



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Ο μηχανικός πρέπει να συνεχίσει να βελτιώνει την ποιότητα της δουλειάς του εάν επιθυμεί να είναι ανταγωνιστικός στην αγορά της χώρας του και γενικότερα της Ευρώπης. Μία σημαντική αναλογία σε αυτήν την ποιοτική βελτίωση διαμορφώνεται από τους μηχανικούς, επειδή αυτοί είναι οι ειδικοί που σχεδιάζουν και αναπτύσσουν νέα κατασκευαστικά συστήματα και διαδικασίες που βελτιώνουν τα υπάρχοντα συστήματα. Οι πιθανότητες και η στατιστική είναι σπουδαία εργαλεία σε αυτές τις δραστηριότητες, επειδή προμηθεύουν τον μηχανικό και με τα δύο αναλυτικές και περιγραφικές μεθόδους, οι οποίες διαπραγματεύονται με την αβεβαιότητα των παρατηρούμενων δεδομένων.

Οι απρόβλεπτες εξελίξεις σε διάφορα φαινόμενα και γενικότερα οι αβεβαιότητες στο σχεδιασμό τεχνικών συστημάτων και άλλων κατασκευαστικών έργων είναι αναπόφευκτες. Είναι αναγνωρισμένο ότι οι έννοιες και μέθοδοι των πιθανοτήτων και στατιστικής συντελούν στην αξιολόγηση των επιπτώσεων των στοχαστικών φαινομένων και του κλίματος της αβεβαιότητας στην συμπεριφορά των τεχνικών συστημάτων. Η πιθανοθεωρία και η στατιστική ανάλυση προσφέρουν την μεθοδολογία για ανάπτυξη μοντέλων που μετρούν την αβεβαιότητα και αξιολογούν τις επιπτώσεις της στον σχεδιασμό τεχνικών συστημάτων.

Η πολυπλοκότητα των συστημάτων που συναντάται στην μηχανολογία απαιτεί κατανόηση των εννοιών της πιθανοθεωρίας και διευκόλυνση στην χρήση των εργαλείων πιθανότητας. Το εισαγωγικό αυτό μάθημα δεν διδάσκει μόνο τις βασικές θεωρητικές έννοιες στους φοιτητές, αλλά πώς να λύνονται προβλήματα που προκύπτουν στην μηχανολογική πράξη. Το μάθημα αυτό έχει επίσης σαν σκοπό την ανάπτυξη της ικανότητας του μηχανικού για επίλυση προβλημάτων του και την κατανόηση πώς να τα μεταφέρει από τον πραγματικό κόσμο σε ένα όσο γίνεται απλούστερο πιθανοτικό μοντέλο.

Τα στοχαστικά μοντέλα είναι εργαλεία χρήσιμα στη σχεδίαση σύνθετων συστημάτων έτσι ώστε να είναι αποτελεσματικά, αξιόπιστα και οικονομικά. Αυτό το βιβλίο είναι μία εισαγωγή στις πιθανότητες και στατιστική πολύ χρήσιμο για την ανάπτυξη στοχαστικών μοντέλων. Η πρόκληση είναι να αναπτυχθούν απλά μοντέλα τα οποία εξηγούν όλες τις σχετικές πλευρές του προβλήματος από τον πραγματικό κόσμο.

Πιθανότητες και στατιστική είναι *μάθημα* που περιλαμβάνει έννοιες και μεθόδους όχι αρκετά εύκολες για τους φοιτητές της πολυτεχνικής σχολής. Για να αντεπεξέλθουμε αυτή την δυσκολία, μεγάλη έμφαση αποδίδεται στον τρόπο διδασκαλίας και εμπέδωσης αυτών των εννοιών. Στόχος αυτού του βιβλίου είναι να κάνει ευκολότερο για τους μηχανικούς φοιτητές την κατανόηση και αφομοίωση των πιθανοτήτων. Αυτό το βιβλίο θα τους βοηθήσει να ανακαλύψουν πως αυτά τα θέματα σχετίζονται με τα ενδιαφέροντά τους και τους είναι άμεσα χρειαζόμενα επειδή αυτό γράφθηκε ειδικότερα για τα προβλήματα του μηχανικού.

Θα μπορούσε κανείς να θέσει το ερώτημα γιατί γράφθηκε ένα νέο βιβλίο ειδικά για μηχανικούς. Πρώτον, υπάρχει ειδικότερη σπουδαιότητα των μεθόδων πιθανοτήτων στις εφαρμογές του μηχανικού, όπως τηλεπικοινωνία, αξιοπιστία πολύπλοκων συστημάτων, κατασκευές, εδαφομηχανική, υδρολογικές μελέτες, συγκοινωνιακή τεχνική, μόλυνση περιβάλλοντος. Πιθανοκρατικά μοντέλα

χρησιμοποιούνται για να σχεδιάσουν συστήματα τα οποία λειτουργούν σε περιβάλλον αβεβαιότητας με διαφορετικές συνθήκες, κατά συνέπεια απαιτούνται νέες προσεγγίσεις. Δεύτερον, παλαιότερα βιβλία παραλείπουν ειδικά σπουδαία και μοντέρνα προβλήματα μηχανικού και αντί αυτού επικεντρώνονται πολλές φορές σε άλλα θέματα τα οποία μπορεί να μην έχουν άμεση σχέση με τον σύγχρονο μηχανικό. Για παράδειγμα, σήμερα έμφαση δίνεται όχι μόνο στην αξιοπιστία μιας κατασκευής ή ενός συστήματος αλλά και στην προφύλαξη του περιβάλλοντος.

Αυτό το βιβλίο είναι μία εισαγωγή για το μάθημα της πιθανοθεωρίας, συμπερασματικής στατιστικής και ανθεκτικής στατιστικής (robust statistics) στους φοιτητές πολυτεχνείου ή και άλλων επιστημών. Ενώ οι περισσότερες από τις μεθόδους που παρουσιάζουμε είναι βασικές και ουσιώδεις για πιθανοκρατική ανάλυση και σε άλλες κατευθύνσεις, επιλέξαμε την επικέντρωση περισσότερο σε μηχανικά προσανατολισμένα ενδιαφέροντα. Πιστεύουμε ότι αυτή η προσέγγιση θα εξυπηρετήσει καλύτερα τους μηχανικούς φοιτητές και θα τους συναρπάσει σε πολλές εφαρμογές των πιθανοτήτων και στατιστικής στην περιοχή τους. Έχει γίνει μεγάλη προσπάθεια τα περισσότερα από τα παραδείγματα, ασκήσεις και προβλήματα να είναι μηχανικού περιεχομένου από τον πραγματικό κόσμο, τα οποία πάρθηκαν από μία μοντέρνα βιβλιογραφία πιθανοτήτων και στατιστικής για μηχανικούς, ή και από την δική μου εμπειρία εφαρμογής μεθόδων πιθανοτήτων σε προβλήματα μηχανικού.

Πιστεύω, ότι οι μηχανικοί όλων των κατευθύνσεων θα έπρεπε να πάρουν τουλάχιστον ένα μάθημα στις πιθανότητες και στατιστική. Ατυχώς, λόγω και άλλων υποχρεώσεων τους οι περισσότεροι μηχανικοί παίρνουν μόνο το βασικό μάθημα πιθανοτήτων και στατιστικής. Η ύλη αυτού του βιβλίου επικεντρώνεται περισσότερο στην μεθοδολογία των πιθανοτήτων.

Έχει διατηρηθεί ένα σχετικά μικρό μαθηματικό υπόβαθρο κυρίως στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας των πιθανοτήτων και των μοντέλων της συμπερασματικής στατιστικής. Φοιτητές οι οποίοι έχουν συμπληρώσει το πρώτο μέρος σε ολοκληρωτικό λογισμό δεν έχουν καμία δυσκολία στην κατανόηση όλων των κεφαλαίων αυτού του βιβλίου. Βασικά, η πρόθεσή μου είναι να δώσω στον αναγνώστη την μάθηση και κατανόηση της μεθοδολογίας και πώς να την εφαρμόσει στα προβλήματα του μηχανικού. Οι αναγκαίες μαθηματικές βάσεις της θεωρίας των πιθανοτήτων αναπτύσσονται μόνο στα ουσιώδη αξιώματα, θεωρήματα και βασικούς κανόνες. Οι απαραίτητες μαθηματικές αποδείξεις περιορίζονται στο ελάχιστο. Όμως, θα συμβούλευα τον αναγνώστη να ακολουθήσει τις όποιες αποδείξεις συναντά για πληρέστερη κατανόηση των εννοιών και μεθόδων των πιθανοτήτων και στατιστικής.

