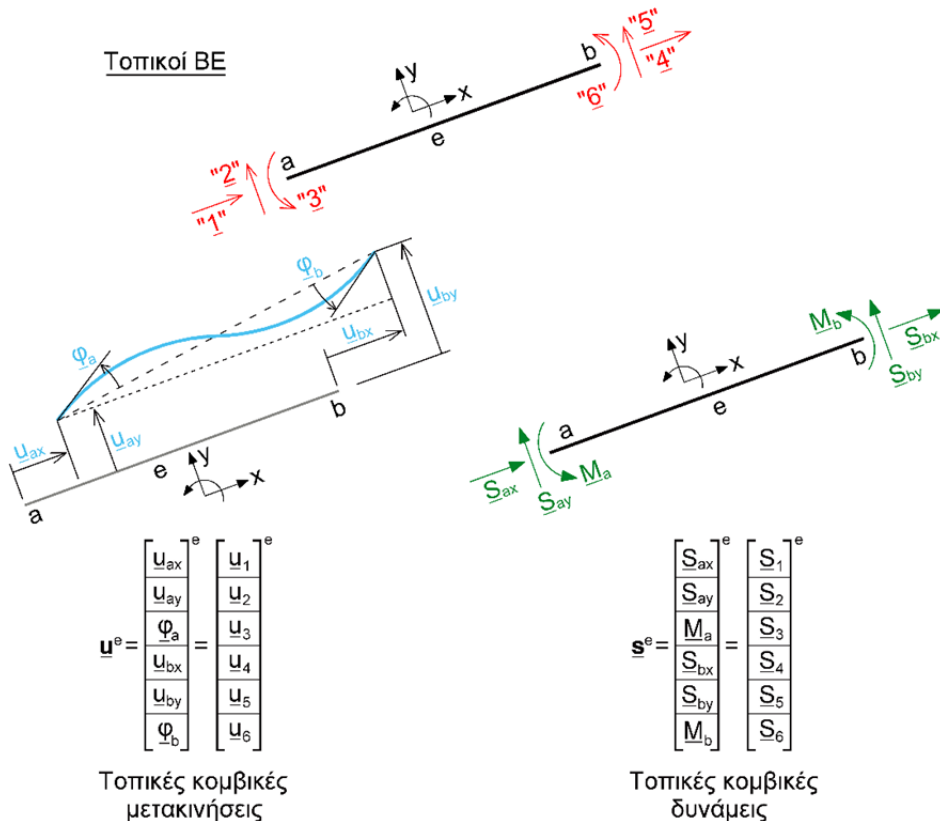
Με απώτερο στόχο τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας  $\mathbf{K}^e$  του πεπερασμένου στοιχείου δοκού, ορίζονται το διάνυσμα  $\underline{\mathbf{u}}^e$  των τοπικών κομβικών μετακινήσεων και το διάνυσμα  $\underline{\mathbf{s}}^e$  των αντίστοιχων τοπικών κομβικών δυνάμεων του στοιχείου  $e$ . Με την υπογράμμιση συμβολίζεται ο τοπικός χαρακτήρας των κομβικών μεγεθών. Η διεύθυνση και ο προσανατολισμός (η θετική φορά) τους ακολουθεί τους τοπικούς άξονες αναφοράς  $x^e$  και  $y^e$ .

Κάθε κόμβος ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  μπορεί στο επίπεδο  $x^e$ - $y^e$  να μετατοπιστεί κατά  $x^e$  και κατά  $y^e$ , και να στραφεί περί τον άξονα  $z^e$ , έχει δηλαδή δύο μεταφορικούς και έναν στροφικό BE. Συνολικά, το στοιχείο δοκού διαθέτει  $2 \times 3 = 6$  BE. Σ' αυτούς αντιστοιχούν οι 6 τοπικές μετακινήσεις  $\underline{\mathbf{u}}_{ax}^e, \underline{\mathbf{u}}_{ay}^e, \underline{\mathbf{\varphi}}_a^e, \underline{\mathbf{u}}_{bx}^e, \underline{\mathbf{u}}_{by}^e, \underline{\mathbf{\varphi}}_b^e$  των κόμβων αρχής  $a$  και τέλους  $b$ , οι οποίες μπορούν να συμβολιστούν ενιαία ως  $\underline{\mathbf{u}}_1^e, \underline{\mathbf{u}}_2^e, \underline{\mathbf{u}}_3^e, \underline{\mathbf{u}}_4^e, \underline{\mathbf{u}}_5^e$  και  $\underline{\mathbf{u}}_6^e$  αντιστοίχως (Σχ. 2.4.3-1). Το διάνυσμα  $\underline{\mathbf{u}}^e$  των τοπικών κομβικών μετακινήσεων του στοιχείου δοκού ορίζεται ως εξής:

$$\underline{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_{ax} \\ \underline{\mathbf{u}}_{ay} \\ \underline{\mathbf{\varphi}}_a \\ \underline{\mathbf{u}}_{bx} \\ \underline{\mathbf{u}}_{by} \\ \underline{\mathbf{\varphi}}_b \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_1 \\ \underline{\mathbf{u}}_2 \\ \underline{\mathbf{u}}_3 \\ \underline{\mathbf{u}}_4 \\ \underline{\mathbf{u}}_5 \\ \underline{\mathbf{u}}_6 \end{bmatrix}^e \quad \text{ή} \quad \underline{\mathbf{u}}^{eT} = \left[ \underline{\mathbf{u}}_{ax} \ \underline{\mathbf{u}}_{ay} \ \underline{\mathbf{\varphi}}_a \ \underline{\mathbf{u}}_{bx} \ \underline{\mathbf{u}}_{by} \ \underline{\mathbf{\varphi}}_b \right]^e \quad (2.4.3-1)$$

$$= \left[ \underline{\mathbf{u}}_1 \ \underline{\mathbf{u}}_2 \ \underline{\mathbf{u}}_3 \ \underline{\mathbf{u}}_4 \ \underline{\mathbf{u}}_5 \ \underline{\mathbf{u}}_6 \right]^e,$$

όπου ο άνω δείκτης  $e$  στις αγκύλες αναφέρεται σε κάθε συνιστώσα του διανύσματος (Σημ.: Ο πληρέστερος συμβολισμός των τοπικών στροφών θα ήταν  $\underline{\mathbf{\varphi}}_{az}$  και  $\underline{\mathbf{\varphi}}_{bz}$ , αλλά χάριν απλοποίησης παραλείπεται ο δείκτης  $z$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης). Επειδή οι 6 BE νοούνται κατά την έννοια των τοπικών αξόνων αναφοράς  $x^e$  και  $y^e$ , χαρακτηρίζονται ως τοπικοί BE "1<sup>e</sup>", "2<sup>e</sup>", "3<sup>e</sup>", "4<sup>e</sup>", "5<sup>e</sup>", "6<sup>e</sup>" του στοιχείου  $e$ .



**Σχ. 2.4.3-1** Τοπικοί ΒΕ και τοπικά κομβικά μεγέθη του πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  (Χάριν αποσυμφόρησης παραλείπεται στα σχήματα ο άνω δείκτης  $e$ ).

Κατ' αναλογία ορίζεται και το διάνυσμα  $\underline{\mathbf{s}}^e$  των αντίστοιχων *τοπικών κομβικών δυνάμεων* (Σχ. 2.4.3-1). (Σημ.: Ο πληρέστερος συμβολισμός των τοπικών ροπών θα ήταν  $\underline{M}_{az}$  και  $\underline{M}_{bz}$ , αλλά χάριν απλοποίησης παραλείπεται ο κάτω δείκτης  $z$ , δεδομένου ότι δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης):

$$\underline{\mathbf{s}}^e = \begin{bmatrix} \underline{S}_{ax} \\ \underline{S}_{ay} \\ \underline{M}_a \\ \underline{S}_{bx} \\ \underline{S}_{by} \\ \underline{M}_b \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 \\ \underline{S}_4 \\ \underline{S}_5 \\ \underline{S}_6 \end{bmatrix}^e \quad \text{ή} \quad \underline{\mathbf{s}}^{eT} = \begin{bmatrix} \underline{S}_{ax} & \underline{S}_{ay} & \underline{M}_a & \underline{S}_{bx} & \underline{S}_{by} & \underline{M}_b \end{bmatrix}^e \quad (2.4.3-2)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_1 & \underline{S}_2 & \underline{S}_3 & \underline{S}_4 & \underline{S}_5 & \underline{S}_6 \end{bmatrix}^e$$

**Προσοχή**

Οι τοπικές κομβικές δυνάμεις  $\underline{S}_{ax}^e$ ,  $\underline{S}_{ay}^e$ ,  $\underline{M}_a^e$ ,  $\underline{S}_{bx}^e$ ,  $\underline{S}_{by}^e$  και  $\underline{M}_b^e$  δεν είναι παρά τα φορτία διατομής στα άκρα του αποσπασμένου από τον φορέα πεπερασμένου στοιχείου. Χάριν τυποποίησης και συστηματικής κωδικοποίησης της ΜΠΣ, τα τοπικά αυτά κομβικά

μεγέθη ορίζονται σε *αμφότερα τα άκρα του στοιχείου* ως θετικά κατά την έννοια των τοπικών αξόνων αναφοράς  $x^e$ ,  $y^e$ ,  $z^e$  του στοιχείου. Υπενθυμίζεται ότι στην Κλασική Στατική τα φορτία διατομής ορίζονται βάσει της ίνας αναφοράς και έχουν στο δεξιό άκρο  $b$  ενός στοιχείου αντίθετη φορά από εκείνη που έχουν στο αριστερό του άκρο  $a$ .

**Γ. Συσχέτιση των τοπικών κομβικών στατικών μεγεθών: Το τοπικό μητρώο στιβαρότητας και το τοπικό διάνυσμα φόρτισης του στοιχείου**

Μέσα στα όρια της γραμμικής θεωρίας, κάθε μία από τις 6 κομβικές δυνάμεις του στοιχείου δοκού αποτελεί γραμμική συνάρτηση των 6 κομβικών μετακινήσεων του. Υπό την παραδοχή ότι το στοιχείο δεν φορτίζεται μεταξύ των δύο κόμβων του, οι 6 αυτές γραμμικές συναρτήσεις (εξισώσεις) γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \underline{S}_1 \\ \underline{S}_2 \\ \underline{S}_3 \\ \underline{S}_4 \\ \underline{S}_5 \\ \underline{S}_6 \end{bmatrix}^{ue} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} & \underline{K}_{13} & \underline{K}_{14} & \underline{K}_{15} & \underline{K}_{16} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} & \underline{K}_{23} & \underline{K}_{24} & \underline{K}_{25} & \underline{K}_{26} \\ \underline{K}_{31} & \underline{K}_{32} & \underline{K}_{33} & \underline{K}_{34} & \underline{K}_{35} & \underline{K}_{36} \\ \underline{K}_{41} & \underline{K}_{42} & \underline{K}_{43} & \underline{K}_{44} & \underline{K}_{45} & \underline{K}_{46} \\ \underline{K}_{51} & \underline{K}_{52} & \underline{K}_{53} & \underline{K}_{54} & \underline{K}_{55} & \underline{K}_{56} \\ \underline{K}_{61} & \underline{K}_{62} & \underline{K}_{63} & \underline{K}_{64} & \underline{K}_{65} & \underline{K}_{66} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \underline{u}_3 \\ \underline{u}_4 \\ \underline{u}_5 \\ \underline{u}_6 \end{bmatrix}^e \quad (2.4.3-3\alpha)$$

ή συμβολικά

$$\underline{s}^{ue} = \underline{K}^e \underline{u}^e \quad \text{ή} \quad [\underline{S}_i]^{ue} = [\underline{K}_{ij}]^e [\underline{u}_j]^e, \quad (2.4.3-3\beta)$$

όπου ο άνω δείκτης  $u$  δείχνει ότι το αίτιο για την ανάπτυξη των κομβικών δυνάμεων  $\underline{s}_i^{ue}$  είναι αποκλειστικά και μόνο οι μετακινήσεις  $\underline{u}_j^e$  των κόμβων του στοιχείου  $e$ .

Είναι βέβαια σαφές ότι τα φορτία διατομής που αναπτύσσονται στα άκρα ενός δομικού στοιχείου, δηλαδή οι κομβικές του δυνάμεις  $\underline{s}_i^e$ , δεν εξαρτώνται μόνο από τις μετακινήσεις  $\underline{u}_j^e$  των άκρων αυτών, αλλά και από τα φορτία με τα οποία φορτίζεται το στοιχείο μεταξύ των άκρων του. Συνεπώς, το διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων  $\underline{s}^e$  ενός πεπερασμένου στοιχείου αποτελείται γενικώς από το άθροισμα των κομβικών δυνάμεων  $\underline{s}^{ue}$  που οφείλονται αποκλειστικά στις κομβικές του μετακινήσεις  $\underline{u}^e$  και των κομβικών δυνάμεων  $\underline{s}^{oe}$  που οφείλονται αποκλειστικά στη δεδομένη φόρτιση του στοιχείου μεταξύ των κόμβων του:

$$\underline{s}^e = \underline{s}^{ue} + \underline{s}^{oe}. \quad (2.4.3-4)$$

Το διάνυσμα  $\underline{s}^{oe}$  ονομάζεται *τοπικό διάνυσμα κομβικών φορτίων* (ή απλά *φόρτισης του στοιχείου*) και ο άνω δείκτης μηδέν είναι ο *δείκτης αιτίου* που συμβολίζει την *εξωτερική* φόρτιση. Στην ειδική περίπτωση που ένα στοιχείο  $e$  είναι αφόρτιστο, όπως π.χ. στο ιδανικό δίκτυμα που εξετάσαμε στην § 2.3, ισχύει  $\underline{s}^{oe} = \mathbf{0}$  και συνεπώς  $\underline{s}^e = \underline{s}^{ue}$ .

Συνολικά, η σχέση μεταξύ κομβικών μετακινήσεων και κομβικών δυνάμεων γράφεται:

$$\underline{s}^e = \underline{K}^e \underline{u}^e + \underline{s}^{oe}. \quad (2.4.3-5)$$

Επισημαίνεται ότι το αποσπασμένο από τον φορέα πεπερασμένο στοιχείο  $e$  δεν εδράζεται πουθενά και συνεπώς μπορεί να εκτελέσει μετακινήσεις απολύτως στερεού σώματος, λόγω των οποίων δεν αναπτύσσεται σ' αυτό ένταση (παραμένει άτονο) και συνεπώς οι κομβικές δυνάμεις του παραμένουν μηδενικές. Μαθηματικά διατυπωμένο: Το μητρώο  $\underline{\mathbf{K}}^e$  δεν αντιστρέφεται (δηλ. είναι ιδιάζον με μηδενική ορίζουσα  $\det \mathbf{K}^e = 0$ ) και συνεπώς δεν μπορούμε να γράψουμε  $\underline{\mathbf{u}}^e = (\mathbf{K}^e)^{-1} \underline{\mathbf{s}}^e$ .