Η επεξήγηση της μεθοδολογίας συνοδεύεται και από τις υποθέσεις που γίνονται. Τονίζονται ιδιαίτερα οι ορισμοί, και σε πολλές περιπτώσεις σημειώνονται οι περιορισμοί και γίνονται παρατηρήσεις για να αποφευχθούν τυχόν παγίδες ή άλλες παρερμηνείες στις έννοιες των πιθανοτήτων. Ακόμη, σε πολλούς κανόνες ή αποτελέσματα δίνεται η πρακτική τους ερμηνεία προκειμένου να τα κατανοήσει και χρησιμοποιήσει ο μηχανικός στις δικές του εφαρμογές.

Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό αυτού του βιβλίου είναι η πολύ καλή επιλογή παραδειγμάτων, ασκήσεων και προβλημάτων μηχανικού. Δίνονται και οι λύσεις με λεπτομερή επεξήγηση σε αρκετές ασκήσεις και προβλήματα. Έτσι, οι φοιτητές αποκτούν γνώση και ικανότητα πριν ασχοληθούν περαιτέρω με άλυτες ασκήσεις ή προβλήματα μηχανικού.

Το **πρώτο** μέρος του βιβλίου αναφέρεται στις **πιθανότητες**, και περιλαμβάνει τα κεφάλαια 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 και 11. Στο κεφάλαιο 2 και 3 αναπτύσσεται το υπόβαθρο της *πιθανοθεωρίας* που μπορεί να χρησιμοποιήσει ο μηχανικός για την εκτίμηση πιθανότητας πραγματοποίησης στοχαστικών γεγονότων. Χρησιμοποιώντας τα *βασικά αξιώματα*, θεωρήματα και κανόνες καταλήγουμε στην ολική πιθανότητα και θεώρημα του Bayes. Ο αναγνώστης είναι απαραίτητο να κατανοήσει πλήρως το δεύτερο και τρίτο κεφάλαιο τόσο γιατί αναφέρεται σε βασικές έννοιες των πιθανοτήτων, όσο γιατί αποτελεί και τον πυρήνα στις μεθόδους πιθανοτήτων και στατιστικής που θα ακολουθήσουν.

Ακολουθούν τα κεφάλαια 4, 5, 6 και 7 που διευρύνουν το υπόβαθρο των πιθανοτήτων, πολύ βασικό για την κατανόηση και μοντελοποίηση των προβλημάτων του, καθώς και για την ανάπτυξη

της στατιστικής μεθοδολογίας. Τα κεφάλαια αυτά, καλύπτουν τις βασικές έννοιες για τις *τυχαίες μεταβλητές* και τις απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να πληρούν για να ακολουθούν τις χρήσιμες *κατανομές πιθανοτήτων*. Ορίζονται οι σπουδαιότερες κατανομές πιθανοτήτων και αναφέρονται οι ιδιότητές των που σχετίζονται με τις διάφορες εφαρμογές του μηχανικού. Στο κεφάλαιο 8 αναπτύσσεται η **από κοινού** κατανομή πιθανότητας σε μία δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή και δίνεται έμφαση πως αυτή οδηγεί σε μία οικογένεια περιθωριακών κατανομών. Το κεφάλαιο 9 σχετίζεται με την κατανομή πιθανότητας της **συνάρτησης** μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το κεφάλαιο 10, όπου προσδιορίζονται σε ποιες κατανομές ισχύει η αναπαραγωγική ιδιότητα, π.χ. το άθροισμα κανονικών μεταβλητών ακολουθεί κανονική κατανομή; Το άθροισμα Poisson μεταβλητών ακολουθεί Poisson κατανομή; Και άλλα. Όλα αυτά τεκμηριώνονται με τις ιδιότητες ροπογεννήτριας συνάρτησης. Επίσης, σπουδαία παράγραφος στο κεφάλαιο 10 είναι αυτή με το **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα Κ.Ο.Θ.**, το οποίο αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο στην Στατιστική Συμπερασματολογία και διευκολύνει την προσέγγιση Διωνυμικής και Poisson με κανονική κατανομή.

Τέλος το κεφάλαιο 11 αναφέρεται στον προσδιορισμό *εμπειρικών* συχνοτήτων με την τεχνική της *περιγραφικής* στατιστικής και πίνακες κατανομής συχνοτήτων.

Το **δεύτερο** μέρος του βιβλίου περιλαμβάνει τα βασικότερα κεφάλαια της **συμπερασματικής στατιστικής**. Αυτά είναι το κεφάλαιο 12, το οποίο ασχολείται με την *εκτίμηση παραμέτρων* (σημειακή και διαστήματος εμπιστοσύνης) και αποτελεί τον *ακρογωνιαίο λίθο* των περισσότερων μοντέλων στην στατιστική συμπερασματολογία. Η κατανόηση των εννοιών, που σχετίζονται με τις εκτιμήτριες συναρτήσεις, είναι πολύ βασική και διευκολύνει τον αναγνώστη στην περεταίρω ανάπτυξη στατιστικών μοντέλων. Στη συνέχεια το κεφάλαιο 13 αναφέρεται στον *έλεγχο υποθέσεων*, το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στην λήψη αποφάσεων σε προβλήματα όπου η αξιοπιστία των τιμών των παραμέτρων και η σύγκρισή τους μεταξύ διαφορετικών πληθυσμών παίζει καθοριστικό ρόλο. Τελικά, στο κεφάλαιο 14 αναπτύσσεται η *ανάλυση παλινδρόμησης*. Τα περισσότερα προβλήματα του μηχανικού αλλά και πολλών άλλων επιστημόνων σχετίζονται άμεσα ή έμμεσα με κάποιο μοντέλο παλινδρόμησης. Με την *ανάλυση παλινδρόμησης* διερευνάται κατά πόσο είναι δυνατόν να αναπτυχθούν αξιόπιστα μοντέλα *πρόβλεψης* με βάση την συσχέτιση μεταξύ δύο ή και περισσότερων μεταβλητών. Το κεφάλαιο 15 είναι απαραίτητο για τους πειραματικούς σχεδιασμούς. Με τη διαδικασία ANOVA διεκπεραιώνουμε στατιστικούς ελέγχους μέσω τιμών πληθυσμών που ανάγονται σε διάφορα επίπεδα παραγόντων και επεμβάσεων.

Τέλος, το **τρίτο** μέρος του βιβλίου αφιερώνεται στην πιο μοντέρνα περιοχή της στατιστικής ό-πως η **Ανθεκτική Στατιστική (Robust Statistics)**. Η ανθεκτική στατιστική αναπτύχθηκε κυρίως τις τελευταίες τρεις δεκαετίες και έχει ως σκοπό τη βελτίωση των καλών ιδιοτήτων των εκτιμητών της συμπερασματικής στατιστικής όταν τα δεδομένα δεν πληρούν ακριβώς τις κανονικές προϋποθέσεις. Ο μηχανικός δεν επιθυμεί μόνο μερικές παρατηρήσεις (**outliers**) του δείγματος να επιδρούν καθοριστικά στην αναγνώριση στοχαστικών μοντέλων ή εκτίμηση των παραμέτρων τους. Στους ανθεκτικούς εκτιμητές η *επίδραση* της κάθε παρατηρήσεις των δεδομένων είναι περιορισμένη. Η τυχόν μόλυνση των δεδομένων ανιχνεύεται και απομακρύνεται από το δείγμα, έτσι ώστε το στατιστικό μοντέλο να προσαρμόζεται στην *πληθώρα* των δεδομένων. Το κεφάλαιο 16 ορίζει πότε μία ανθεκτική εκτίμηση είναι ποιοτικά και ποσοτικά καλή και αναφέρει περιληπτικά τις διάφορες στρατηγικές προσέγγισης του προβλήματος. Τα κεφάλαια 17 και 18 κατηγοριοποιούν τους βασικότερους ανθεκτικούς εκτιμητές που έχουν προταθεί μέχρι σήμερα στην εκτίμηση παραμέτρων κεντρικής τάσης, και παλινδρόμησης. Τονίζονται τα πλεονεκτήματα των διάφορων τεχνικών ανθεκτικής εκτίμησης, τα οποία διευκολύνουν τον μηχανικό στην επιλογή της πιο κατάλληλης ανθεκτικής διαδικασίας για την στατιστική ανάλυση των δεδομένων του. Εξίσου χρήσιμο είναι και το κεφάλαιο 19 του βιβλίου το οποίο σχετίζεται με την ανθεκτική *αναγνώριση* (robust detecting) των outliers σε μολυσμένα δεδομένα ενός πολυμεταβλητού πίνακα και την ανθεκτική εκτίμηση συσχέτισης και συνδιακύμανσης (robust covar-

iance). Αυτό αποτελεί ίσως την πιο *νευραλγική* περιοχή σε πολλές εφαρμογές του μηχανικού και όλων των άλλων ερευνητών για την ανάλυση πολυπαραγοντικών δεδομένων. Τέλος, το κεφάλαιο 20 σχετίζεται με την ανθεκτική εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου χρονικής σειράς, όπου επικεντρωμάστε κυρίως στην περίπτωση της αυτοπαλινδρόμησης (robust autoregression).