Το μη αντιστρέψιμο  $6 \times 6$  μητρώο  $\underline{\mathbf{K}}^e = [\underline{\mathbf{K}}_{ij}^e]$ , ( $i, j = 1, \dots, 6$ ), είναι το *τοπικό μητρώο στιβαρότητας* του στοιχείου  $e$  και εμπεριέχει τρεις γραμμικές εξαρτήσεις, οι οποίες αντιστοιχούν στις τρεις κινήσεις στερεού σώματος στο επίπεδο  $x^e - y^e$ : Δύο παράλληλες μεταθέσεις (κατά  $x^e$  και κατά  $y^e$ ) και μία στροφή περί τον άξονα  $z^e$ .

Οι συντελεστές  $\underline{\mathbf{K}}_{ij}^e$  του μητρώου  $\underline{\mathbf{K}}^e$  ονομάζονται *τοπικοί συντελεστές στιβαρότητας* του στοιχείου και για τη *φυσική ερμηνεία* τους ισχύουν, τηρουμένων των αναλογιών, όσα αναφέρθηκαν στην § 2.3.3-Γ. Λόγω όμως της ιδιαίτερης βαρύτητας που έχει η κατανόηση της φυσικής ερμηνείας των  $\underline{\mathbf{K}}_{ij}^e$  επαναλαμβάνονται εδώ για το πεπερασμένο στοιχείο δοκού: Αν, αγνοώντας την όποια εξωτερική φόρτιση του στοιχείου, θεωρήσουμε την  $j$ -οστή από τις 6 κομβικές μετακινήσεις ίση με τη μονάδα και όλες τις υπόλοιπες ίσες με το μηδέν, τότε το διάνυσμα κομβικών δυνάμεων  $\underline{\mathbf{s}}^e$  προκύπτει ίσο με την  $j$ -οστή στήλη του μητρώου στιβαρότητας, δηλαδή:

$$\text{αν } \underline{u}_j^e = 1 \text{ και } \underline{u}_i^e = 0 \text{ (για } i \neq j\text{)}, \text{ τότε } \underline{\mathbf{s}}^e = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{S}}_1 \\ \underline{\mathbf{S}}_2 \\ \underline{\mathbf{S}}_3 \\ \underline{\mathbf{S}}_4 \\ \underline{\mathbf{S}}_5 \\ \underline{\mathbf{S}}_6 \end{bmatrix}^{ue} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{1j}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{2j}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{3j}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{4j}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{5j}^e \\ \underline{\mathbf{K}}_{6j}^e \end{bmatrix}^e, \quad (2.4.3-6)$$

όπου ο δεύτερος κάτω δείκτης  $j$  των συντελεστών στιβαρότητας  $\underline{\mathbf{K}}_{ij}^e$  συμβολίζει (κατά τα γνωστά από την Κλασική Στατική) το αίτιο, δηλαδή τη  $j$ -οστή μοναδιαία κατάσταση καταναγκασμένης μετακίνησης.

Με άλλα λόγια: Αν δεσμεύσουμε και τους 6 τοπικούς ΒΕ του στοιχείου με 6 δεσμικές ράβδους, αν δηλαδή θεωρήσουμε το στοιχείο ως αμφίπακτη δοκό, και κατόπιν επιβάλλουμε μία μοναδιαία καταναγκασμένη μετακίνηση  $u_j^e = 1$  κατά την έννοια του  $j$ -οστού ΒΕ, τότε στις δεσμικές ράβδους θα αναπτυχθούν οι αντιδράσεις  $\underline{\mathbf{K}}_{1j}^e, \underline{\mathbf{K}}_{2j}^e, \underline{\mathbf{K}}_{3j}^e, \underline{\mathbf{K}}_{4j}^e, \underline{\mathbf{K}}_{5j}^e, \underline{\mathbf{K}}_{6j}^e$ . Ο υπολογισμός των αντιδράσεων αυτών για κάθε τιμή του  $j$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) μας δίνει το μητρώο  $\underline{\mathbf{K}}^e$ . Η διαδικασία υπολογισμού τους αποτελεί αντικείμενο της αμέσως επόμενης υποπαραγράφου.

Για τις ιδιότητες του μητρώου στιβαρότητας  $\underline{\mathbf{K}}^e$  ισχύουν -τηρουμένων των αναλογιών- όσα αναφέρθηκαν στο τέλος της § 2.3.3-Γ.

**Δ1. Υπολογισμός του τοπικού μητρώου στιβαρότητας του στοιχείου**

Η διαδικασία υπολογισμού είναι απλή και βασίζεται στην προαναφερθείσα φυσική ερμηνεία των συντελεστών στιβαρότητας. Για το πεπερασμένο στοιχείο δοκού συνίσταται πρακτικά στα εξής επί μέρους βήματα (Σχ. 2.4.3-2):

- (α) Δεσμεύονται κατ' αρχάς οι 6 τοπικοί ΒΕ του στοιχείου με τοποθέτηση αντίστοιχων δεσμικών ράβδων στους κόμβους αρχής  $a$  και τέλους  $b$  κατά την έννοια των αξόνων  $x^e$ ,  $y^e$  και  $z^e$  του τοπικού συστήματος αναφοράς. Το στοιχείο μετατρέπεται έτσι σε μία αμφίπακτη δοκό που είναι τρεις φορές υπερστατική.
- (β) Στην αμφίπακτη αυτή δοκό επιβάλλεται μοναδιαία κομβική μετακίνηση  $\underline{u}_i = \underline{u}_{ax} = 1$  κατά την έννοια του τοπικού ΒΕ " $1^e$ " και υπολογίζονται (με μεθόδους της Κλασικής Στατικής) οι αντιδράσεις  $\underline{S}_1^e$ ,  $\underline{S}_2^e$ ,  $\underline{S}_3^e$ ,  $\underline{S}_4^e$ ,  $\underline{S}_5^e$  και  $\underline{S}_6^e$  στις 6 δεσμικές ράβδους. Οι αντιδράσεις αυτές συνιστούν την 1<sup>η</sup> στήλη του μητρώου στιβαρότητας  $\underline{K}^e$ , είναι δηλαδή ίσες με  $\underline{S}_1^e = \underline{K}_{11}^e$ ,  $\underline{S}_2^e = \underline{K}_{21}^e$ ,  $\underline{S}_3^e = \underline{K}_{31}^e$ ,  $\underline{S}_4^e = \underline{K}_{41}^e$ ,  $\underline{S}_5^e = \underline{K}_{51}^e$  και  $\underline{S}_6^e = \underline{K}_{61}^e$ .
- (γ) Παρομοίως, επιβάλλονται διαδοχικά μοναδιαίες κομβικές μετακινήσεις κατά την έννοια και των υπόλοιπων τοπικών ΒΕ " $2^e$ ", " $3^e$ ", " $4^e$ ", " $5^e$ " και " $6^e$ ", οπότε προκύπτουν αντιστοίχως η 2<sup>η</sup>, η 3<sup>η</sup>, η 4<sup>η</sup>, η 5<sup>η</sup> και η 6<sup>η</sup> στήλη του  $6 \times 6$  μητρώου στιβαρότητας  $\underline{K}^e$ .

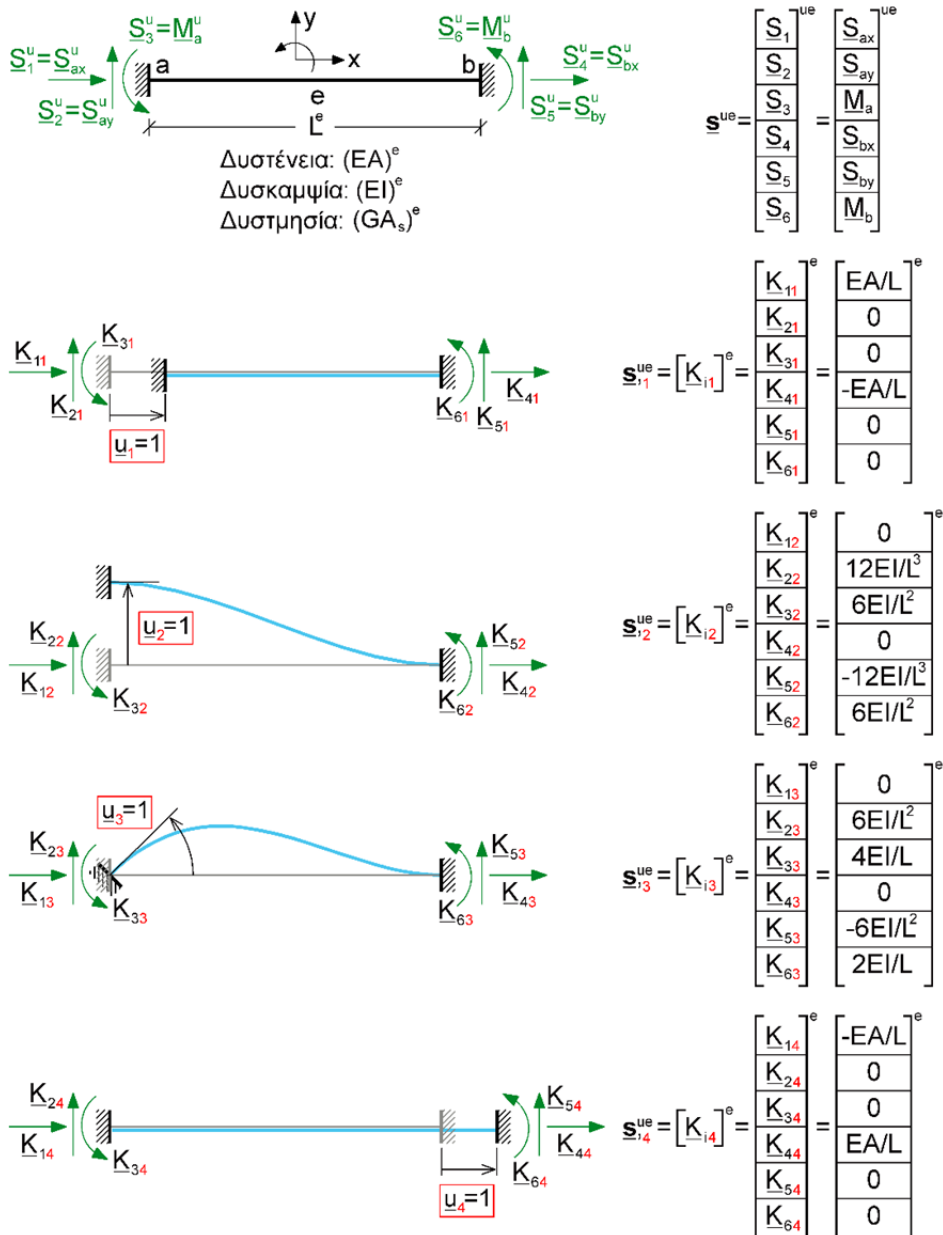
Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο σχήμα 2.4.3-2, όπου χάριν αποσυμφόρησης παραλείπεται στα σχήματα ο άνω δείκτης  $e$ .

Επειδή οι συντελεστές στιβαρότητας  $\underline{K}_{ij}^e$  προκύπτουν ως αντιδράσεις στήριξης μιας αμφίπακτης δοκού, το εν λόγω πεπερασμένο στοιχείο χαρακτηρίζεται συχνά ως "στοιχείο αμφίπακτης δοκού" (Σημ.: Πιο κάτω, στην § 2.7, θα δούμε ότι υπάρχει και το "στοιχείο μονόπακτης δοκού").

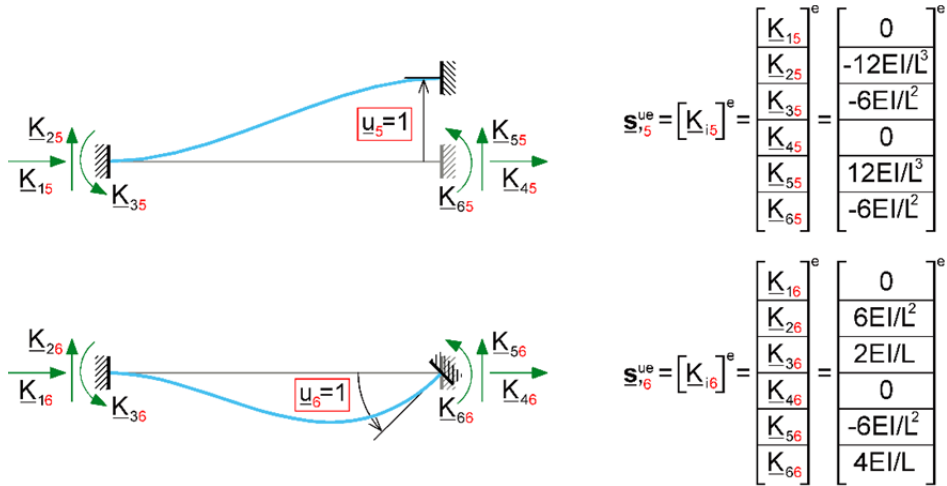
Οι αντιδράσεις στήριξης της αμφίπακτης δοκού στις καταστάσεις καταναγκασμένης μετακίνησης 1 έως 6 μπορούν να υπολογιστούν με γνωστές μεθόδους της Κλασικής Στατικής που αφορούν σε υπερστατικούς φορείς (π.χ. με τη Μέθοδο Δυνάμεων). Στις διάφορες μεθόδους υπολογισμού τους θα αναφερθούμε εκτενώς αργότερα (βλ. § 2.6). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον πλέον άμεσο τρόπο, που συνίσταται στην εφαρμογή γνωστών σχέσεων από την Κλασική Στατική των Γραμμικών Φορέων. Πράγματι, για την αμφίπακτη δοκό υφίστανται έτοιμοι πίνακες, οι οποίοι δίνουν τα φορτία διατομής της για οποιαδήποτε φόρτιση, συμπεριλαμβανομένων και των καταναγκασμένων μετακινήσεων στα άκρα της (π.χ. βλ. [Betonkalender] ή [Αβραμίδης 2013], Παράρτημα, Πίνακας 1). Σημειώνεται ότι κατά κανόνα οι έτοιμοι πίνακες της βιβλιογραφίας δίνουν τιμές για την άμμητη δοκό, αγνοούν δηλαδή την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων ( $GA_S \rightarrow \infty$ ).

**Προσοχή**

Κατά τη χρήση έτοιμων πινάκων από τη βιβλιογραφία απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά στις υποκείμενες *συμβάσεις θετικών προσήμων* των εντασιακών μεγεθών, δηλαδή των φορτίων διατομής.



**Σχ. 2.4.3-2** Μοναδιαίες καταναγκασμένες μετακινήσεις  $u_j=1$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) για τον υπολογισμό των τοπικών συντελεστών σπιβαρότητας  $K_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) του πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  με αγνόηση των διατμητικών παραμορφώσεων ( $GA_s \rightarrow \infty$ ). (Χάρην αποσυμφόρησης παραλείπεται στα σχήματα ο άνω δείκτης  $e$ . Κάτω δείκτες μετά από κόμμα είναι δείκτες αιτίου).



**Σχ. 2.4.3-2 (συνέχ.)** Μοναδιαίες καταναγκασμένες μετακινήσεις  $u_j=1$  ( $j = 1, \dots, 6$ ) για τον υπολογισμό των τοπικών συντελεστών στιβαρότητας  $\mathbf{K}_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) του πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  με αγνόηση των διαμηθικών παραμορφώσεων ( $GA_S \rightarrow \infty$ ). (Χάριν αποσυμφόρησης παραλείπεται στα σχήματα ο άνω δείκτης  $e$ . Κάτω δείκτης μετά από κόμμα είναι δείκτης αιτίου).

**Προσοχή**

Τονίζεται και πάλι ότι, χάριν τυποποίησης της ΜΠΣ και σε αντίθεση προς τις "χειρωνακτικές" μεθόδους επίλυσης της Κλασικής Στατικής, τα τοπικά κομβικά μεγέθη σε *αμφότερα τα άκρα του στοιχείου* ορίζονται ως θετικά κατά την έννοια των τοπικών αξόνων αναφοράς του στοιχείου. Έτσι, π.χ., τόσο η αξονική δύναμη  $\mathbf{S}_{ax}^e$  στο αριστερό άκρο  $a$  όσο και η αξονική δύναμη  $\mathbf{S}_{bx}^e$  στο δεξιό άκρο  $b$  του στοιχείου θεωρούνται αμφότερες θετικές όταν ενεργούν κατά την έννοια του τοπικού άξονα  $x$ . Παρομοίως, οι καμπτικές ροπές  $\mathbf{M}_a^e$  στο αριστερό άκρο  $a$  και  $\mathbf{M}_b^e$  στο δεξιό άκρο  $b$  θεωρούνται αμφότερες θετικές όταν ενεργούν κατά την έννοια του τοπικού άξονα  $z^e$ , όταν δηλαδή είναι αριστερόστροφες (αντίθετες προς τη φορά του ωρολογίου).

Σε μητρική μορφή οι σχέσεις του σχήματος 2.4.3-2 μας δίνουν το τοπικό μητρώο στιβαρότητας  $\mathbf{K}^e$  της άμμητης δοκού ( $GA_S \rightarrow \infty$ ):

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} & \mathbf{K}_{15} & \mathbf{K}_{16} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} & \mathbf{K}_{25} & \mathbf{K}_{26} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} & \mathbf{K}_{35} & \mathbf{K}_{36} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} & \mathbf{K}_{45} & \mathbf{K}_{46} \\ \mathbf{K}_{51} & \mathbf{K}_{52} & \mathbf{K}_{53} & \mathbf{K}_{54} & \mathbf{K}_{55} & \mathbf{K}_{56} \\ \mathbf{K}_{61} & \mathbf{K}_{62} & \mathbf{K}_{63} & \mathbf{K}_{64} & \mathbf{K}_{65} & \mathbf{K}_{66} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \quad (2.4.3-7)$$

Παρατηρούμε ότι το μητρώο στιβαρότητας  $\underline{K}^e$  έχει πράγματι τις τρεις ιδιότητες (συμμετρία, ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας από τους συντελεστές στιβαρότητας κάθε στήλης/σειράς και μη αντιστρεψιμότητα) που αναφέρθηκαν στο τέλος της § 2.3.3-Γ. Επιπλέον παρατηρούμε ότι οι διαγώνιοι συντελεστές στιβαρότητας  $\underline{K}_{ii}^e$  είναι όλοι θετικοί, ιδιότητα που απορρέει άμεσα από τη φυσική ερμηνεία τους.

Παρατηρούμε επίσης ότι η  $1^{\text{η}}$  και η  $4^{\text{η}}$  σειρά, καθώς και η  $1^{\text{η}}$  και η  $4^{\text{η}}$  στήλη του μητρώου  $\underline{K}^e$ , οι οποίες περιλαμβάνουν τους συντελεστές στιβαρότητας που αφορούν στη διάταση, είναι αποσυσζευγμένες από τους συντελεστές που αφορούν στην κάμψη/διάτμηση, γεγονός που απορρέει από την αγνόηση των παραμορφώσεων κατά την κατάστρωση των συνθηκών ισορροπίας (θεωρία  $1^{\text{ης}}$  τάξης, βλ. [Αβραμίδης 2014], § 3.5.1).

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι από το παραπάνω τοπικό μητρώο στιβαρότητας  $\underline{K}^e$  του στοιχείου δοκού μπορεί να προκύψει το τοπικό μητρώο στιβαρότητας του πεπερασμένου στοιχείου ράβδου (βλ. εξ. (2.3.3-8)), αν γίνουν σ' αυτό οι εξής δύο τροποποιήσεις:

- (1) Αφαιρούνται οι σειρές 3 και 6, καθώς και οι στήλες 3 και 6, που αφορούν στους στροφικούς ΒΕ, οι οποίοι δεν υφίστανται στο στοιχείο ράβδου.
- (2) Μηδενίζονται οι συντελεστές στιβαρότητας των σειρών 2 και 4, καθώς και των στήλων 2 και 4 του *εναπομείναντος* μητρώου (δηλ. των σειρών 2 και 5 του αρχικού), οι οποίοι δεν είναι παρά οι τέμνουσες δυνάμεις που για το (εγκαρσίως αφόρτιστο) στοιχείο ράβδου είναι μηδενικές.

#### **Δ2. Υπολογισμός του τοπικού διανύσματος φόρτισης του στοιχείου**

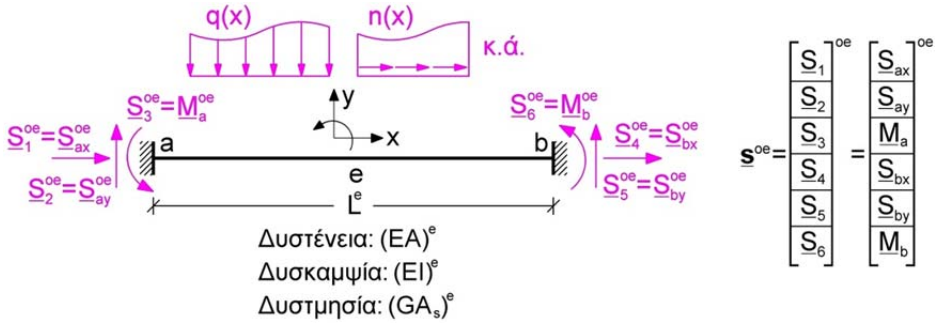
Σύμφωνα με τη σχέση (2.4.3-4), αν όλες οι κομβικές μετακινήσεις είναι μηδενικές, δηλαδή  $\underline{u}^e=0$ , το τοπικό διάνυσμα φόρτισης  $\underline{s}^{oe}$  ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  ισούται με τα κομβικά φορτία  $\underline{s}^e$ :

$$\underline{s}^e = \underline{s}^{oe} \quad (\text{για } \underline{u}^e = 0) . \quad (2.4.3-8)$$

Με άλλα λόγια: Αν δεσμεύσουμε και τους 6 τοπικούς ΒΕ του στοιχείου με 6 δεσμικές ράβδους, αν δηλαδή θεωρήσουμε το στοιχείο ως αμφίπακτη δοκό, και το φορτίσουμε με τα δεδομένα φορτία του, τότε στις δεσμικές ράβδους θα αναπτυχθούν οι αντιδράσεις  $\underline{S}_1^e = \underline{S}_1^{oe}$ ,  $\underline{S}_2^e = \underline{S}_2^{oe}$ ,  $\underline{S}_3^e = \underline{S}_3^{oe}$ ,  $\underline{S}_4^e = \underline{S}_4^{oe}$ ,  $\underline{S}_5^e = \underline{S}_5^{oe}$ ,  $\underline{S}_6^e = \underline{S}_6^{oe}$ , που είναι οι συνιστώσες του ζητούμενου διανύσματος  $\underline{s}^{oe}$  (Σχ. 2.4.3-3).

Οι αντιδράσεις στήριξης μιας αμφίπακτης δοκού λόγω οποιασδήποτε εξωτερικής φόρτισης μπορούν να υπολογιστούν με γνωστές μεθόδους της Κλασικής Στατικής που αφορούν σε υπερστατικούς φορείς (π.χ. με τη Μέθοδο Δυνάμεων). Στις διάφορες μεθόδους υπολογισμού τους θα αναφερθούμε αργότερα (βλ. § 2.6). Εντούτοις, όπως προαναφέρθηκε, ειδικά για την αμφίπακτη δοκό υφίστανται έτοιμοι πίνακες, οι οποίοι δίνουν τις αντιδράσεις στήριξης για όλες σχεδόν τις παρουσιαζόμενες στην πράξη φορτίσεις, συμπεριλαμβανομένων και των καταναγκασμών, όπως π.χ. λόγω ομοιόμορφης ή/και ανομοιόμορφης

θερμοκρασιακής φόρτισης (π.χ. βλ. [Αβραμίδης 2013], Παράρτημα, Πίνακας 1). Υπενθυμίζεται ότι κατά τη χρήση έτοιμων πινάκων από τη βιβλιογραφία απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά στις υποκείμενες *συμβάσεις θετικών προσήμων* των εντασιακών μεγεθών.



**Σχ. 2.4.3-3** Τοπικό διάνυσμα φόρτισης του πεπερασμένου στοιχείου δοκού e.

Στον ακόλουθο πίνακα 2.4.3-1 δίνονται ενδεικτικά για μερικές συνθήκες φορτίσεις της αμφίπακτης δοκού τα διανύσματα φόρτισης υπό την παραδοχή της ατημψίας ( $GA_s \rightarrow \infty$ ).

Στο πλαίσιο του παραδείγματός μας τα στοιχεία 1 και 3 είναι αφόρτιστα, οπότε

$$\underline{\mathbf{s}}^{o(1)} = \mathbf{0} \quad \text{και} \quad \underline{\mathbf{s}}^{o(3)} = \mathbf{0} . \quad (2.4.3-9a)$$

Το στοιχείο 2, μήκους  $L^{(2)}=10\text{m}$ , φορτίζεται με το ομοιόμορφο συνεχές φορτίο  $q=50\text{kN/m}$ , οπότε βάσει του πίνακα 2.4.3-1 (βλ. επόμενη σελίδα) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{s}}^{o(2)} &= [0 \quad qL^{(2)}/2 \quad q(L^{(2)})^2/12 \quad 0 \quad qL^{(2)}/2 \quad -q(L^{(2)})^2/12]^T \\ &= [0 \quad 250\text{kN} \quad 416.67\text{kNm} \quad 0 \quad 250\text{kN} \quad -416.67\text{kNm}]^T . \end{aligned} \quad (2.4.3-9b)$$

Παρατήρηση: Δικτυώματα με ράβδους που φέρουν φορτία μεταξύ των κόμβων τους: Όπως σημειώσαμε στην § 2.3, στα *ιδανικά* δικτυώματα (επίπεδα ή χωρικά) οι ράβδοι θεωρούνται παντελώς αφόρτιστες μεταξύ των κόμβων τους. Εντούτοις, στη γενική περίπτωση, οι ράβδοι ενός δικτυώματος μπορεί να δέχονται τόσο *αξονικά* όσο και *εγκάρσια* φορτία μεταξύ των κόμβων τους.

Τα εγκάρσια (κάθετα στον άξονα της ράβδου) φορτία προκαλούν ροπές κάμψης και τέμνουσες, οι οποίες όμως μπορούν να υπολογιστούν άμεσα για κάθε εγκάρσια φορτιζόμενη ράβδο θεωρώντας την απλά ως αμφίεριστη δοκό. Παράλληλα, κατά την επίλυση του δικτυώματος πρέπει να ληφθούν υπόψη οι εγκάρσιες κομβικές δυνάμεις  $S_{ay}^{oe}$  και  $S_{by}^{oe}$  κάθε ράβδου που οφείλονται στην εγκάρσια φόρτίσή της. Οι κομβικές αυτές δυνάμεις είναι οι αντιδράσεις στήριξης της ράβδου θεωρούμενης ως αμφίεριστης δοκού. Είναι σαφές, ότι στην περίπτωση δικτυωμάτων με εγκάρσια φορτιζόμενες ράβδους δεν μπορούν πλέον να χρησιμοποιηθούν τα συρρικνωμένα  $2 \times 1$  διανύσματα  $\underline{\mathbf{u}}^{e//2}$ ,  $\underline{\mathbf{s}}^{e//2}$  και  $\underline{\mathbf{s}}^{oe//2}$  (βλ. εξ. (2.3.3-9γ,δ)), διότι σ' αυτά δεν συμπεριλαμβάνονται τα εγκάρσια κομβικά μεγέθη. Συνεπώς, πρέπει υποχρεωτικά να χρησιμοποιηθούν τα  $4 \times 1$  διανύσματα  $\underline{\mathbf{u}}^e$ ,  $\underline{\mathbf{s}}^e$  και  $\underline{\mathbf{s}}^{oe}$ .

**Πίνακας 2.4.3-1** Τοπικά διανύσματα φόρτισης  $\underline{s}^{oe}$  του πεπερασμένου στοιχείου δοκού  $e$  για μερικές συνήθεις φορτίσεις (Χάριν αποσυμφόρησης παραλείπεται στους τύπους ο άνω δείκτης  $e$ ).

EA=σταθ.  
EI=σταθ.  
GA<sub>s</sub>→∞  
α<sub>i</sub>=σταθ.