Οι λύσεις των Ασκήσεων και Προβλημάτων συγκεντρώνονται στο τελευταίο κεφάλαιο του βιβλίου (κεφάλαιο 21).



## Κεφάλαιο 2

### Βασικές Έννοιες Πιθανότητας

- Αβεβαιότητα, Τυχαία Διαδικασία και Συναφείς Έννοιες
- Πράξεις και Σχέσεις Γεγονότων
- Χώρος Γεγονότων – Δυναμοσύνολο
- Η Έννοια της Πιθανότητας
- Αξιώματα και Θεωρήματα Πιθανότητας
- Μοντελοποίηση Προβλημάτων Πιθανότητας
- Αρχές Απαρίθμησης
- Περίληψη Κεφαλαίου
- Οι Σπουδαιότερες Έννοιες και οι Τύποι τους
- Ασκήσεις – Προβλήματα Μηχανικού

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε τον τύπο των φαινομένων με τον οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτό το βιβλίο. Επί πλέον θα αναπτύξουμε μαθηματικά μοντέλα με τα οποία θα περιγράψουμε και διερευνούμε τέτοια φαινόμενα. Μια θεώρηση του τύπου των φαινομένων από την πλευρά της θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής τα χωρίζει σε δύο κατηγορίες:

- αιτιοκρατικά ή **καθοριστικά** φαινόμενα,
- **στοχαστικά** ή πιθανοκρατικά φαινόμενα.

Για τα φαινόμενα της πρώτης κατηγορίας ισχύει ο νόμος αιτίου – αιτιατού, δηλ. οι συνθήκες διεξαγωγής καθορίζουν και το αποτέλεσμα. Επαναλήψεις ενός αιτιοκρατικού φαινομένου οδηγούν πάντα στο αυτό αποτέλεσμα εφόσον οι συνθήκες διεξαγωγής του παραμένουν αμετάβλητες. Ως αντιπροσωπευτικά παραδείγματα θα μπορούσαμε να αναφέρουμε το νόμο της βαρύτητας, την κίνηση πλανητών, το σημείο βρασμού ενός υγρού, ο νόμος του Ohm και άλλα. Τα φαινόμενα αυτά περιγράφονται από τα **καθοριστικά μοντέλα**. Για παράδειγμα, αν τοποθετήσουμε μία μπαταρία σε ένα απλό κύκλωμα, το μαθηματικό μοντέλο το οποίο ενδεχομένως θα περιέγραφε την παρατηρούμενη ροή ρεύματος θα ήταν ο νόμος του  $Ohm I = E/R$ . Ο νόμος προβλέπει την τιμή της έντασης του ρεύματος όταν είναι γνωστά η αντίσταση  $R$  και η δύναμη της μπαταρίας  $E$ . Όσες φορές και εάν επαναλάβουμε αυτό το πείραμα, κάθε φορά παρατηρούμε την ίδια ένταση  $I$ . Για τη μελέτη τους η πιθανοθεωρία δεν έχει ουσιαστική προσφορά.

Τα **στοχαστικά** φαινόμενα αντίθετα περιέχουν στοιχεία τύχης, πράγμα που εκφράζεται στο γεγονός ότι αν παρατηρήσουμε επαναλήψεις των φαινομένων, π.χ. στα πλαίσια ενός πειράματος, τα αποτελέσματα θα διαφέρουν από φορά σε φορά, ακόμη και αν οι συνθήκες διεξαγωγής παραμένουν οι ίδιες. Έτσι, παρόλο που το στοχαστικό φαινόμενο διεξάγεται κάτω από γνωστές συνθήκες, δεν είμαστε σε θέση να καθορίσουμε επακριβώς τη μελλοντική του εξέλιξη. Τα φαινόμενα αυτά περιγράφονται από **στοχαστικά ή πιθανοκρατικά μοντέλα**. Για παράδειγμα, η ένταση της βροχής που πρόκειται να ακολουθήσει σε έναν τόπο δεν μπορεί να προβλεφθεί ακριβώς. Υπάρχουν καθοριστικά μετεωρολογικά μοντέλα τα οποία περιέχουν τις επικρατούσες συνθήκες όπως βαρομετρική πίεση, διεύθυνση και ένταση ανέμου και άλλες παρατηρούμενες παραμέτρους, αλλά προβλέπουν μόνο χαμηλή ή υψηλή ένταση βροχής στον τόπο και όχι την ακριβή της τιμή. Τέτοια φαινόμενα περιγράφονται καλύτερα από στοχαστικά μοντέλα, προβλέπουν **πιθανολογικά** τα διάφορα δυνατά αποτελέσματα. Με άλλα λόγια, τα στοχαστικά μοντέλα

προβλέπουν με κάποια αβεβαιότητα την έκβαση του φαινομένου.

Πέραν των αναφερθέντων στοιχείων τύχης που ενδογενώς επηρεάζουν την εξέλιξη και έκβαση ενός φαινομένου οδηγώντας έτσι στον στοχαστικό του χαρακτήρα, θα πρέπει να αναφερθεί και μία άλλη πηγή αβεβαιότητας διαφορετικής υφής. Βασικά εργαλεία του σημερινού επιστήμονα είναι ποσοτικές μέθοδοι για ανάλυση, ανάπτυξη και αξιολόγηση μοντέλων. Τα μοντέλα αυτά πολλές φορές π.χ. λόγω ελλειπών στοιχείων αποτελούν εξιδανικευση της πραγματικότητας και επομένως όχι ακριβή έκφρασή της. Υπολογισμοί που βασίζονται στα μοντέλα αυτά περιέχουν κατά συνθήκη αβεβαιότητες.

Όλες οι αβεβαιότητες, άσχετα με τα αίτια που τις προκαλούν, μπορεί να μελητηθούν και εκτιμηθούν με έννοιες και μεθοδολογίες της **θεωρίας πιθανοτήτων και στατιστικής**. Η στατιστική βασίζεται στην πιθανοθεωρία, αφού πιθανότητα είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας και των ρίσκων που σχετίζονται μ' αυτή. Προτού μάθει κανείς στατιστικές διαδικασίες απόφασης απαιτείται μία γνώση της πιθανοθεωρίας.

Ένας εύκολος και ξεκάθαρος τρόπος μεταχείρισης της πιθανοθεωρίας απαιτεί μερική γνώση της *συνολοθεωρίας*. Προκειμένου να μελετήσουμε τα *πιθανοκρατικά πρότυπα* που επιθυμούμε να αναπτύξουμε, θα ήταν πολύ κατάλληλο αν πρώτα γνωρίζαμε τις βασικές έννοιες από την θεωρία συνόλων.

## 2.1 ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ, ΤΥΧΑΙΑ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΑΦΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Βασικά η ανάπτυξη της πιθανοθεωρίας στηρίζεται στις τρεις έννοιες των **δειγματοχώρων**, **δειγματοσημείων** και **γεγονότων**, οι οποίες σχετίζονται με την **αβεβαιότητα** και το **πείραμα τύχης**.