	<p><math>q = \text{σταθ.}</math></p>	<p><math>q_1</math> to <math>q_2</math></p>	<p><math>P</math></p>	<p><math>M_L</math></p>
$\underline{s}^{oe} = \underline{M} = \begin{bmatrix} S_{ax} \\ S_{ay} \\ M_a \\ S_{bx} \\ S_{by} \\ M_b \end{bmatrix}^{oe} =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ qL/2 \\ qL^2/12 \\ 0 \\ qL/2 \\ -qL^2/12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 21q_1 + 9q_2 \\ L(3q_1 + 2q_2) \\ \frac{L}{60} \\ 0 \\ 9q_1 + 21q_2 \\ -L(2q_1 + 3q_2) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ Pb^2(L+2a)/L^3 \\ Pa(b/L)^2 \\ 0 \\ Pa^2(L+2b)/L^3 \\ -Pb(a/L)^2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 6M_L(ab)/L^3 \\ M_L b(3a/L-1)/L \\ 0 \\ -6M_L(ab)/L^3 \\ M_L a(3b/L-1)/L \end{bmatrix}$
	<p><math>\Delta t = t_u - t_o</math></p>	<p><math>t = (t_u + t_o)/2</math></p>	<p><math>F</math></p>	<p><math>n = \text{σταθ.}</math></p>
$\underline{s}^{oe} = \underline{M} = \begin{bmatrix} S_{ax} \\ S_{ay} \\ M_a \\ S_{bx} \\ S_{by} \\ M_b \end{bmatrix}^{oe} =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ EI\alpha_i \Delta t/h \\ 0 \\ 0 \\ -EI\alpha_i \Delta t/h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} EA\alpha_i t \\ 0 \\ 0 \\ -EA\alpha_i t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -Fb/L \\ 0 \\ 0 \\ -Fa/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -nL/2 \\ 0 \\ 0 \\ -nL/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
	<p><math>\Delta \phi_c</math></p>	<p><math>\Delta w_c</math></p>	<p><math>m = \text{σταθ.}</math></p>	
$\underline{s}^{oe} = \underline{M} = \begin{bmatrix} S_{ax} \\ S_{ay} \\ M_a \\ S_{bx} \\ S_{by} \\ M_b \end{bmatrix}^{oe} =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -6(a-b)(EI/L^3) \Delta \phi_c \\ (4-6a/L)(EI/L) \Delta \phi_c \\ 0 \\ 6(a-b)(EI/L^3) \Delta \phi_c \\ -(4-6b/L)(EI/L) \Delta \phi_c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -(12EI/L^3) \Delta w_c \\ -(6EI/L^2) \Delta w_c \\ 0 \\ (12EI/L^3) \Delta w_c \\ -(6EI/L^2) \Delta w_c \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ +m \\ 0 \\ 0 \\ -m \\ 0 \end{bmatrix}$	

Τα αξονικά φορτία μιας ράβδου προκαλούν αποκλειστικά και μόνο αξονικές κομβικές δυνάμεις  $\underline{S}_{ax}^{oe}$  και  $\underline{S}_{bx}^{oe}$ , οι οποίες πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη κατά την επίλυση του δικτυώματος. Οι κομβικές αυτές δυνάμεις λόγω τριών συνήθων αξονικών φορτίσεων ενός στοιχείου ράβδου (ομοιόμορφα κατανομημένη αξονική φόρτιση  $n=q_x$ , μοναχικό αξονικό φορτίο  $F_x$  και ομοιόμορφη θερμοκρασιακή φόρτιση  $t$ ) μπορούν να ληφθούν από τον πίνακα 2.4.3-1, αφού η αξονική ένταση των αμφίπακτων και των αμφιαρθρωτών δοκών λόγω αξονικής φόρτισης είναι ίδια

### 3.4 Επιφανειακοί φορείς

Δεδομένου ότι το παρόν σύγγραμμα επικεντρώνεται στους γραμμικούς φορείς, η παρουσίαση της ΜΠΣ για επιφανειακούς φορείς θα είναι σύντομη, έχοντας ως μοναδικό σκοπό να καταδείξει τον ενιαίο τρόπο με τον οποίο η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει κάθε είδους δομικό φορέα. Η παρουσίαση θα περιοριστεί σε φορείς δίσκων επίπεδης έντασης (§ 3.4.3 έως 3.4.6), αλλά θα μας επιτρέψει να κάνουμε ορισμένες ουσιώδεις παρατηρήσεις σχετικά με τις ιδιαιτερότητες και την αποτελεσματική χρήση επιφανειακών πεπερασμένων στοιχείων εν γένει. Αναφορά σε πλάκες, κελύφη και πτυχωτούς φορείς θα γίνει μόνο ακροθιγώς (§ 3.4.7). Προηγουμένως όμως θα παρατεθεί μία κριτική επανάληψη των 5 βασικών σταδίων που διατρέχει η ανάλυση φορέων με τη ΜΠΣ (§ 3.4.1) και θα γίνουν ορισμένες επισημάνσεις σχετικά με τον προσεγγιστικό χαρακτήρα της ΜΠΣ (§ 3.4.2).

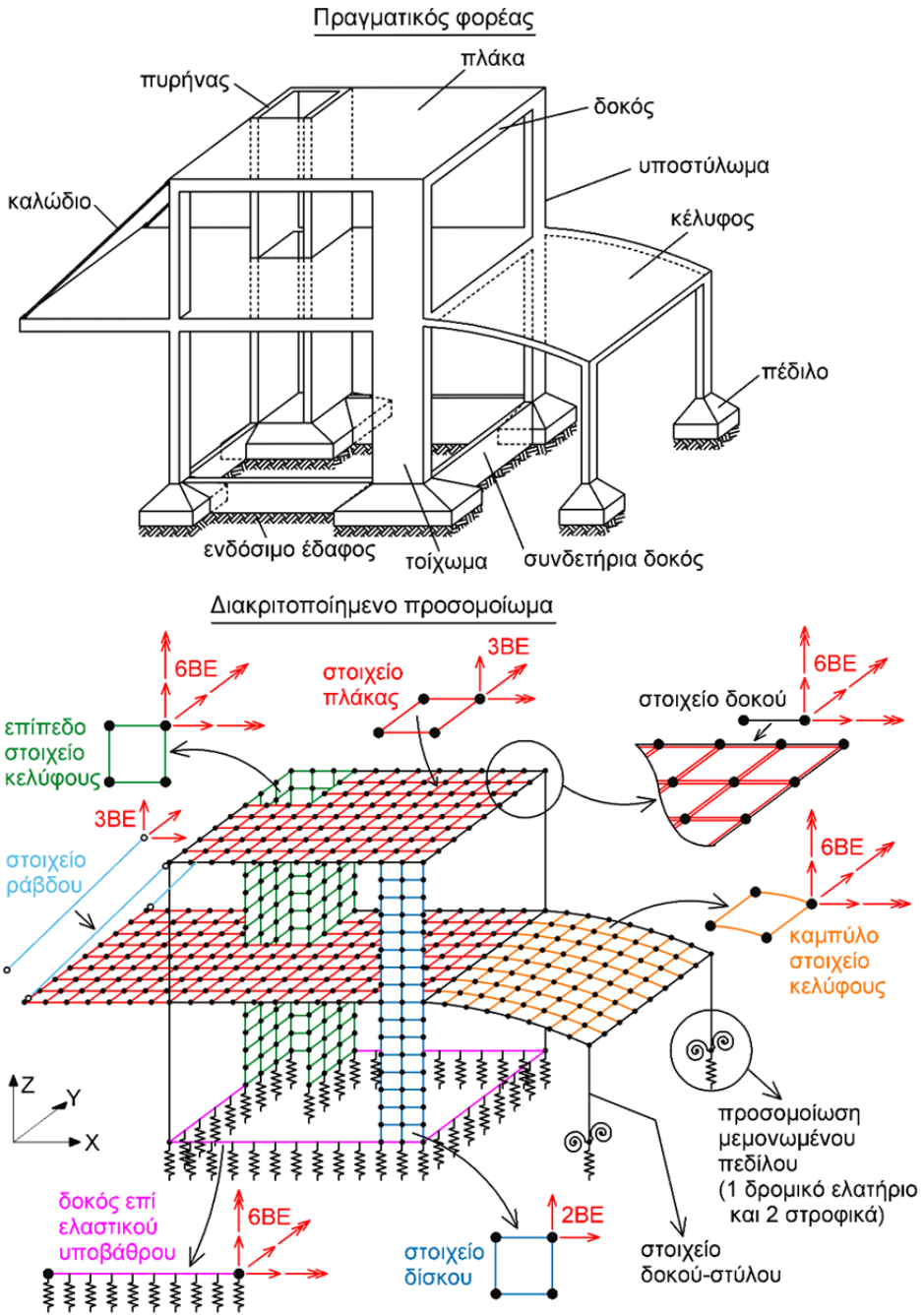
#### 3.4.1 Τα 5 βήματα της ΜΠΣ - Επανάληψη και εμβάθυνση

Τα 5 βασικά βήματα ή στάδια, τα οποία περιλαμβάνει η διαδικασία επίλυσης ενός φορέα με τη ΜΠΣ υπό τη μορφή της ΑΜΣ (βλ. Πίν. 2.2-1) και τα οποία επεξηγήθηκαν συστηματικά στο κεφάλαιο 2 για γραμμικούς φορείς, θα περιγραφούν ακολούθως και πάλι, προκειμένου να επισημανθούν οι βασικές διαφορές κατά την εφαρμογή της ΑΜΣ σε επιφανειακούς φορείς και φορείς όγκου, σε σχέση με τους γραμμικούς φορείς.

##### **A. Βήμα 1<sup>ο</sup> (Διακριτοποίηση φορέα και φόρτισης)**

Το πρώτο βήμα της ΜΠΣ συνίσταται στην υποδιαίρεση και διάσπαση (*διακριτοποίηση*) του προηγουμένως επιλεγέντος μηχανικού προσομοιώματος του πραγματικού φορέα σε ένα μικρότερο ή μεγαλύτερο πλήθος δομικών στοιχείων πεπερασμένων διαστάσεων (*πεπερασμένα στοιχεία*). Για να γίνει αυτό, ορίζονται συγκεκριμένα σημεία του φορέα ως *οι κόμβοι* και στη συνέχεια ορίζονται τα πεπερασμένα στοιχεία ως τμήματα του φορέα μεταξύ των κόμβων του. Στα σχήματα 3.4.1-1 (α), (β) και (γ) δίνονται με απλουστευμένο τρόπο πιθανές διακριτοποιήσεις ενός γραμμικού (ραβδωτού) φορέα, ενός επιφανειακού φορέα δίσκου και ενός φορέα όγκου αντιστοίχως. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Στον γραμμικό (πλαισιακό) φορέα του σχήματος 3.4.1-1(α) ορίζονται ως κόμβοι οι δύο στηρίξεις του και τα δύο άκρα του ζυγώματός του, δηλαδή σημεία στα οποία είτε υπάρχουν δεσμεύσεις των μετακινήσεων είτε αλλάζει η διεύθυνση του άξονα του φορέα. Η *τοπολογία των κόμβων* μπορεί έτσι να χαρακτηριστεί ως "*φυσική*", υπό την έννοια ότι οι κόμβοι είναι σημεία μεταβολής κάποιων μηχανικών/γεωμετρικών χαρακτηριστικών του φορέα. "Φυσική" τοπολογία κόμβων υφίσταται γενικώς -με ορισμένες εξαιρέσεις (βλ. παρακάτω υποπαράγραφο (γ))- για όλους σχεδόν τους γραμμικούς φορείς και συνεπώς η διακριτοποίησή τους, δηλαδή ο καθορισμός των κόμβων και των πεπερασμένων στοιχείων τους, δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία.



Σχ. 3.4.1-3 Διακριτοποίηση σύνθετου κτιριακού φορέα.

- Τα μητρώα στιβαρότητας και τα διανύσματα φόρτισης των στοιχείων έχουν πάντοτε προσεγγιστικό χαρακτήρα, βασιζόμενα σε συναρτήσεις παρεμβολής για τις μετακινήσεις και στην ΑΔΕ. Ως παράδειγμα θα αναπτυχθεί στην § 3.4.4 το μητρώο στιβαρότητας ενός τριγωνικού στοιχείου δίσκου επίπεδης έντασης.

Από τα παραπάνω καθίσταται σαφές ότι η ΜΠΣ αποτελεί, στη γενική περίπτωση, μια προσεγγιστική μέθοδο. Εντούτοις, στην περίπτωση των γραμμικών φορέων

- (α) με φυσική τοπολογία κόμβων (δηλαδή φορέων για τους οποίους κατά τη γεωμετρικού χαρακτήρα διακριτοποίησή τους δεν γίνονται εξιδανικεύσεις) και
- (β) εφόσον χρησιμοποιούνται ακριβή μητρώα στιβαρότητας και ακριβή διανύσματα φόρτισης (που περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά των επί μέρους στοιχείων με βάση την ακριβή αναλυτική λύση της εκάστοτε διαφορικής εξίσωσης),

η ΜΠΣ δίνει μέσα στα όρια των παραδοχών της γραμμικής ελαστοστατικής ακριβείς λύσεις των προβλημάτων. Στην ειδική αυτή περίπτωση μπορεί κανείς να χαρακτηρίσει το σύνολο των μητρωικών διαδικασιών επίλυσης απλά ως *Μητρωική Στατική* ή και *Μητρωική Ανάλυση Κατασκευών*, αποφεύγοντας την έννοια του πεπερασμένου στοιχείου.

Όμως υπάρχουν, όπως είδαμε, περιπτώσεις γραμμικών φορέων όπου απαιτούνται είτε εξιδανικεύσεις στη γεωμετρία (π.χ. αντικατάσταση καμπύλων δοκών με συνεχείς τεθλασμένες δοκούς) είτε χρησιμοποίηση προσεγγιστικών μητρώων στιβαρότητας για επί μέρους στοιχεία (π.χ. ελαστικώς εδραζόμενες θεμελιοδοκοί μεταβλλόμενης διατομής) είτε αμφότερα. Στις περιπτώσεις αυτές παραμένει η ΜΠΣ μια προσεγγιστική μέθοδος.

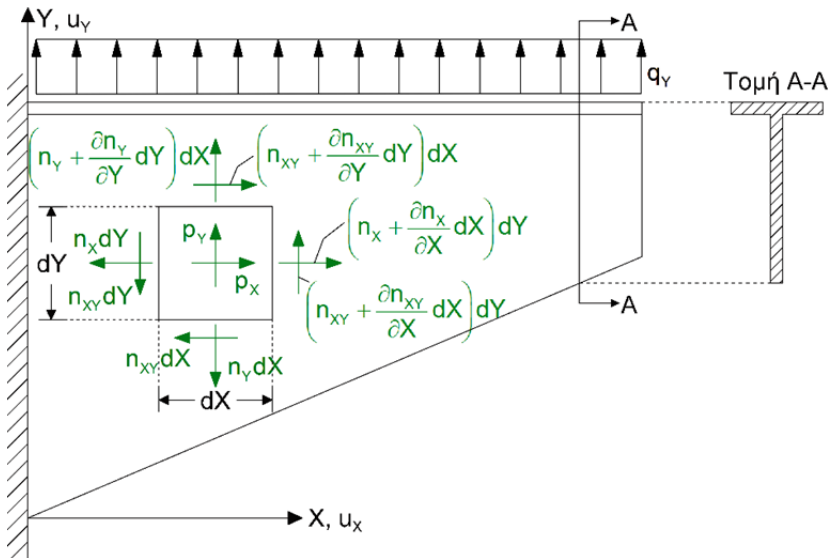
Για τον λόγο αυτόν, αλλά και για λόγους νοητικά ενιαίας αντιμετώπισης γραμμικών φορέων, επιφανειακών φορέων και φορέων όγκου, καθώς και όλων των πιθανών συνδυασμών τους, ενδείκνυται η ένταξη της κλασικής Μητρωικής Στατικής γραμμικών φορέων στο γενικότερο πλαίσιο της ΜΠΣ και η ανάπτυξη της σύμφωνα με το γενικό σκεπτικό της τελευταίας, όπως ακριβώς έγινε στις προηγούμενες παραγράφους του παρόντος βιβλίου.

### 3.4.3 Εφαρμογή της ΜΠΣ σε έναν δίσκο-πρόβολο

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιαστεί, ενδεικτικά, η εφαρμογή της ΜΠΣ σε έναν επιφανειακό φορέα-δίσκο επίπεδης έντασης, ακολουθώντας την πορεία των 5 βημάτων της § 3.4.1. Η παρουσίαση θα γίνει, χάριν εποπτείας, με τη βοήθεια του σχετικά απλού παραδείγματος του σχήματος 3.4.3-1, προκειμένου να διατηρηθεί η δυνατότητα εύκολης παρακολούθησης εκ μέρους του αναγνώστη όλων των επί μέρους σταδίων της ανάλυσης. Βασικός σκοπός της παρουσίασης είναι να καταδειχθεί το ενιαίο της όλης διαδικασίας ανάλυσης είτε πρόκειται για γραμμικό είτε για επιφανειακό φορέα.