### 2.1.1 Αβεβαιότητα και Τυχαίο Πείραμα

Η αβεβαιότητα αναφέρεται στην έκβαση ενός φαινομένου υπό εξέλιξη. Εάν ένα φαινόμενο υπό εξέλιξη μπορεί να οδηγήσει σε δύο ή περισσότερα πιθανά αποτελέσματα, το φαινόμενο είναι **στοχαστικό** και το αποτέλεσμα λέγεται ότι είναι **αβέβαιο**. Έτσι ρίχνοντας ένα ζάρι ή νόμισμα, μετρώντας την διάρκεια μιας μπαταρίας, μετρώντας τον αριθμό αυτοκινήτων πριν συμβεί ένα ατύχημα, ερωτώντας έναν ψηφοφόρο εάν προτιμά ή όχι ένα συγκεκριμένο υποψήφιο και ούτω καθεξής, όλα είναι στοχαστικά φαινόμενα, αφού σε κάθε περίπτωση η διαδικασία μπορεί να οδηγήσει σε περισσότερα από δύο πιθανά αποτελέσματα.

#### Τυχαίο Πείραμα ή Πείραμα Τύχης $E$

**Ορισμός.** Ένα στοχαστικό φαινόμενο θα το ονομάζουμε τυχαίο πείραμα ή πείραμα τύχης αν

1. η εξέλιξη του φαινομένου μπορεί να πραγματοποιηθεί όσες φορές επιθυμούμε,
2. η εξέλιξη του φαινομένου πραγματοποιείται πάντα υπό τις ίδιες συνθήκες,
3. η προδικασία του αποτελέσματος μιας συγκεκριμένης εξέλιξης του φαινομένου δεν είναι δυνατή,
4. το σύνολο των αβέβαιων αποτελεσμάτων της εξέλιξης του φαινομένου είναι γνωστό.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι όταν αναφερόμαστε σε πείραμα τύχης μπορεί να εννοούμε και ένα φυσικό πείραμα, το οποίο μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ή μπορεί απλά να διανοηθεί ένα σύνολο από αβέβαια αποτελέσματα, χωρίς να πραγματοποιηθεί καμία ακολουθία από επαναλαμβανόμενες δοκιμές. Για ένα πείραμα τύχης, πραγματικό ή φανταστικό, το μόνο που χρειάζεται είναι να προσδιορισθούν ακριβώς όλα τα πιθανά αποτελέσματα.

## 2.1.2 Δειγματοχώρος και Δειγματοσημεία

### Δειγματοχώρος

**Ορισμός.** Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία παριστάνουν όλα τα πιθανά αποτελέσματα του πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματοχώρος, ο οποίος είναι ένα γενικό (universal) σύνολο και συμβολίζεται με  $S$ . Τα πιθανά αποτελέσματα στον δειγματοχώρο ονομάζονται **δειγματοσημεία** και συχνά συμβολίζονται με  $s_i$ ,  $s_i \in S$ , ο δε αριθμός (πληθάριθμος) δειγματοσημείων  $s'$  ένα δειγματοχώρο μπορεί να συμβολιστεί με  $N(S)$ .

Στην συνέχεια αναφέρονται τυχαία πειράματα  $E$  και οι αντίστοιχοι δειγματοχώροι  $S$ .

### Παραδείγματα

**2.1.**  $E_1$ : Ένα τεμάχιο επιλέγεται από ένα κιβώτιο εισερχόμενου εμπορεύματος και ελέγχεται. Το τεμάχιο μπορεί να είναι ελαττωματικό,  $D$ , ή μη ελαττωματικό,  $\bar{D}$ .

$$S = \{D, \bar{D}\}$$

**2.2.**  $E_2$ : Ρίχνουμε τρία νομίσματα και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Ο δειγματικός χώρος  $S$  του πειράματος αυτού αποτελείται ως γνωστόν από όλα τα δυνατά αποτελέσματα ή δειγματοσημεία,

$$S = \{KKK, KK\bar{K}, K\bar{K}K, \bar{K}KK, K\bar{K}\bar{K}, \bar{K}K\bar{K}, \bar{K}\bar{K}K, \bar{K}\bar{K}\bar{K}\}$$

**2.3.**  $E_3$ : Ένας εργολάβος ξεκινά ένα μεγάλο χωματοουργικό έργο με τρεις εσκαφείς  $A_1$ ,  $A_2$  και  $A_3$ . Έπειτα από ένα χρόνο ελέγχουμε την κατάσταση των τριών εσκαφών. Αν  $A_k$  και  $\bar{A}_k$  είναι τα ενδεχόμενα ότι ο  $k$  εσκαφέας παρουσιάζει ή δεν παρουσιάζει βλάβη αντίστοιχα, τότε ο δειγματοχώρος  $S$  της κατάστασης των εσκαφών είναι

$$S = \{A_1A_2A_3, \bar{A}_1A_2A_3, A_1\bar{A}_2A_3, A_1A_2\bar{A}_3, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3, A_1\bar{A}_2\bar{A}_3, \bar{A}_1A_2\bar{A}_3, \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3\}$$

**2.4.**  $E_4$ : Ένα φτερό αεροπλάνου συναρμολογείται με ένα μεγάλο αριθμό  $M$  βιδών. Απαριθμείται ο αριθμός των ελαττωματικών βιδών.

$$S = \{1, 2, 3, \dots, M\}$$

**2.5.**  $E_5$ : Κατασκευάζονται ηλεκτρικοί λαμπτήρες μέχρι να παραχθούν 10 ελαττωματικοί. Παρατηρείται ο αριθμός των παραγόμενων λαμπτήρων.

$$S = \{10, 11, 12, \dots\}$$

**2.6.**  $E_6$ : Μετρούμε την αντοχή έντασης ενός τύπου χαλύβδινης δοκού.

$$S = \{x \mid x \text{ μη αρνητικός πραγματικός αριθμός}\}$$

**2.7.**  $E_7$ : Ένας θερμογράφος καταγράφει συνεχώς την θερμοκρασία  $s'$  όλο το 24ωρο. Σ' ένα συγκεκριμένο τόπο σε ένα ψηλό βουνό κάθε μέρα το πρωί σημειώνεται η ένδειξη του θερμογράφου σε βαθμούς κλίμακας  $^{\circ}C$ .

$$S = \{x \mid m < x < M\},$$

όπου  $m$  η ελάχιστη και  $M$  η μέγιστη δυνατή θερμοκρασία στον τόπο αυτόν.

Στο ίδιο παράδειγμα, αν παρατηρούμε για πόσες μέρες μέσα σε ένα χρόνο η θερμοκρασία έπεσε κάτω από τους μηδέν βαθμούς  $^{\circ}C$ , ο δειγματοχώρος είναι διαφορετικός

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 364, 365\}$$



Ένας δειγματοχώρος με μικρό αριθμό δειγματοσημείων ενδέχεται να παρασταθεί ευκολότερα με διαγράμματα δέντρων ή άλλων γραφικών παραστάσεων σε δυοδιάστατο ή τριδιάστατο σύστημα αξόνων. Ανεξάρτητα από το πώς περιγράφεται το  $S$ , τα στοιχεία του  $S$  τα οποία αντιστοιχούν στα αποτελέσματα του τυχαίου πειράματος πρέπει να είναι:

1. **αμοιβαία αποκλειόμενα:** Τα διάφορα στοιχεία  $s_i$  ενός δειγματοχώρου  $S$ , ασχέτως με το πλήθος τους, πρέπει να είναι διαφορετικά και **αμοιβαία αποκλειόμενα**, έτσι ώστε όταν ένα πείραμα εκτελείται να υπάρχει ένα μοναδικό αποτέλεσμα. Παραδείγματος χάριν, σε μία εκτέλεση του πειράματος το αποτέλεσμα αντιστοιχεί μόνο σε ένα από τα στοιχεία  $s_i$  του δειγματοχώρου  $S$ .
2. **συλλεκτικά εξαντλημένα:** Υπό την έννοια ότι το κάθε αποτέλεσμα του πειράματος θα συμπεριλαμβάνεται σίγουρα στον δειγματοχώρο.