Ο προς επίλυση φορέας του σχήματος 3.4.3-1 είναι ένας δίσκος-πρόβολος πάχους  $t$  με ενισχυτικό άνω πέλμα, το οποίο όμως στις ακόλουθες αναπτύξεις,

χάρην απλούστευσης, θα αγνοηθεί. Ο δίσκος φορτίζεται εντός του επιπέδου του με ένα ομοιόμορφο συνεχές φορτίο  $q$ . Λόγω του μικρού πάχους  $t$  του δίσκου έναντι των κατά  $X$  και  $Y$  διαστάσεών του, η αναπτυσσόμενη  $\sigma'$  αυτόν εγκάρσια ένταση (κάθετα στο επίπεδό του) μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Πρόκειται συνεπώς για ένα πρόβλημα επίπεδης έντασης. Παρόμοια προβλήματα συναντώνται γενικότερα σε υψίκορμες δοκούς, σε κατακόρυφα τοιχώματα κτιριακών κατασκευών εφόσον μπορεί να αγνοηθεί η εκτός του επιπέδου τους φέρουσα ικανότητα, σε οριζόντια ή κεκλιμένα διαφράγματα (π.χ. ενδοεπίπεδη ένταση στις πλάκες πολυωρόφων κτιρίων) και σε αρκετές ακόμη περιπτώσεις της δομικής πράξης.



Σχ. 3.4.3-1 Δίσκος-πρόβολος υπό ενδοεπίπεδη φόρτιση και συνθήκες ισορροπίας στο απειροστό στοιχείο δίσκου (Το ενισχυτικό άνω πέλμα δεν θα ληφθεί υπόψη).

### Οι διαφορικές εξισώσεις του συνεχούς φορέα

Για τον δεδομένο συνεχή φορέα οφείλουν, ως γνωστόν, να ικανοποιούνται σε κάθε σημείο του οι παρακάτω συνθήκες:

#### Συνθήκες ισορροπίας

Συμβολίζοντας με  $n_x = \sigma_x \cdot t$ ,  $n_y = \sigma_y \cdot t$ ,  $n_{xy} = \sigma_{xy} \cdot t = \tau \cdot t$ , τις πολλαπλασιασμένες με το πάχος  $t$  ορθές ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ) και διατμητικές ( $\sigma_{xy} = \tau$ ) τάσεις του δίσκου, και με  $p_x$ ,  $p_y$  τα ενδοεπίπεδα φορτία (π.χ. ίδιον βάρος  $p_y$ ), οι συνθήκες ισορροπίας σε τυχόν σημείο  $(X, Y)$  του δίσκου γράφονται ως εξής (βλ. Σχ. 3.4.3-1):

$$\frac{\partial n_x}{\partial X} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial Y} + p_x = 0 \quad (3.4.3-1\alpha)$$

$$\frac{\partial n_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial n_y}{\partial Y} + p_y = 0 \quad (3.4.3-1\beta)$$

Πρέπει επίσης να ικανοποιούνται και οι συνοριακές στατικές συνθήκες, στις οποίες υπεισέρχονται τα φορτία που ενεργούν στα σύνορα του φορέα (στο παράδειγμά μας το εξωτερικό φορτίο  $q_Y$ ).

Συνθήκες υλικής συμπεριφοράς (Καταστατικές εξισώσεις υλικού)

Για ισότροπα και γραμμικώς ελαστικά υλικά ισχύουν μεταξύ των παραμορφώσεων  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  και των φορτίων διατομής  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  οι κατά Hooke σχέσεις

$$\epsilon_x = \frac{1}{E \cdot t} \cdot (n_x - \nu \cdot n_y) \quad (3.4.3-2\alpha)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E \cdot t} \cdot (n_y - \nu \cdot n_x) \quad (3.4.3-2\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E \cdot t} \cdot n_{xy} \quad (3.4.3-2\gamma)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  ο λόγος του Poisson.

Συνθήκες συμβιβαστού

Κατά τα γνωστά από την Ελαστοστατική, ισχύουν μεταξύ των μετακινήσεων  $u_x$ ,  $u_y$  και των παραμορφώσεων  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  οι σχέσεις

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial X} \quad (3.4.3-3\alpha)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial Y} \quad (3.4.3-3\beta)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial X} + \frac{\partial u_x}{\partial Y} \quad (3.4.3-3\gamma)$$

Εκτός των παραπάνω συνθηκών, που εξασφαλίζουν το συμβιβαστό των παραμορφώσεων στο εσωτερικό του συνεχούς δίσκου, οφείλουν να ικανοποιηθούν και οι συνοριακές γεωμετρικές συνθήκες, που εκφράζουν τη γεωμετρική συμμόρφωση στα σύνορα (δηλ. στις περιοχές στήριξης) του φορέα.

Οι εξισώσεις (3.4.3-1), (3.4.3-2), (3.4.3-3) συνθέτουν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων  $u_x(X, Y)$  και  $u_y(X, Y)$  σε κάθε σημείο του δίσκου, το οποίο προκύπτει ως εξής: Λύνονται οι εξισώσεις (3.4.3-2α,β,γ) ως προς  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  και στις προκύπτουσες εκφράσεις αντικαθίστανται οι παραμορφώσεις  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  από τις μετατοπίσεις  $u_x$ ,  $u_y$  χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.4.3-3α,β,γ). Εισάγοντας τις σχέσεις που προκύπτουν για τις  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  στις εξισώσεις ισορροπίας (3.4.3-1α,β) παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u_x}{\partial X} + \nu \frac{\partial u_y}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \cdot \left( \frac{1 - \nu}{2} \right) + p_x \cdot \frac{1 - \nu^2}{E \cdot t} = 0 \quad (3.4.3-4\alpha)$$

$$\frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial Y} + \nu \frac{\partial u_x}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \right) \cdot \left( \frac{1 - \nu}{2} \right) + p_y \cdot \frac{1 - \nu^2}{E \cdot t} = 0 \quad (3.4.3-4\beta)$$

Το παραπάνω σύστημα διαφορικών εξισώσεων περιγράφει τη στατική συμπεριφορά του δίσκου. Από την επίλυσή του, λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες του εκάστοτε προβλήματος, παίρνουμε τις μετατοπίσεις  $u_x$ ,  $u_y$ , από τις οποίες προκύπτουν με κατάλληλες παραγωγίσεις τα φορτία διατομής  $n_x$ ,  $n_y$ ,  $n_{xy}$  (και από αυτά οι τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$ ) σε κάθε σημείο του φορέα.

Δυστυχώς, η αναλυτική (ακριβής) επίλυση του συστήματος (3.4.3-4α,β) δεν είναι δυνατή παρά μόνο σε πολύ λίγες, απλές περιπτώσεις (βλ. παράδειγμα στην § 3.4.5). Εξ ου και η ανάγκη χρησιμοποίησης προσεγγιστικών μεθόδων ανάλυσης, όπως η ΜΠΣ, της οποίας η εφαρμογή θα παρουσιαστεί ακολούθως.

### **Βήμα 1<sup>ο</sup>: Η διακριτοποίηση του φορέα και της φόρτισης**

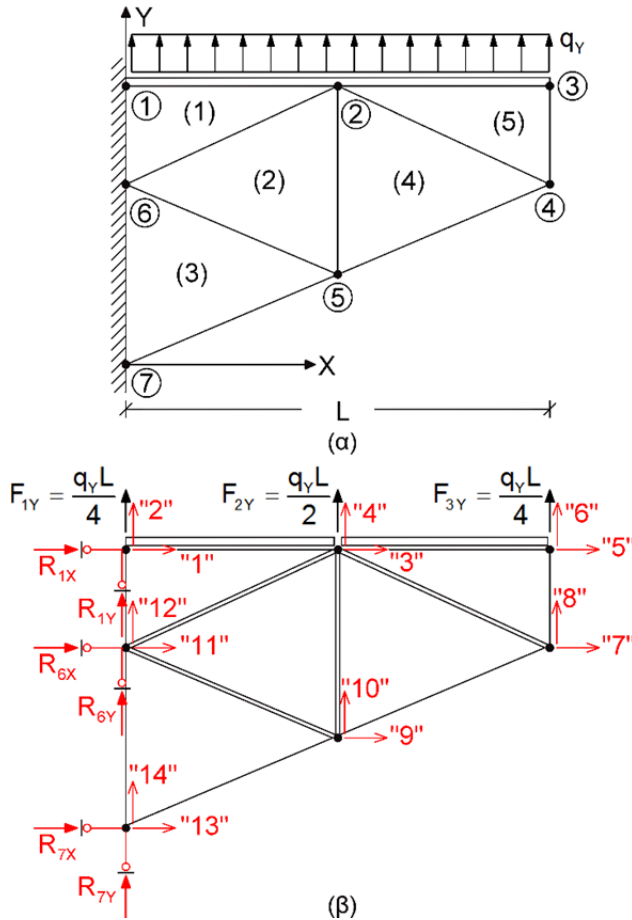
Έστω ότι για τον δίσκο-πρόβολο του σχήματος 3.4.3-1 επιλέγεται ο κανάβος του σχήματος 3.4.3-2(α). Η συνέχεια του φορέα κατά μήκος των διαχωριστικών γραμμών (συμπεριλαμβανομένων και των περιμετρικών) του κανάβου θεωρούμε ότι καταλύεται εντελώς, εκτός από τα σημεία συμβολής τους. Προκύπτει έτσι ο διακριτοποιημένος φορέας του σχήματος 3.4.3-2(β), ο οποίος αποτελείται από τις 5 τριγωνικές υποπεριοχές, δηλαδή τα 5 τριγωνικά πεπερασμένα στοιχεία δίσκου, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους και με το στερεό υπόβαθρο στήριξης (όπου υπάρχει) μόνο στις κορυφές τους, δηλαδή στους κόμβους τους.

Έτσι, ενώ κατά τη θεώρηση του συνεχούς φορέα είχαμε ως άγνωστα μεγέθη τις μετατοπίσεις  $u_x$ ,  $u_y$  σε όλα τα σημεία του φορέα, στον διακριτοποιημένο φορέα τα άγνωστα μεγέθη είναι μόνο οι μετατοπίσεις των 7 κόμβων (Σημ.: Οι μετατοπίσεις στους κόμβους στήριξης είναι βέβαια γνωστές. Εδώ: μηδενικές). Επισημαίνεται ότι η θεώρηση ως αγνώστων μεγεθών μόνο των μετατοπίσεων οδηγεί στο απλούστερο δυνατό πεπερασμένο στοιχείο δίσκου. Η επιπλέον θεώρηση των στροφών στους κόμβους του διακριτοποιημένου φορέα ως αγνώστων μεγεθών είναι δυνατή, αλλά συνεπάγεται περισσότερους ΒΕ και απαιτεί την ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων ανώτερης τάξης (βλ. § 3.4.6(γ) και Πίν. 3.4.6-1(δ)).

Τονίζεται ότι η διακριτοποίηση δεν αφορά μόνο στο εσωτερικό του φορέα, αλλά και στα σύνορά του, δηλαδή τις περιοχές στήριξής του. Έτσι, στο παράδειγμά μας, η πάκτωση του δίσκου αντικαθίσταται από απλές στηρίξεις (κατά X και Y) στους κόμβους 1, 6 και 7 που βρίσκονται επάνω στην πακτωμένη πλευρά του αρχικού φορέα (Σχ. 3.4.3-2(β)).

Με ανάλογο τρόπο πρέπει, προφανώς, να γίνει και η διακριτοποίηση των φορτίων, αντικαθιστώντας όλα τα δεδομένα συνεχή φορτία (επιφανειακά  $p_x$ ,  $p_y$  και γραμμικά  $q_x$ ,  $q_y$ ) με στατικώς ισοδύναμα μοναχικά φορτία που ενεργούν στους αντίστοιχους κόμβους του διακριτοποιημένου φορέα. Στο παράδειγμά μας θα θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν επιφανειακά φορτία και ότι το δεδομένο γραμμικό φορτίο  $q_y$  αντικαθίσταται από τα 3 μοναχικά φορτία  $F_{1y}$ ,  $F_{2y}$ ,  $F_{3y}$  στους κόμβους 1, 2 και 3 (Σχ. 3.4.3-2(β)). Στη συγκεκριμένη απλή περίπτωση είναι σαφές ότι η στατική ισοδυναμία εξασφαλίζεται επιλέγοντας για τα φορτία τις τιμές  $F_{1y}=F_{3y}=q_y L/4$ ,  $F_{2y}=q_y L/2$ .

Συνοψίζοντας: Ο αρχικός συνεχής φορέας με τους άπειρους ΒΕ αντικαθίσταται από ένα διακριτοποιημένο, δηλαδή ασυνεχές, μόρφωμα, του οποίου η στατική συμπεριφορά περιγράφεται από ένα πεπερασμένο πλήθος ΒΕ, τους ΒΕ των κόμβων του. Στο σχήμα 3.4.3-2(β) σημειώνονται με κόκκινο χρώμα οι ΒΕ του ελεύθερου φορέα.