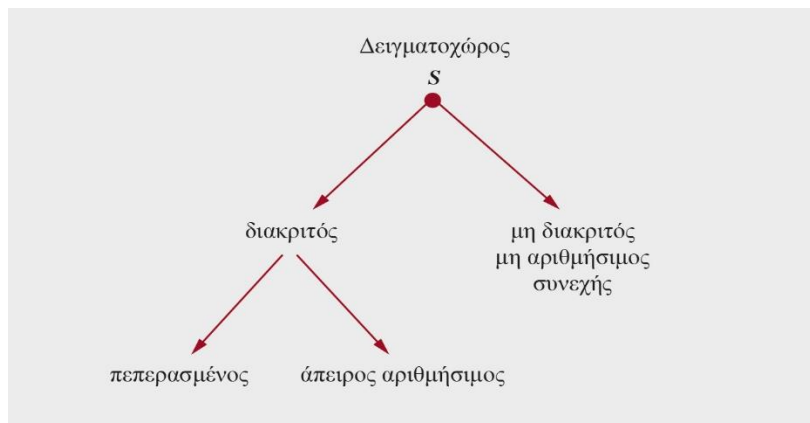
Προκειμένου να περιγράψουμε έναν δειγματοχώρο σχετιζόμενο με ένα πείραμα, πρέπει να έχουμε ξεκάθαρη ιδέα από αυτό που μετρούμε ή παρατηρούμε. Σημειώστε επίσης ότι το αποτέλεσμα ενός πειράματος δεν είναι πάντοτε αριθμός, μπορεί να είναι ακολουθία, συνάρτηση ή διάλυμα. Ακόμη ένα τυχαίο πείραμα μπορεί να περιγραφεί με περισσότερους από έναν δειγματοχώρο και αυτό εξαρτάται από το είδος των ερωτήσεων που μας ενδιαφέρει. Για παράδειγμα στην ρίψη ενός ζαριού μπορεί να έχουμε

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ ή } S = \{\text{μονός, ζυγός}\}$$

Γενικά, ο δειγματοχώρος που θα επιλέξουμε πρέπει να είναι **συλλεκτικά εξαντλητικός** και επιπλέον θα πρέπει να είναι αρκετά λεπτομερής για να διακρίνονται τα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν, ενώ πρέπει να αποφεύγονται λεπτομέρειες άνευ σημασίας.

Τέλος είναι απαραίτητο να συζητηθεί ο αριθμός των δειγματοσημείων σε έναν δειγματοχώρο. Διακρίνονται κυρίως τρεις περιπτώσεις:

- **πεπερασμένος** δειγματοχώρος, όταν έχει πεπερασμένο πλήθος δειγματοσημείων, όπως στα παραδείγματα 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 και 2.7 στον δεύτερο δειγματοχώρο του.
- **άπειρος αριθμήσιμος** δειγματοχώρος, όταν τα δειγματοσημεία του μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με το σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως στο παράδειγμα 2.5.
- **άπειρος μη αριθμήσιμος** δειγματοχώρος, όταν έχει άπειρο πλήθος δειγματοσημείων αλλά όχι αριθμήσιμο, όπως στα παραδείγματα 2.6 και 2.7 στον πρώτο δειγματοχώρο του.



Ένας πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος δειγματοχώρος καλείται επίσης **διακριτός**. Ένας άπειρος μη αριθμήσιμος καλείται και **μη διακριτός ή συνεχής**

### 2.1.3 Σύνθετος Δειγματοχώρος

Πολλά πειράματα έχουν ακολουθιακό χαρακτήρα, όπως για παράδειγμα η ρίψη ενός νομίσματος τρεις φορές, η ρίψη ενός ζαριού δύο φορές (μια ζαριά) κ.τ.λ.. Για να περιγράψουμε το πείραμα και τον αντίστοιχο δειγματοχώρο θεωρούμε ότι το σύνθετο πείραμα  $E$  συνίσταται παραδείγματος χάριν στην εκτέλεση δύο διαδοχικών πειραμάτων  $E_1$  και  $E_2$ . Εκτελούμε τα πειράματα αυτά διαδοχικά από μία φορά, τότε όλα τα δυνατά ζεύγη αποτελεσμάτων προκύπτουν από τον συνδυασμό του κάθε αποτελέσματος του πρώτου με όλα τα δυνατά αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος. Έτσι, αν  $S_1$  και  $S_2$  είναι οι δειγματοχώροι των  $E_1$  και  $E_2$  αντίστοιχα, ο δειγματοχώρος  $S$  περιέχει όλα τα δυνατά ζεύγη  $(s_{1k}, s_{2l})$ , όπου το

κάθε στοιχείο  $s_{1\kappa}$  του  $S_1$  συνδιάζεται με όλα τα στοιχεία  $s_{2\lambda}$  του  $S_2$ . Δηλαδή, ο δειγματοχώρος  $S$  περιέχει όλα τα **διατεταγμένα** ζεύγη  $(s_{1\kappa}, s_{2\lambda})$  που προκύπτουν από το **καρτεσιανό γινόμενο**

$$S = S_1 \times S_2$$

$$S = \{(s_{1\kappa}, s_{2\lambda}) \mid s_{1\kappa} \in S_1, s_{2\lambda} \in S_2, \kappa=1, 2, \dots, n_1, \lambda=1, 2, \dots, n_2\}$$

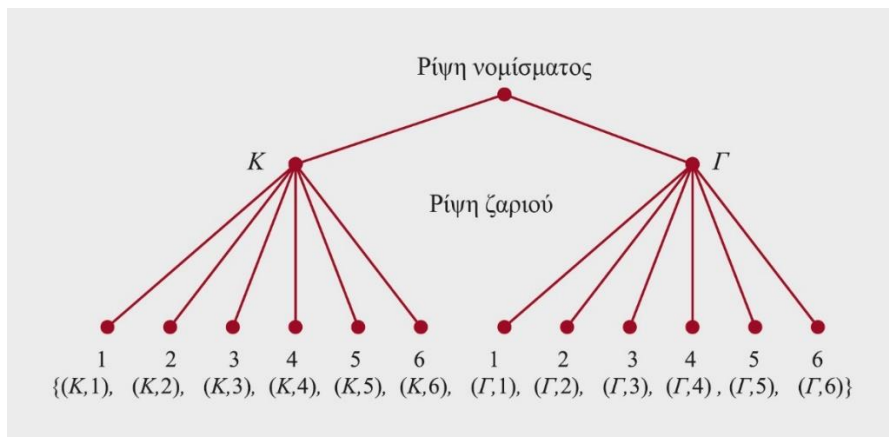
το δε πλήθος τους είναι  $n=n_1 \times n_2$ , όπου  $n_1$  και  $n_2$  παριστάνουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα των πειραμάτων  $E_1$  και  $E_2$ , αντίστοιχα.

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για σύνθετο πείραμα  $E$  που προκύπτει από την διαδοχική εκτέλεση περισσότερων διαδοχικών πειραμάτων  $E_1, E_2, \dots, E_k$  και ο δειγματοχώρος  $S$  προκύπτει από το καρτεσιανό γινόμενο των  $S_1, S_2, \dots, S_k$ , όπως αναλυτικότερα περιγράφεται στην παράγραφο αρχές απαρίθμησης 2.7.

**Παράδειγμα 2.8.** Ρίχνουμε ένα νόμισμα και ένα ζάρι και παρατηρούμε την ένδειξη νομίσματος και ζαριού, βλέπε Σχήμα 2.1. Εδώ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύνθετο πείραμα  $E$ , αποτελούμενο από την εκτέλεση δύο διαδοχικών απλούστερων πειραμάτων  $E_1 = \{\text{ρίψη νομίσματος}\}$  και  $E_2 = \{\text{ρίψη ζαριού}\}$  με αντίστοιχους δειγματοχώρους

$$S_1 = \{K, \Gamma\} \text{ και } S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Με βάση το παραπάνω σκεπτικό, το πείραμα  $E$  έχει ως δειγματοχώρο το καρτεσιανό γινόμενο των  $S_1$  και  $S_2$ ,



**Σχήμα 2.1.** Σύνθετο πείραμα ρίψης νομίσματος και ζαριού

$$S = S_1 \times S_2 = \{K, \Gamma\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = \{(K, 1), (K, 2), (K, 3), (K, 4), (K, 5), (K, 6), (\Gamma, 1), (\Gamma, 2), (\Gamma, 3), (\Gamma, 4), (\Gamma, 5), (\Gamma, 6)\}$$

Για λόγους συντομίας τα διατεταγμένα υποσύνολα του σύνθετου δειγματοχώρου  $S$  γράφονται και χωρίς παρενθέσεις ή κόμματα, όπως

$$S = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6, \Gamma1, \Gamma2, \Gamma3, \Gamma4, \Gamma5, \Gamma6\}$$

Το σύνθετο πείραμα  $E$  μπορούμε εναλλακτικά να το περιγράψουμε και με μορφή **δένδρου**, όπως στο Σχήμα 2.1, όπου διακρίνεται ο ακολουθιακός χαρακτήρας του πειράματος. Εδώ κάθε δυνατό αποτέλεσμα αντιστοιχεί σ'ένα **φύλλο** του δένδρου και ο δειγματικός χώρος  $S$  είναι το σύνολο όλων των φύλλων.

Παρατηρούμε ότι κάθε κόμβος του δένδρου μπορεί να αντιστοιχηθεί με ένα γεγονός, όπως το σύνολο όλων των φύλλων που ακολουθούν τον κόμβο. Για παράδειγμα, ο κόμβος  $K$  μπορεί να ταυτιστεί με το γεγονός  $A = \{K1, K2, K3, K4, K5, K6\}$ , δηλαδή το αποτέλεσμα της ρίψης νομίσματος είναι  $K$ .

#### Παρατήρηση

- Το σύνθετο πείραμα μπορεί να συνίσταται στην εκτέλεση δύο ή περισσότερων διαδοχικών πειραμάτων με δειγματοχώρο το καρτεσιανό γινόμενο

$$S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

- Στην πράξη συναντάμε πολλά σύνθετα πειράματα  $E$  και καταγράφουμε τον αντίστοιχο δειγματικό χώρο  $S$ , χωρίς να αναφερθούμε αναλυτικότερα στο καρτεσιανό γινόμενο των απλούστερων δειγματοχώρων, όπως π. χ. στα παραδείγματα που ακολουθούν.

**Παράδειγμα 2.9.** Ρίχνουμε τρία νομίσματα (όπως στο παράδειγμα 2.2) και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Το πείραμα αυτό μπορούμε να το σκεφτούμε και ως ένα σύνθετο πείραμα τύχης  $E$ , το οποίο συνίσταται στην εκτέλεση των απλούστερων πειραμάτων  $E_1 = \{\text{ρίψη νομίσματος 1}\}$ ,  $E_2 = \{\text{ρίψη νομίσματος 2}\}$  και  $E_3 = \{\text{ρίψη νομίσματος 3}\}$ , με δειγματοχώρους  $S_1 = \{K, Γ\}$ ,  $S_2 = \{K, Γ\}$ , και  $S_3 = \{K, Γ\}$  αντίστοιχα. Δηλαδή ο σύνθετος δειγματοχώρος  $S$  είναι το καρτεσιανό γινόμενο

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3 = \{K, Γ\} \times \{K, Γ\} \times \{K, Γ\}$$

$$S = \{(K,K,K), (K,K,Γ), (K,Γ,K), (Γ,K,K), (K,Γ,Γ), (Γ,K,Γ), (Γ,Γ,K), (Γ,Γ,Γ)\},$$

το οποίο αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες τριάδες ή για λόγους συντομίας το κάθε στοιχείο του  $S$  μπορεί να γραφεί χωρίς παρενθέσεις και κόμματα

$$S = \{KKK, KKΓ, KΓK, ΓKK, KΓΓ, ΓKΓ, ΓΓK, ΓΓΓ\}.$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος δειγματοχώρος  $S$  είναι ίδιος με τον δειγματοχώρο του παραδείγματος 2.2, όπως τον καταγράψαμε εμπειρικά.

**Παράδειγμα 2.10.** Ρίχνουμε δύο ζάρια (μια ζαριά) και παρατηρούμε τις ενδείξεις τους. Όλα τα δυνατά ζευγάρια των ενδείξεων είναι 36 και είναι γνωστά

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (3, 1), (3, 2), (3, 3), \dots, (6, 1), \dots, (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

Όμως, κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι  $E_1$  και  $E_2$  είναι τα απλά πειράματα για την ρίψη του κάθε ζαριού με δειγματοχώρους  $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  αντίστοιχα. Έτσι το πείραμα της ζαριάς,  $E$ , συνίσταται στην εκτέλεση των  $E_1$  και  $E_2$  και έχει δειγματοχώρο  $S$  το καρτεσιανό γινόμενο

$$S = S_1 \times S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \dots, (3, 1), (3, 2), (3, 3), \dots, (6, 1), \dots, (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

#### Παρατήρηση

- Στο εξής σε κάθε σύνθετο πείραμα τύχης, ο καθένας μπορεί να καταγράψει τον δειγματικό χώρο με όποιον τρόπο θεωρεί ευκολότερο. Όμως στις περιπτώσεις όπου είναι πολλά τα δυνατά ενδεχόμενα του σύνθετου δειγματοχώρου  $S$ , συνιστάται το καρτεσιανό γινόμενο των απλούστερων δειγματοχώρων  $S_1 \times S_2 \times S_3 \dots$ . Αυτή είναι και η βασικότερη **αρχή απαρίθμησης**, όπως αναφέρεται στην Συνδυαστική (βλ. παράγραφος 2.7 αρχές απαρίθμησης).

### 2.1.4 Γεγονότα (Ενδεχόμενα)

Μία άλλη βασική έννοια συνδεόμενη με το τυχαίο πείραμα είναι το **γεγονός**. Συχνά σ' έναν δειγματοχώρο δεν μας ενδιαφέρουν μόνο τα δειγματοσημεία αλλά κάποιες ομάδες δειγματοσημείων οι οποίες παριστάνουν κάποια γεγονότα. Παραδείγματος χάριν, στο παράδειγμα 2.2 μπορεί να ενδιαφέρει αν το αποτέλεσμα περιέχει τουλάχιστον δύο κεφαλές ή όχι, δηλαδή αν ανήκει στο υποσύνολο  $A = \{KKΓ, KΓK, ΓKK, KKK\}$  ή όχι. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι συνέβει (ή δεν συνέβει) το γεγονός  $A$ . Γενικότερα, ονομάζουμε **γεγονότα** τα υποσύνολα ενός δειγματοχώρου  $S$ .

**Γεγονός ή Ενδεχόμενο**

**Ορισμός.** Στην ορολογία συνόλων γεγονός ή ενδεχόμενο είναι κάθε υποσύνολο  $A$  του δειγματοχώρου  $S$ ,  $A \subset S$ . Τα γεγονότα συνηθίζεται να συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, όπως  $A, B, \Gamma$  ή  $A_1, A_2, A_3$ , κ.τ.λ.

Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης  $E$ , ένα γεγονός  $A$  **συμβαίνει** αν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο σύνολο  $A$ . Παραδείγματος χάριν στην ρίψη ζαριού το γεγονός  $A = \{\text{ένδειξη ζυγός αριθμός}\}$  συμβαίνει αν το αποτέλεσμα ανήκει στο σύνολο του  $A$ ,  $A = \{2, 4, 6\}$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό του γεγονότος ο δειγματοχώρος  $S$  και το κενό σύνολο  $\{\}$  ή όπως αλλιώς συμβολίζεται  $\emptyset$  είναι και αυτά γεγονότα. Επειδή προφανώς σε μία εκτέλεση του τυχαίου πειράματος ένα από τα δειγματοσημεία του  $s_i$  θα πραγματοποιηθεί, το γεγονός  $S$  συμβαίνει πάντοτε και καλείται **σίγουρο** ή **βέβαιο** γεγονός. Το κενό  $\emptyset$  καλείται **αδύνατο** γεγονός, επειδή δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί κανένα στοιχείο του.