Σχ. 3.4.3-2 Συνεχής και διακριτοποιημένος φορέας (Με κόκκινο σημειώνονται οι ΒΕ του ελεύθερου φορέα)

Τα στατικά μεγέθη του διακριτοποιημένου φορέα ορίζονται με ανάλογο τρόπο όπως και στους γραμμικούς φορείς (βλ. π.χ. § 2.4.2-Γ). Το διάνυσμα μετατοπίσεων κάθε κόμβου  $k$  (εδώ:  $k=1, \dots, 7$ ) περιλαμβάνει 2 μετατοπίσεις:

$$\mathbf{u}_k^T = [u_{kx} \ u_{ky}] , \quad (3.4.3-5)$$

όπου  $X, Y$  οι άξονες του καθολικού συστήματος αναφοράς. Το διάνυσμα στήλης  $\mathbf{u}$  των κομβικών μετατοπίσεων ολόκληρου του φορέα είναι

$$\mathbf{u}^T = [\mathbf{u}_1^T \ \mathbf{u}_2^T \ \mathbf{u}_3^T \ \mathbf{u}_4^T \ \mathbf{u}_5^T \ \mathbf{u}_6^T \ \mathbf{u}_7^T] \quad (3.4.3-6)$$

$$= [u_{1X} \ u_{1Y} \ u_{2X} \ u_{2Y} \ u_{3X} \ u_{3Y} \ u_{4X} \ u_{4Y} \ u_{5X} \ u_{5Y} \ u_{6X} \ u_{6Y} \ u_{7X} \ u_{7Y}] .$$

Για τα κομβικά φορτία έχουμε αντίστοιχα:

$$\mathbf{p}_k^T = [p_{kX} \ p_{kY}] \quad (3.4.3-7)$$

και

$$\mathbf{p}^T = [\mathbf{p}_1^T \ \mathbf{p}_2^T \ \mathbf{p}_3^T \ \mathbf{p}_4^T \ \mathbf{p}_5^T \ \mathbf{p}_6^T \ \mathbf{p}_7^T] \quad (3.4.3-8)$$

$$= [P_{1X} \ P_{1Y} \ P_{2X} \ P_{2Y} \ P_{3X} \ P_{3Y} \ P_{4X} \ P_{4Y} \ P_{5X} \ P_{5Y} \ P_{6X} \ P_{6Y} \ P_{7X} \ P_{7Y}] .$$

Όπως στους γραμμικούς φορείς (βλ. εξ. (2.4.2-8)), ισχύει

$$\mathbf{p} = \mathbf{f} + \mathbf{r} - \mathbf{s}^o, \quad (3.4.3-9)$$

όπου  $\mathbf{f}$  το διάνυσμα των μοναχικών φορτίων που ενεργούν στους κόμβους του φορέα,  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα των αντιδράσεων στήριξης του φορέα και  $\mathbf{s}^o$  το διάνυσμα των κομβικών δυνάμεων λόγω φόρτισης των ίδιων των στοιχείων μεταξύ των κόμβων τους. Η δομή των διανυσμάτων  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{r}$  και  $\mathbf{s}^o$  είναι αντίστοιχη της δομής του  $\mathbf{p}$ . Στο παράδειγμά μας τα στοιχεία θεωρούνται αφόρτιστα, οπότε  $\mathbf{s}^o = \mathbf{0}$ . Για διανύσματα  $\mathbf{f}$  και  $\mathbf{r}$  έχουμε

$$\mathbf{f}^T = [0 \ F_{1Y} \ 0 \ F_{2Y} \ 0 \ F_{3Y} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.4.3-10)$$

και

$$\mathbf{r}^T = [R_{1X} \ R_{1Y} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_{6X} \ R_{6Y} \ R_{7X} \ R_{7Y}] . \quad (3.4.3-11)$$

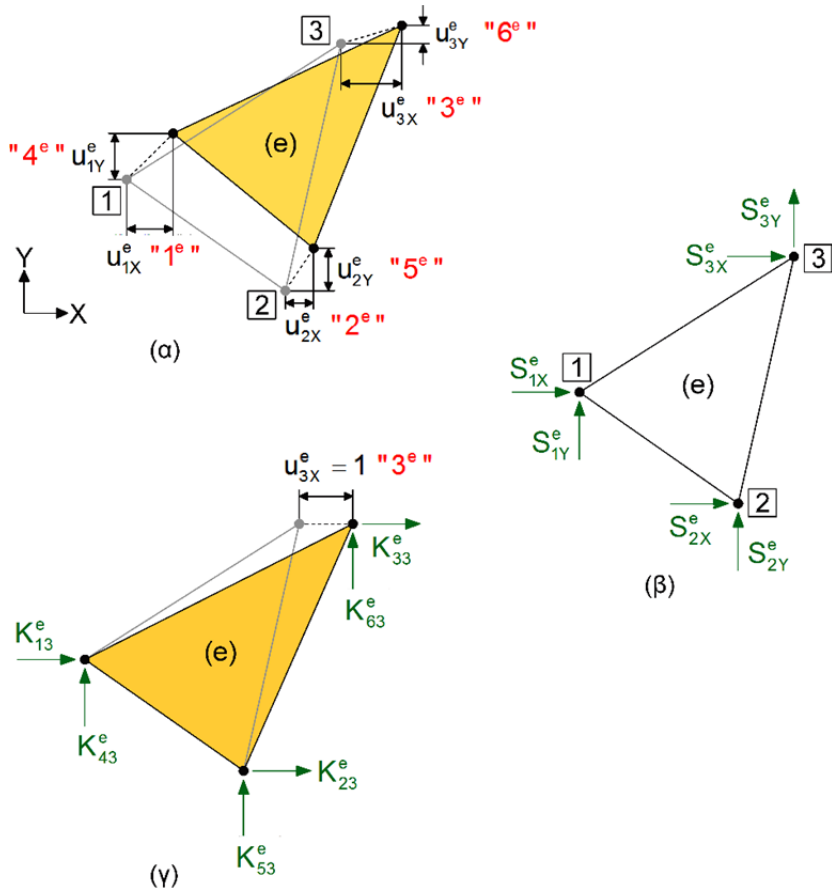
### **Βήμα 2<sup>ο</sup>: Θεώρηση των μεμονωμένων πεπερασμένων στοιχείων**

Στο σχήμα 3.4.3-3 φαίνεται ένα τυχόν τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο δίσκου αποσπασμένο από τον διακριτοποιημένο φορέα. Το τοπικό σύστημα αναφοράς  $x^e$ - $y^e$  του στοιχείου επιλέγεται εδώ, χάριν απλούστευσης της παρουσίασης, ταυτόσημο με το καθολικό σύστημα αναφοράς  $X$ - $Y$ . Συνεπώς, τα τοπικά στατικά μεγέθη του στοιχείου ταυτίζονται με τα αντίστοιχα καθολικά, γι' αυτό και παραλείπεται στη συνέχεια η υπογράμμιση των τοπικών μεγεθών. Οι 3 κόμβοι του στοιχείου αριθμούνται αντίθετα προς τη φορά του ωρολογίου. Δεδομένου ότι κάθε κόμβος έχει 2 άγνωστες μετατοπίσεις, το στοιχείο διαθέτει συνολικά 6 BE, οι οποίοι στο σχήμα 3.4.3-3(α) σημειώνονται με **κόκκινο** χρώμα και άνω δείκτη  $\mathbf{e}$ , προς διάκριση από τους BE του φορέα. Τα διανύσματα των κομβικών του μετατοπίσεων και των κομβικών του δυνάμεων ορίζονται ως εξής (Σχ. 3.4.3-3(α) και (β)):

$$\mathbf{u}^{eT} = [u_{1X} \ u_{2X} \ u_{3X} \ u_{1Y} \ u_{2Y} \ u_{3Y}]^e = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6]^e \quad (3.4.3-12)$$

$$\mathbf{s}^{eT} = [S_{1X} \ S_{2X} \ S_{3X} \ S_{1Y} \ S_{2Y} \ S_{3Y}]^e = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6]^e . \quad (3.4.3-13)$$

Αν και αυτονόητο, σημειώνεται ότι ο τρόπος αρίθμησης των κόμβων του στοιχείου, καθώς και η σειρά με την οποία εντάσσονται τα στατικά μεγέθη στο διάνυσμα στήλης θα μπορούσε να επιλεγεί διαφορετικά (π.χ.  $\mathbf{u}^{eT} = [u_{1X} \ u_{1Y} \ u_{2X} \ u_{2Y} \ u_{3X} \ u_{3Y}]$ ).



**Σχ. 3.4.3-3** Τριγωνικό πεπερασμένο στοιχείο δίσκου e: (α) ΒΕ και κομβικές μετατοπίσεις, (β) κομβικές δυνάμεις και (γ) συντελεστές στιβαρότητας  $K_{i3}^e$  ( $i=1, \dots, 6$ ) στο καθολικό σύστημα αναφοράς X-Y (Μέσα σε τετραγωνάκια δίνονται οι αριθμοί των 3 κόμβων του στοιχείου).

Μέσα στα όρια της γραμμικής θεωρίας, κάθε μία από τις 6 κομβικές δυνάμεις του στοιχείου αποτελεί γραμμική συνάρτηση των 6 κομβικών μετατοπίσεών του. Υπό την παραδοχή ότι το στοιχείο δεν φορτίζεται στο εσωτερικό του ( $s^o=0$ ), οι 6 αυτές γραμμικές συναρτήσεις (εξισώσεις) γράφονται σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} S_{1X} \\ S_{2X} \\ S_{3X} \\ S_{1Y} \\ S_{2Y} \\ S_{3Y} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}^e \cdot \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{2X} \\ u_{3X} \\ u_{1Y} \\ u_{2Y} \\ u_{3Y} \end{bmatrix}^e \quad (3.4.3-14a)$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{s}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e, \quad (3.4.3-14\beta)$$

όπου  $\mathbf{K}^e$  είναι εξ ορισμού το  $6 \times 6$  καθολικό μητρώο στιβαρότητας του τριγωνικού στοιχείου δίσκου. Η φυσική σημασία των συντελεστών στιβαρότητας  $K_{ij}^e$  είναι τελείως ανάλογη εκείνης των γραμμικών στοιχείων. Έτσι, π.χ., στο σχήμα 3.4.3-3(γ) φαίνονται οι 6 κομβικές δυνάμεις που αναπτύσσονται στους κόμβους του στοιχείου  $e$ , αν επιβληθεί στον κόμβο 3 μια μοναδιαία μετατόπιση  $u_{3x}=1$  κατά τη διεύθυνση του ΒΕ "3<sup>em</sup>" του στοιχείου. Οι 6 αυτές κομβικές δυνάμεις αντιστοιχούν στους 6 συντελεστές στιβαρότητας  $K_{i3}^e$  ( $i=1, \dots, 6$ ) της 3ης στήλης του μητρώου  $\mathbf{K}^e$  του στοιχείου. Στην § 3.4.4 θα υπολογιστούν οι συντελεστές στιβαρότητας  $K_{ij}^e$  του τριγωνικού στοιχείου δίσκου επίπεδης έντασης βάσει προσεγγιστικών συναρτήσεων παρεμβολής. Για τις ακόλουθες αναπτύξεις της παρούσας παραγράφου το μητρώο στιβαρότητας  $\mathbf{K}^e$  ( $e=1, \dots, 5$ ) θα θεωρηθεί γνωστό.

Συγκεντρωτικά, οι σχέσεις στιβαρότητας για τα 5 πεπερασμένα στοιχεία του παραδείγματός μας μπορούν να γραφούν σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}^{(1)} \\ \mathbf{s}^{(2)} \\ \mathbf{s}^{(3)} \\ \mathbf{s}^{(4)} \\ \mathbf{s}^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{(5)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)} \\ \mathbf{u}^{(3)} \\ \mathbf{u}^{(4)} \\ \mathbf{u}^{(5)} \end{bmatrix} \quad (3.4.3-15\alpha)$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{K}^* \mathbf{u}^*. \quad (3.4.3-15\beta)$$

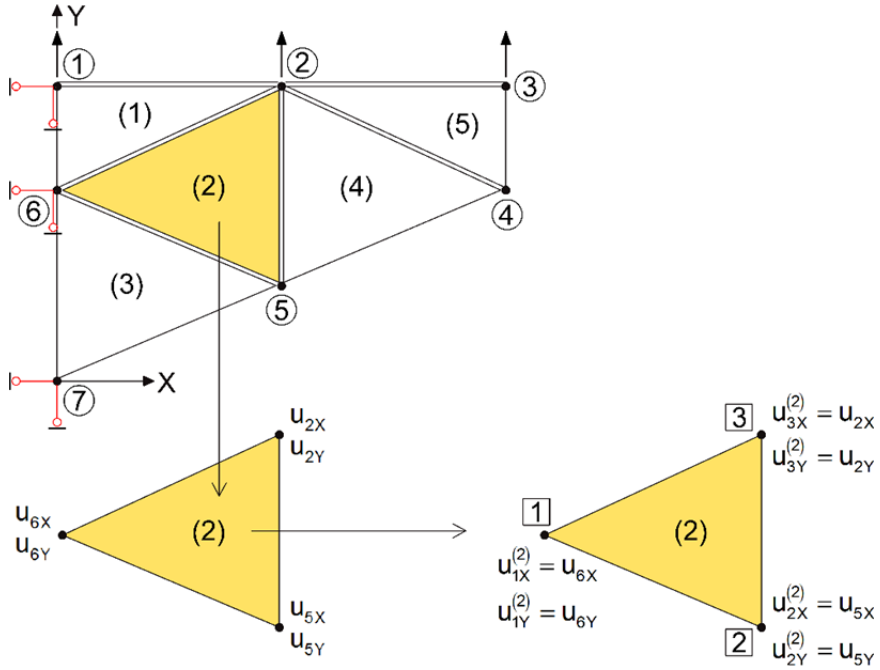
Σημειώνεται ότι εφόσον τα μητρώα  $\mathbf{K}^{(1)}$  έως  $\mathbf{K}^{(5)}$  είναι συμμετρικά, το διαγώνιο υπερμητρώο  $\mathbf{K}^*$  είναι και αυτό συμμετρικό.

### **Βήμα 3<sup>ο</sup>: Σύνθεση του διακριτοποιημένου φορέα και της φόρτισής του**

Όπως γνωρίζουμε, η σύνθεση του φορέα υλοποιείται υπολογιστικά με την ικανοποίηση ( $1^{ov}$ ) των συνθηκών συμβιβαστού του φορέα και ( $2^{ov}$ ) των συνθηκών ισορροπίας του φορέα. Η τρίτη βασική συνθήκη, η οποία αφορά στην υλική συμπεριφορά του φορέα, έχει ήδη ικανοποιηθεί για κάθε στοιχείο  $e$  και εκφράζεται μέσω των μητρώων στιβαρότητάς τους  $\mathbf{K}^e$ . Υπενθυμίζεται ότι η ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας και συμβιβαστού αναφέρεται μόνο στους κόμβους του διακριτοποιημένου φορέα, εφόσον η συνέχεια κατά μήκος των πλευρών των στοιχείων θεωρείται ότι έχει καταλυθεί.

#### A1. Η ικανοποίηση των συνθηκών συμβιβαστού (σύγκρ. § 2.4.4-A1)

Όπως στους γραμμικούς φορείς, οι συνθήκες συμβιβαστού ικανοποιούνται με τη βοήθεια των μητρώων αντιστοίχισης. Ως παράδειγμα παρουσιάζεται στο σχήμα 3.4.3-4 η αντιστοίχιση των ΒΕ του στοιχείου (2) του παραδείγματός μας με τους ΒΕ του φορέα.



**Σχ. 3.4.3-4** Αντιστοίχιση των BE στοιχείου (2) με τους BE του φορέα.

Σε μητρική μορφή η αντιστοίχιση γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{2X} \\ u_{3X} \\ u_{1Y} \\ u_{2Y} \\ u_{3Y} \end{bmatrix}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{1X} \\ u_{1Y} \\ u_{2X} \\ u_{2Y} \\ u_{3X} \\ u_{3Y} \\ u_{4X} \\ u_{4Y} \\ u_{5X} \\ u_{5Y} \\ u_{6X} \\ u_{6Y} \\ u_{7X} \\ u_{7Y} \end{bmatrix} \quad (3.4.3-16\alpha)$$

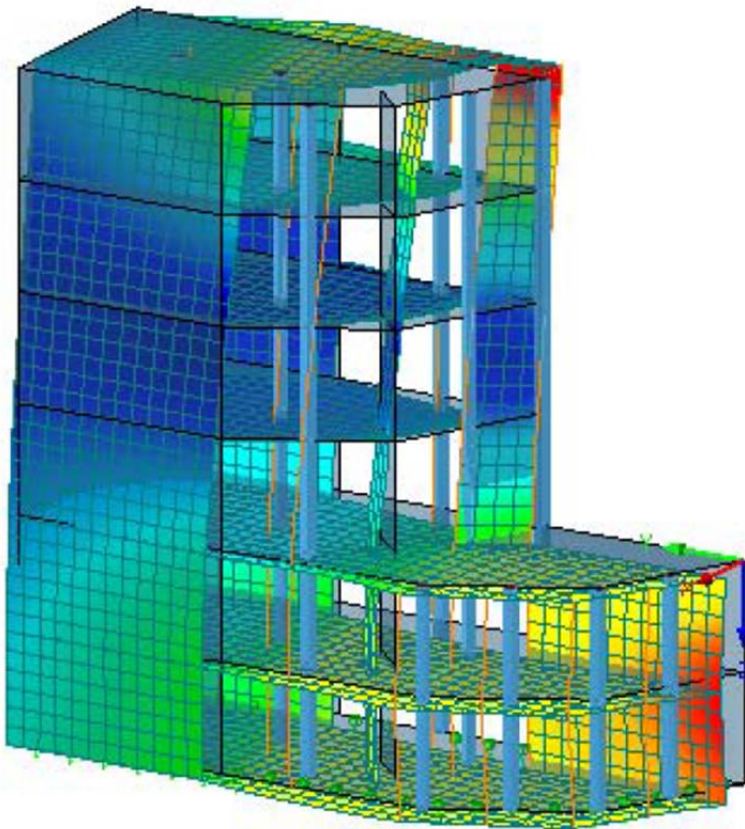
ή συμβολικά

$$\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{u} \quad , \quad (3.4.3-16\beta)$$

$\begin{matrix} (6 \times 1) & & (6 \times 14) & & (14 \times 1) \end{matrix}$

## Κεφάλαιο 4

# Η ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΚΤΙΡΙΑΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ Ο/Σ



Προσομοίωση κτιρίου με γραμμικά και επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία με επαγγελματικό πρόγραμμα ανάλυσης κατασκευών (απεικόνιση οθόνης Η/Υ).