**Παράδειγμα 2.11.** Τα ακόλουθα είναι μερικά παραδείγματα από γεγονότα. Αναφερόμενοι στα πειράματα των παραπάνω παραδειγμάτων από 2.1 μέχρι 2.8,  $A_k$  είναι ένα γεγονός που προκύπτει από το πείραμα  $E_k$ , το γεγονός πρώτα περιγράφεται και στην συνέχεια δίνεται το σύνολο των δειγματοσημείων του ή **ευνοϊκών δειγματοσημείων** του όπως αλλιώς αποκαλούνται:

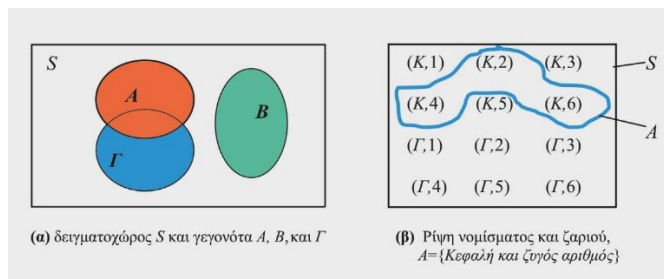
- $A_1$ : {Το τεμάχιο είναι ελαττωματικό} ή  $A_1 = \{D\}$
- $A_2$ : {Τουλάχιστον δύο κεφαλές} ή  $A_2 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}$
- $A_3$ : {Ένας εσκαφέας έχει βλάβη} ή  $A_3 = \{\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3, A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_1, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3\}$
- $A_4$ : {Το πολύ 5 βίδες είναι ελαττωματικές} ή  $A_4 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $A_5$ : {Όλοι οι λαμπτήρες είναι ελαττωματικοί} ή  $A_5 = \{10\}$
- $A_6$ : {Η αντοχή είναι μικρότερη ενός θετικού αριθμού  $\alpha$ } ή  $A_6 = \{x \mid 0 < x < \alpha\}$
- $A_7$ : {Η θερμοκρασία ξεπερνά τους  $28^{\circ}C$ } ή  $A_7 = \{x \mid x > 28^{\circ}C\}$
- $A_8$ : {Ένδειξη του νομίσματος κεφαλή και του ζαριού ζυγός αριθμός} ή  $A_8 = \{(K,2), (K,4), (K,6)\}$



Όπως φαίνεται και στα παραπάνω παραδείγματα, τα γεγονότα  $A_k$  ορίζονται είτε με τη μέθοδο της περιγραφής είτε με τη μέθοδο της αναγραφής. Με την πρώτη περιγράφουμε το γεγονός, ενώ με την δεύτερη αναφέρουμε όλα τα ευνοϊκά δειγματοσημεία του. Ένα γεγονός  $A$  οριζόμενο σ' έναν δειγματοχώρο  $S$  λέγεται ότι είναι **απλό** γεγονός εάν περιέχει μόνο ένα δειγματοσημείο. Διαφορετικά το γεγονός  $A$  λέγεται **σύνθετο** γεγονός ή απλώς γεγονός.

Όταν ο δειγματοχώρος  $S$  είναι πεπερασμένος ή άπειρος αριθμήσιμος, κάθε υποσύνολό του μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γεγονός. Παρόλα αυτά, αν το  $S$  είναι άπειρο μη αριθμήσιμο, δεν είναι σίγουρο ότι κάθε υποσύνολο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα γεγονός. Ευτυχώς, τέτοια υποσύνολα συναντώνται πολύ σπάνια για αυτό στην συνέχεια δεν θα ασχοληθούμε μ' αυτά.

Όπως οι δειγματοχώροι έτσι και τα γεγονότα μπορούν να παρασταθούν με γραφικές παραστάσεις όπως για παράδειγμα τα **διαγράμματα Venn** (από το όνομα ενός Άγγλου μαθηματικού του 19<sup>ου</sup> αιώνα). Σ' αυτά τα διαγράμματα ο δειγματοχώρος  $S$  παριστάνεται με ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ενώ τα γεγονότα με κλειστές περιοχές μέσα στο παραλληλόγραμμο, βλέπε Σχήμα 2.2.



**Σχήμα 2.2.** Διαγράμματα Venn

Τα διαγράμματα αυτά χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τις σχέσεις μεταξύ των γεγονότων. Ακόμη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαγράμματα δέντρων ή άλλων γραφικών παραστάσεων σε

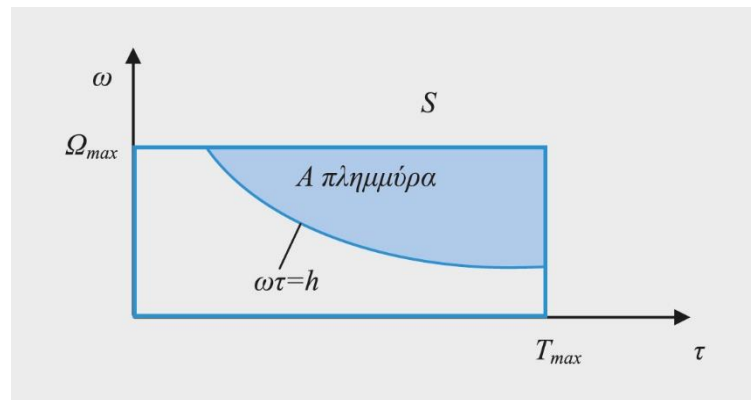
δισδιάστατο ή τρισδιάστατο σύστημα αξόνων για την παράσταση ενός δειγματοχώρου και των συσχετιζόμενων γεγονότων.

**Παράδειγμα 2.12.** Σε μία καταιγίδα ενδιαφέρον παρουσιάζει η έντασή της  $\omega$  και η διάρκειά της  $\tau$ . Έτσι ο δειγματοχώρος περιλαμβάνει άπειρα σημεία μη αριθμήσιμα και είναι συνεχής,

$$S = \{(\omega, \tau) \mid \omega < \Omega_{\max}, \tau < T_{\max}\}$$

Ένα απλό γεγονός  $A$  σε μία καταιγίδα είναι η πλημμύρα, δηλαδή η ποσότητα της βροχόπτωσης ξεπερνά την μέγιστη ποσότητα αποστράγγισης στην περιοχή. Αν το γινόμενο  $\omega \cdot \tau$  μετρά την ποσότητα βροχόπτωσης σε μία καταιγίδα ενώ η δυνατότητα αποστράγγισης είναι  $h$ , το γεγονός  $A$  είναι το σύνολο

$$A = \{(\omega, \tau) \mid \omega \cdot \tau > h\}, \text{ βλέπε Σχήμα 2.3.}$$



**Σχήμα 2.3.** Το πείραμα της καταιγίδας και η πλημμύρα: ο δειγματοχώρος  $S$  είναι όλη η επιφάνεια του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, ενώ το γεγονός  $A$  κατέχει ένα μέρος της επιφάνειας.

## 2.2 ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΕΓΟΝΟΤΩΝ

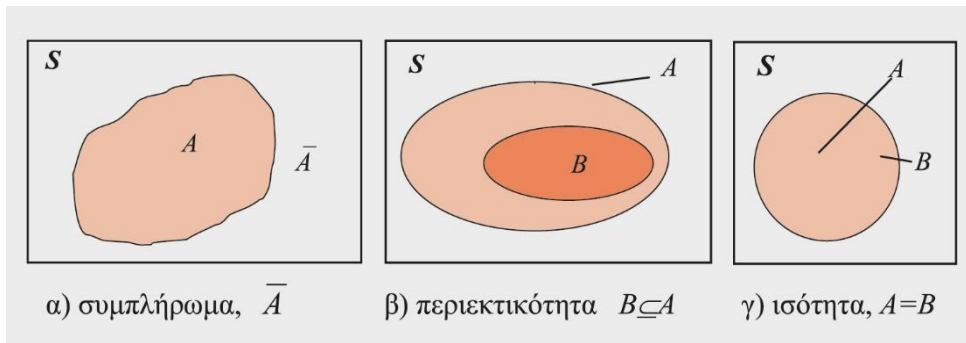
### 2.2.1 Πράξεις Γεγονότων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους σχετίζονται τα γεγονότα ενός δειγματοχώρου. Συχνά ενδιαφερόμαστε να εκφράσουμε κάποια γεγονότα, συνδυάζοντας άλλα υπάρχοντα γεγονότα. Αφού τα γεγονότα είναι σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πράξεις συνόλων όπως συμπλήρωμα, ένωση, τομή, διαφορά κ.τ.λ., για να σχηματίσουμε άλλα γεγονότα που μας ενδιαφέρουν.

**Συμπλήρωμα:** Το συμπληρωματικό ενός γεγονότος  $A$  σε έναν δειγματικό χώρο  $S$  είναι το σύνολο των δειγματοσημείων του  $S$  τα οποία δεν ανήκουν στο  $A$ . Συμβολίζουμε το συμπληρωματικό του  $A$  με  $\bar{A}$ .

**Περιεκτικότητα:** Για δύο γεγονότα  $A$  και  $B$  τα οποία ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο  $S$  λέμε ότι το  $A$  περιέχει το  $B$ , αν κάθε δειγματοσημείο του  $B$  ανήκει και στο  $A$ . Συμβολίζουμε την περιεκτικότητα με  $B \subseteq A$ . Σε μία εκτέλεση του πειράματος αν πραγματοποιείται το  $B$  σίγουρα πραγματοποιείται και το  $A$ .

**Ισότητα:** Για δύο γεγονότα  $A$  και  $B$ , τα οποία ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο  $S$ , ισχύει η ισότητα  $A = B$ , αν  $B \subseteq A$  και  $A \subseteq B$ . Δηλαδή κάθε δειγματοσημείο του  $A$  είναι δειγματοσημείο του  $B$  και το αντίστροφο. Τα γεγονότα  $A$  και  $B$  λέγονται και ισοδύναμα, διότι σε μία εκτέλεση του πειράματος είτε πραγματοποιούνται και τα δύο μαζί ή δεν πραγματοποιείται κανένα.



Σχήμα 2.4. Σχεδιαγράμματα Venn

### Ένωση

**Ορισμός.** Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου  $S$ , ορίζουμε ως **ένωση των  $A$  και  $B$**  το γεγονός  $\Gamma$ , το οποίο περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν στο  $A$  ή στο  $B$  ή και στα δυο και γράφουμε

$$\Gamma = A \cup B.$$

Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης το γεγονός  $\Gamma$  συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβεί τουλάχιστον στον ένα από τα δύο γεγονότα  $A$  ή  $B$ , βλέπε Σχήμα 2.5.

Παραδείγματος χάριν, σε ένα εργοτάξιο σχετικά με τα αποθέματα τσιμέντου και άμμου συμβολίζουμε με  $A$  και  $B$  τα γεγονότα ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα τσιμέντου και άμμου αντίστοιχα. Το γεγονός ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα είτε σε τσιμέντο ή σε άμμο ή μπορεί και στα δύο εκφράζεται με την ένωση  $A \cup B$ .

Με βάση τον παραπάνω ορισμό ισότητας και συμπλήρωμα ισχύει

$$A \cup S = S \quad A \cup A = A \quad A \cup \{\} = A \quad A \cup \bar{A} = S \quad \overline{\bar{A}} = A$$

όπου στην τελευταία ισότητα η ερμηνεία είναι ότι το συμπλήρωμα του συμπληρώματος του  $A$  είναι το ίδιο το  $A$ .

Η ένωση μπορεί να επεκταθεί για τρία ή και περισσότερα γεγονότα,  $A \cup B \cup \Gamma \cup \dots$

### Τομή

**Ορισμός.** Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου  $S$ , ορίζουμε ως **τομή των  $A$  και  $B$**  το γεγονός  $\Gamma$  το οποίο περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν και στο  $A$  και στο  $B$  και γράφουμε

$$\Gamma = A \cap B.$$

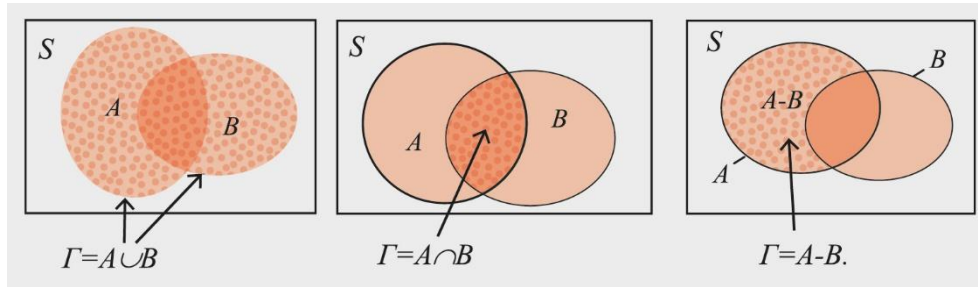
Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης το γεγονός  $\Gamma$  συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβούν ταυτόχρονα τα δύο γεγονότα  $A$  και  $B$ , βλέπε Σχήμα 2.5.

Παραδείγματος χάριν στο παραπάνω εργοτάξιο σχετικά με τα αποθέματα τσιμέντου και άμμου, το γεγονός ότι κάποια μέρα παρατηρείται έλλειμμα και στα δύο, και σε τσιμέντο και σε άμμο, εκφράζεται με την τομή  $A \cap B$ . Ως άλλο παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε την βλάβη στην κεντρική γραμμή ηλεκτροδότησης. Αν  $A$  είναι το γεγονός βλάβης σε κάποιο σημείο από τη μονάδα παραγωγής μέχρι το  $10^\circ$  χιλιόμετρο και  $B$  το γεγονός βλάβης από το  $8^\circ$  μέχρι το  $15^\circ$  χιλιόμετρο, η τομή  $A \cap B$  παριστάνει την βλάβη από το  $8^\circ$  μέχρι το  $10^\circ$  χιλιόμετρο.

Με βάση τους ορισμούς των παραπάνω πράξεων ισχύει

$$A \cap S = A \quad A \cap A = A \quad A \cap \{\} = \{\} \quad A \cap \bar{A} = \{\} \quad S \cap \bar{A} = \bar{A}$$

Τέλος η τομή μπορεί να επεκταθεί για τρία ή και περισσότερα γεγονότα,  $A \cap B \cap \Gamma \cap \dots$



Σχήμα 2.5. Πράξεις γεγονότων  $A, B$

### Διαφορά

**Ορισμός.** Αν  $A$  και  $B$  είναι δύο γεγονότα του ίδιου δειγματικού χώρου  $S$ , ορίζουμε ως **διαφορά  $A - B$**  το γεγονός  $\Gamma$ , το οποίο περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν στο  $A$  και όχι στο  $B$ , και γράφουμε

$$\Gamma = A - B$$

Σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης το γεγονός  $\Gamma$  συμβαίνει εάν και μόνον εάν συμβεί το  $A$  και όχι το  $B$ , βλέπε Σχήμα 2.5.

Συνήθως η διαφορά  $A - B$  καλείται «μόνον  $A$ », διότι περιέχει δειγματοσημεία που ανήκουν μόνον στο σύνολο  $A$ . Επίσης ένας ισοδύναμος συμβολισμός της διαφοράς είναι η τομή  $A \cap \bar{B}$ .

### Παρατήρηση

- Οι κανόνες της αριθμητικής διαφοράς (αφαίρεσης) δεν ισχύουν για γεγονότα. Έτσι ενώ για αριθμούς  $x, y$  έχουμε  $(x - y) + y = x$ , για δύο γεγονότα  $A, B$  ισχύει  $(A - B) \cup B = A \cup B$ .

## 2.2.2 Ασυμβίβαστα ή Αμοιβαίως Αποκλειόμενα Γεγονότα

Τέλος, από τους παραπάνω κανόνες ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου η τομή δύο γεγονότων δεν περιέχει κανένα δειγματοσημείο. Παραδείγματος χάριν αν  $A, B$  συμβολίζουν τα γεγονότα ότι κάποιος θα ταξιδέψει από Θεσσαλονίκη για Αθήνα με αεροπλάνο ή αυτοκίνητο, αντίστοιχα η τομή των δύο γεγονότων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή το αδύνατο γεγονός. Ακόμη άλλο παράδειγμα, αν δύο γεγονότα παριστάνουν ότι ένα αυτοκίνητο σε μία διασταύρωση θα στρίψει αριστερά ή δεξιά, αντίστοιχα η τομή τους δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί.

### Αποκλειόμενα ή Αμοιβαία Ασυμβίβαστα Γεγονότα

**Ορισμός.** Δύο γεγονότα  $A$  και  $B$  οριζόμενα σε ένα δειγματικό χώρο είναι αμοιβαία αποκλειόμενα ή **ασυμβίβαστα**, εάν η πραγματοποίηση του ενός αποκλείει την πραγματοποίηση του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα δεν έχουν κανένα κοινό δειγματοσημείο

$$A \cap B = \emptyset$$

άρα δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν μαζί σε μία εκτέλεση του πειράματος.

Σε ένα σχεδιάγραμμα **Venn** εύκολα διακρίνει κανείς τα ασυμβίβαστα γεγονότα, δεν έχουν κανένα κοινό δειγματοσημείο και είναι δύο σύνολα **ξένα** μεταξύ τους, βλέπε Σχήμα 2.6.