Προσομοίωση πολυωρόφου μικτού φορέα Ο/Σ με ισοδύναμο πλαίσιο.

## 4. Η ΠΡΟΣΟΜΙΩΣΗ ΚΤΙΡΙΑΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ Ο/Σ

### 4.1 Αντικείμενο και στόχοι του κεφαλαίου 4

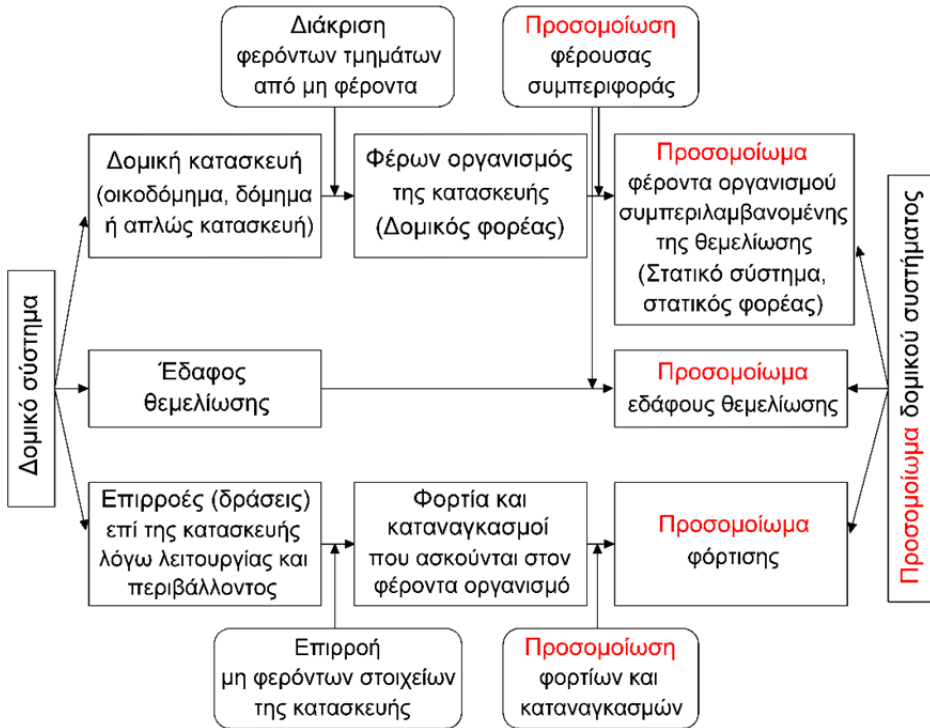
Στις τρεις φάσεις που περιλαμβάνει η τυπική "Στατική Μελέτη" μιας κατασκευής (μόρφωση του φέροντα οργανισμού - ανάλυση/διαστασιολόγηση - σχεδίαση) έγινε αναφορά στην § 1.1.3, ενώ στην § 1.1.4 παρουσιάστηκε με συντομία το βασικό τρίπτυχο αυτού που μονολεκτικά ονομάζεται "ανάλυση" και το οποίο συνίσταται στην προσομοίωση της μελετούμενης κατασκευής, στον υπολογισμό του προσομοιώματός της και στην αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (βλ. Σχ. 1.3.1-1). Το πρώτο μέρος αυτού του τρίπτυχου, δηλαδή ο καθορισμός του προσομοιώματος, αποτελεί το αντικείμενο του παρόντος κεφαλαίου. Χάριν οικονομίας χώρου, θα περιοριστούμε σε μία σειρά βασικών προβλημάτων που αναφέρονται κατά την προσομοίωση κτιριακών κατασκευών Ο/Σ. Εντούτοις, τηρουμένων των αναλογιών, οι προτεινόμενες λύσεις αφορούν εν μέρει και σε άλλου είδους δομικές κατασκευές. Οι αναπτύξεις του κεφαλαίου αυτού, που είναι ως επί το πλείστον εισαγωγικού χαρακτήρα, στοχεύουν στην εξοικείωση του αναγνώστη με ορισμένες ευρέως διαδεδομένες πρακτικές προσομοίωσης που εφαρμόζονται στην καθημερινή δομική πράξη.

Πριν μπούμε στο κυρίως θέμα του κεφαλαίου αυτού, επιβάλλεται να γίνει μία - έστω λακωνική- αναφορά στη δεσπόζουσα σημασία που έχει η μόρφωση του φέροντα οργανισμού, η οποία πάντα προηγείται της ανάλυσης της κατασκευής.

### 4.2 Η δεσπόζουσα σημασία της μόρφωσης του φέροντα οργανισμού

Σημειώνεται κατ' αρχάς ότι πολύ συχνά στην καθημερινή πράξη ο μελετητής-μηχανικός είναι αναγκασμένος να εκπονεί μελέτες υπό μεγάλη πίεση χρόνου. Ενώ δε παλαιότερα κατά μία ακραία διατύπωση "κατασκευάζαμε ό,τι μπορούσαμε να υπολογίσουμε", σήμερα είναι διάχυτη η άποψη ότι με τη βοήθεια των Η/Υ μπορούμε να υπολογίσουμε "σχεδόν τα πάντα". Το γεγονός αυτό εμπεριέχει τον κίνδυνο να "στήνονται" στα γρήγορα ξυλότυποι περίπλοκων ("όπως βολέψει") και ασαφούς λειτουργίας φερόντων οργανισμών και ακολούθως να αναλύονται τα αντίστοιχα υπολογιστικά μοντέλα με κάποιο επαγγελματικό πρόγραμμα Η/Υ.

Όμως, η υπέρ του δέοντος συρρίκνωση του χρόνου που διατίθεται από τον μελετητή για τη μόρφωση ενός ικανοποιητικού φέροντα οργανισμού του κτιρίου συρρικνώνει τη μελέτη σε ένα πρόβλημα εισαγωγής δεδομένων στον υπολογιστή και παραλαβής των εκτυπωμένων αποτελεσμάτων, και μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά λάθη και αστοχίες, *ιδιαίτερα σε κατασκευές που υπόκεινται σε σεισμικές διεγέρσεις*. Διότι οι αδυναμίες ενός πτωχού σε σύλληψη φέροντα οργανισμού δεν καλύπτονται ούτε θεραπεύονται ακόμη και από τον πλέον συνεπή αριθμητικό υπολογισμό του, όπως έδειξαν οι εμπειρίες από τους σεισμούς των τελευταίων δεκαετιών. Χωρίς υπερβολή μπορεί να ειπωθεί ότι η δόκιμη μόρφωση του φέροντα οργανισμού είναι σημαντικότερη από οποιαδήποτε υπολογιστική εξασφάλιση της κατασκευής.



Σχ. 4.4.1-1 Τα συστατικά του δομικού συστήματος και η προσομοίωσή του.

#### 4.4.2 Μηχανικό και υπολογιστικό προσομοίωμα

Η πολυπλοκότητα της πραγματικής μηχανικής συμπεριφοράς των δομικών συστημάτων μας αναγκάζει να χρησιμοποιούμε λιγότερο ή περισσότερο απλοποιημένα *μηχανικά προσομοιώματα* προκειμένου να καταστεί δυνατός ο υπολογισμός των εντάσεων και των παραμορφώσεών τους. Με τον όρο *μηχανικό προσομοίωμα* χαρακτηρίζουμε ένα μοντέλο της κατασκευής, το οποίο προκύπτει μέσα από μια σειρά εξιδανικεύσεων της πραγματικής κατασκευής που ισοδυναμούν με μικρότερες ή μεγαλύτερες απλοποιήσεις

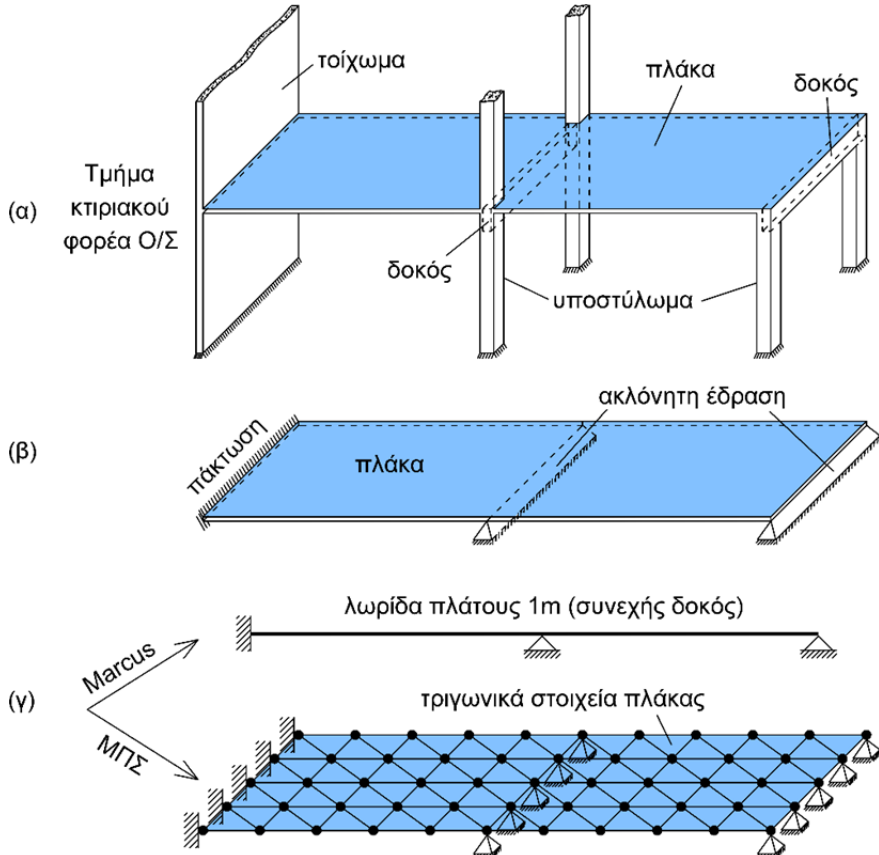
- (α) των γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κατασκευής (ανωδομής, θεμελίωσης) και των μηχανικών ιδιοτήτων των δομικών υλικών από τα οποία κατασκευάζεται ο φέρων οργανισμός της (προσομοίωμα φέροντα οργανισμού ή *στατικό σύστημα* ή *στατικός φορέας*),
- (β) των ιδιοτήτων του εδάφους πάνω στο οποίο θεμελιώνεται η κατασκευή (εδαφικό προσομοίωμα) και
- (γ) των χαρακτηριστικών των διαφόρων φορτίσεων στις οποίες αναμένεται να υποβληθεί η κατασκευή (φορτιστικό προσομοίωμα).

Το μηχανικό αυτό προσομοίωμα του όλου δομικού συστήματος (βλ. Σχ. 4.4.1-1, δεξιά) επιλύεται στη συνέχεια είτε με ακριβείς, αναλυτικές μεθόδους (σπανίως) είτε

με προσεγγιστικές υπολογιστικές μεθόδους (σχεδόν πάντα στην πράξη), όπως η ΜΠΣ. Στη δεύτερη περίπτωση υπεισέρχεται επομένως και μία ακόμη σειρά απλοστεύσεων και παραδοχών που αφορούν στις ίδιες τις μεθόδους υπολογισμού, οπότε μπορεί να μιλήσει κανείς για το *υπολογιστικό προσομοίωμα* της κατασκευής προς διάκριση από το μηχανικό.

Έστω, π.χ., ότι απαιτείται ο υπολογισμός της πλάκας στο τμήμα ενός κτιριακού φορέα που φαίνεται στο σχήμα 4.4.2-1(α). Ως μηχανικό προσομοίωμα της πλάκας μπορεί να θεωρηθεί η πλάκα αποσπασμένη από τον υπόλοιπο κτιριακό φορέα και εδραζόμενη επί ακλόνητων στηρίξεων (πάκτωση αριστερά και απλή στήριξη στις θέσεις των δοκών, Σχ. 4.4.2-1(β)). Προφανώς, η αγνόηση της παραμορφωσιμότητας των δοκών επί των οποίων εδράζεται η πλάκα, αποτελεί μία απλοποιητική παραδοχή του μηχανικού μοντέλου.

Η επίλυση μιας τέτοιας ακλόνητα εδραζόμενης πλάκας μπορεί να γίνει, π.χ., με τη μέθοδο των λωρίδων κατά Marcus (που συνίσταται στην επίλυση μιας συνεχούς



Σχ. 4.4.2-1 Τμήμα πραγματικής κατασκευής (α), απλοποιημένο μηχανικό προσομοίωμα της πλάκας (β) και δύο πιθανά υπολογιστικά προσομοιώματα της πλάκας (γ).

δοκού) ή, αν απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια, με τη ΜΠΣ, χρησιμοποιώντας επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία πλάκας. Επομένως, το υπολογιστικό προσομοίωμα είναι διαφορετικό για τις δύο αυτές περιπτώσεις επίλυσης, παρόλο που αυτές αναφέρονται στο ίδιο μηχανικό προσομοίωμα. Είναι δε σαφές ότι η επιλογή του υπολογιστικού προσομοιώματος θα επηρεάσει την ποιότητα των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, το κατά πόσο δηλαδή αυτά αποδίδουν ικανοποιητικά τη συμπεριφορά της πραγματικής κατασκευής.

Σημειώνεται ότι συνήθως στην πράξη δεν γίνεται διάκριση μεταξύ μηχανικού και υπολογιστικού μοντέλου και με τον όρο *υπολογιστικό προσομοίωμα* ή και μόνο *προσομοίωμα* νοούνται κατά συγχώνευση και τα δύο μαζί<sup>1</sup>. Διότι, αν και η διάκριση αυτή οφείλει να παραμένει συνειδητή στον μελετητή, εκείνο που ενδιαφέρει τελικά είναι το μοντέλο που εισάγεται στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, δηλαδή το υπολογιστικό μοντέλο, από την ποιότητα του οποίου εξαρτάται και η ποιότητα του τελικού αποτελέσματος.

Επίσης, σημειώνεται ότι αντί του όρου *μηχανικό μοντέλο* χρησιμοποιείται συχνά και ο όρος *στατικό μοντέλο*, ακόμη και σε περιπτώσεις που η φόρτιση δεν είναι μόνον στατική. Ορθότερο είναι πάντως να γίνεται διάκριση μεταξύ στατικού και *δυναμικού μοντέλου* μιας κατασκευής. Διότι, ενώ στο στατικό μοντέλο οι διάφορες μοντελοποιήσεις αφορούν στα γεωμετρικά και ελαστικά χαρακτηριστικά (αποστάσεις, ιδιότητες διατομών κτλ.), στο δυναμικό μοντέλο συμπεριλαμβάνεται επιπλέον και η *προσομοίωση των μαζών*, καθώς και άλλων παραγόντων που επηρεάζουν τη δυναμική συμπεριφορά της κατασκευής (π.χ. αποσβέσεις). Οφείλει επομένως να γίνει διάκριση μεταξύ της *ελαστικής* και της *αδρανειακής* προσομοίωσης μιας κατασκευής. Σπανιότερα συναντάται και ο -μάλλον παρεξηγήσιμος- όρος *μαθηματικό μοντέλο*.

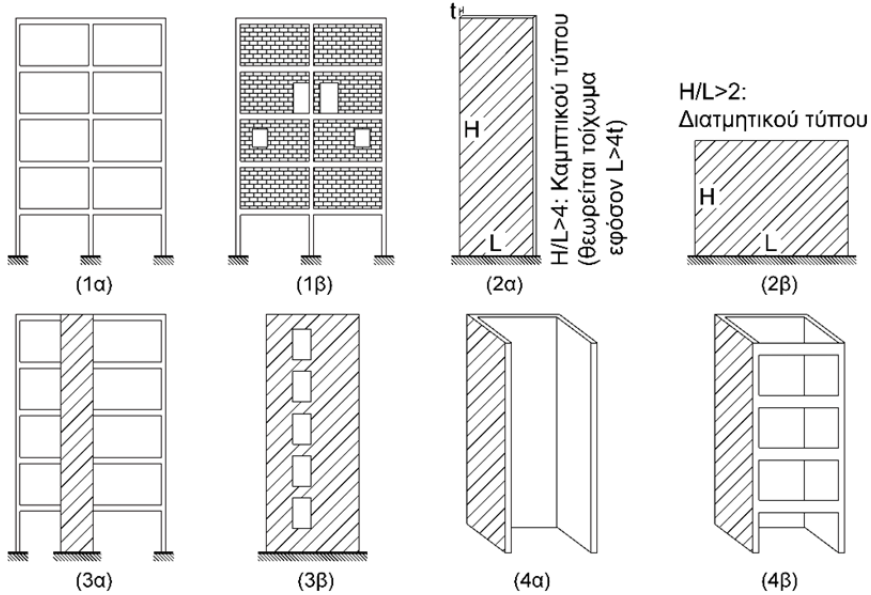
#### **4.4.3 Ανάλυση παραλλαγών του προσομοιώματος, στατικό αισθητήριο και η αρχή της αρμονικής ακρίβειας**

Είναι πρόδηλο ότι μόνο μέσα από μία ώριμη επιλογή προσομοιωμάτων θα προκύψουν ρεαλιστικά αποτελέσματα, δηλαδή αποτελέσματα που θα αποδίδουν με επαρκή για την εκάστοτε περίπτωση ακρίβεια τη μηχανική συμπεριφορά της πραγματικής κατασκευής.

Είναι επίσης αυτονόητο ότι μια πραγματική κατασκευή δεν μπορεί να αποδοθεί μονοσήμαντα από ένα και μόνο στατικό μοντέλο. Ακόμη και μέσα στα στενά όρια της γραμμικής ελαστικής θεωρίας, η εξιδανίκευση του φορέα μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ως εκ τούτου, οποιοδήποτε προσομοίωμα είναι πάντοτε επιδεκτικό βελτιώσεων, οι οποίες θα προέλθουν από την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων της προηγηθείσας επίλυσης (Σχ. 4.4.3-1).

Με αυτό το δεδομένο, ο μελετητής θα πρέπει να επιδιώξει εξ αρχής τη διερεύνηση

<sup>1</sup> Αβραμίδης Ι.Ε., *Υπολογιστικά Προσομοιώματα στην Έρευνα και στην Πράξη*, 15<sup>ο</sup> Έλλ. Συνέδρ. Σκυροδ., Γενική Εισήγηση, τόμ. Α, σελ. 41-61, Αλεξανδρούπολη, Οκτ. 2006.



**Σχ. 4.6.1-2** Χαρακτηριστικοί υποφορείς της ανωδομής πολυώροφων κτιρίων Ο/Σ (1α και 1β: αμιγή πλαίσια χωρίς και με τοιχοπλήρώσεις, 2α και 2β: επίπεδα τοιχώματα καμπητικού και διατμητικού τύπου, 3α: μικτό πλαίσιο, 3β: επίπεδο τοίχωμα με οπές ή δύο συνδεδεμένα τοιχώματα μέσω δοκών σύζευξης, 4α: ανοικτός πυρήνας, 4β: ημιανοικτός πυρήνας με δοκούς αυτοσύζευξης).

Από την κατά κανόνα μονολιθική σύζευξη των υποστυλωμάτων με τις δοκούς σχηματίζονται, ως υποφορείς, τα *αμιγή πλαίσια*, που μπορεί να είναι επίπεδα ή χωρικά (βλ. Σχ. 4.6.1-2 (1α), (1β) και Σχ. 4.6.1-3).



**Σχ. 4.6.1-3** Επίπεδο αμιγές πλαίσιο ως υποφορέας μιας χωρικής μικτής κατασκευής πλαισίων-τοιχωμάτων που φέρουν πλάκες στις στάθμες των ορόφων.

Επίσης, από τη μέσω των δοκών σύζευξη των υποστυλωμάτων με τοιχώματα ή/και με πυρήνες σχηματίζονται υποφορείς που χαρακτηρίζονται ως *μικτά πλαίσια* ή *διπλά συστήματα* (βλ. Σχ. 4.6.1-2 (3α) και Σχ. 4.6.1-4).



(α)



(β)

**Σχ. 4.6.1-4** Επίπεδα μικτά πλαίσια ως υποφορείς μιας χωρικής μικτής κατασκευής πλαίσιων-τοιχωμάτων που φέρουν πλάκες στις στάθμες των ορόφων.

Αμιγή και μικτά πλαίσια ενδέχεται να έχουν τοιχοπληρώσεις με ή χωρίς ανοίγματα για θύρες και παράθυρα (Σχ. 4.6.1-2 (1β)). Ανοίγματα μπορεί να έχουν και τα επίπεδα τοιχώματα (Σχ. 4.6.1-2 (3β) και Σχ. 4.6.1-4(β)) όπως και οι πυρήνες (Σχ. 4.6.1-5), οι οποίοι συνήθως περιέχουν το κλιμακοστάσιο του κτιρίου και το φρεάτιο του ανελκυστήρα.



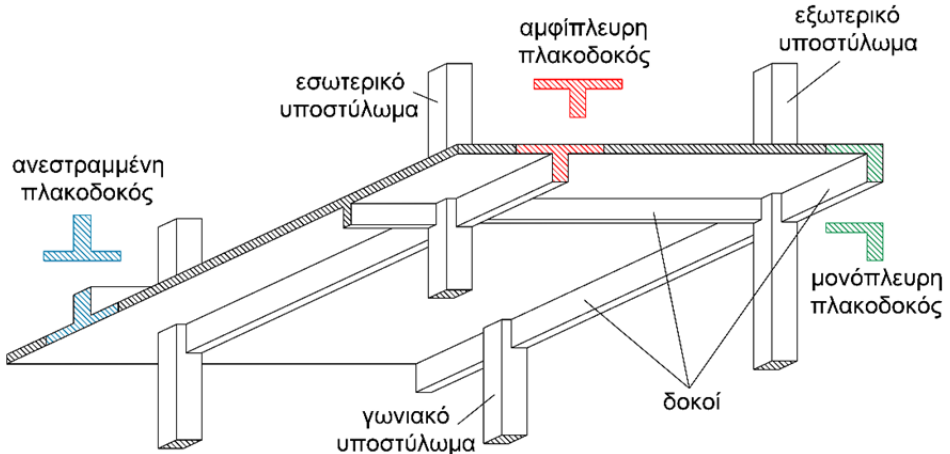
(α)



(β)

**Σχ. 4.6.1-5** Πυρήνας χωρίς ανοίγματα (α) και πυρήνας με ανοίγματα (β).

Σημειώνεται ότι εφόσον οι πλάκες εδράζονται επί των δοκών και είναι μονολιθικά συνδεδεμένες με αυτές, η διατομή των ζυγμάτων των αμιγών ή μικτών πλαισίων είναι διατομή αμφίπλευρης ή μονόπλευρης πλακοδοκού (Σχ. 4.6.1-6). Το "συνεργαζόμενο" με τη δοκό εύρος της πλάκας του ορόφου, δηλαδή πλάτος της πλάκας της πλακοδοκού, το οποίο θα ληφθεί υπόψη κατά την ανάλυση, καθορίζεται από τους Δομικούς Κανονισμούς, αποτελώντας μία από τις παραδοχές (απλοποιήσεις) του μηχανικού προσομοιώματος του κτιρίου.



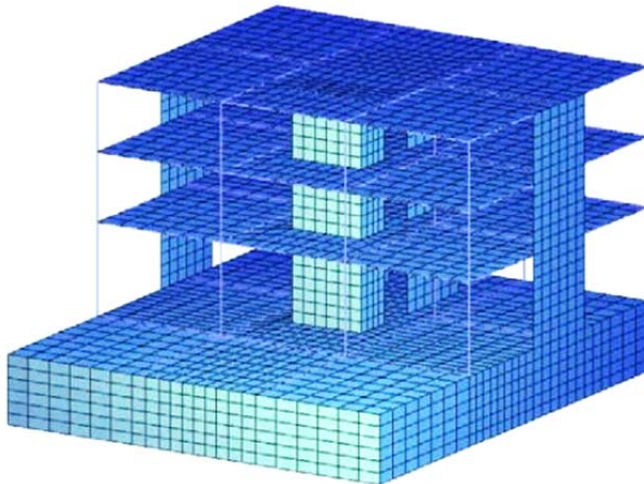
Σχ. 4.6.1-6 Πλάκα ορόφου επί δοκών - Διατομές αμφί- και μονόπλευρης πλακοδοκού.

Πλάκες, δοκοί, υποστυλώματα, επίπεδα τοιχώματα και πυρήνες αποτελούν τα βασικά δομικά συστατικά της ανωδομής, τα οποία μαζί με τα πέδιλα, τις πεδιλοδοκούς και τις πλάκες κοιτόστρωσης του φορέα θεμελίωσης συνθέτουν τον *φέροντα οργανισμό (φ/ο)* μικρών και μεγάλων κτιριακών κατασκευών. Μέσω του φ/ο παραλαμβάνονται και μεταφέρονται στο έδαφος θεμελίωσης όλα τα φορτία, κατακόρυφα και οριζόντια, που ενεργούν επάνω στην κατασκευή.

Σημειώνεται ότι γενικά δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ δομικών στοιχείων που φέρουν τα κατακόρυφα και δομικών στοιχείων που φέρουν τα οριζόντια φορτία. Εντούτοις, συχνά γίνεται αναφορά στο *σύστημα ανάληψης οριζόντιων φορτίων* (λόγω σεισμού και ανεμοπίεσης). Ο όρος αυτός χρησιμοποιείται για να χαρακτηρίσει εκείνο το σύνολο των υποφορέων που είναι κατ' ουσία υπεύθυνο για τη μεταφορά των οριζόντιων φορτίων στο έδαφος θεμελίωσης. Είναι προφανές ότι το σύστημα ανάληψης οριζόντιων φορτίων συνίσταται από πλαίσια, τοιχώματα και πυρήνες, που βέβαια συμμετέχουν ταυτόχρονα και στην παραλαβή των κατακόρυφων φορτίων.

#### 4.6.2 Η προσομοίωση του φ/ο με γραμμικά μόνο στοιχεία

Από τα προηγουμένως αναφερθέντα γίνεται σαφές ότι ο συνήθης δομικός φορέας της ανωδομής πολυωρόφων κατασκευών συναποτελείται από *γραμμικά στοιχεία* (υποστυλώματα, δοκοί ανωδομής, πεδιλοδοκοί θεμελίωσης), *επιφανειακά στοιχεία* (πλάκες ορόφων, τοιχώματα, πυρήνες, πλάκα γενικής κοιτόστρωσης) και *τρισδιάστατα στοιχεία όγκου* (πέδιλα). Έτσι, το κατ' αρχάς μηχανικό του προσομοίωμα αποτελείται και από τα τρία είδη δομικών στοιχείων, οπότε μια συνεπής εφαρμογή της ΜΠΣ θα απαιτούσε για τη διακριτοποίησή του τη χρησιμοποίηση αντίστοιχων πεπερασμένων στοιχείων: γραμμικά στοιχεία για δοκούς, υποστυλώματα και πεδιλοδοκούς, επιφανειακά πεπερασμένα στοιχεία (δίσκου, πλάκας ή κέλυφους, ανάλογα με την περίπτωση) για πλάκες, τοιχώματα και πυρήνες, καθώς και τρισδιάστατα στοιχεία για τα πέδιλα (βλ. Σχ. 3.4.1-3 και Σχ. 4.6.2-1).



Σχ. 4.6.2-1 Διακριτοποίηση κτιρίου και τμήματος του εδάφους θεμελίωσης με γραμμικά, επιφανειακά και τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία<sup>1</sup>.

Εντούτοις, τα συνήθη (συμβατικά) κτίρια μελετώνται κατά κανόνα στην πράξη με τρόπο που παρακάμπτει την ανάγκη χρήσης επιφανειακών και τρισδιάστατων πεπερασμένων στοιχείων, διότι αυτή

- (1) απαιτεί από τον μελετητή εμπειριστατωμένες γνώσεις της ΜΠΣ στη γενική της μορφή (δηλαδή όχι μόνο για γραμμικά στοιχεία) και μεγάλη εμπειρία στη χρησιμοποίηση σχετικών επαγγελματικών προγραμμάτων,
- (2) προϋποθέτει τη διαθεσιμότητα κατάλληλων επαγγελματικών προγράμματος που να συνδυάζουν τη χρήση γραμμικών, επιφανειακών και τρισδιάστατων

<sup>1</sup> Werkle H. and Volarevic J., Modelling of dynamic soil-structure-interaction in the three-dimensional finite element analysis of buildings, 2nd Europ. Conf. on Earthq. Eng and Seismology, Istanbul, Aug. 25-29, 2014.