

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικές Έννοιες

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε συνοπτικά σε βασικές έννοιες για σύνολα και απεικονίσεις. Επιπλέον, θα αναφερθούμε στη μέθοδο της επαγωγής, η οποία αποτελεί μία από τις σημαντικές μεθόδους απόδειξης θεωρημάτων της Γραμμικής Άλγεβρας και των Μαθηματικών γενικότερα.

1.1 Σύνολα

Η έννοια του συνόλου είναι μια πρωταρχική θεμελιώδης έννοια στη Μαθηματική επιστήμη. Η θεωρία των συνόλων εισάγεται από τον Georg Cantor (1845-1918) περί το 1900 μ.Χ. και αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία ενοποιείται και θεμελιώνεται η Μαθηματική επιστήμη.

Ένα **σύνολο** είναι μια συλλογή διακεκριμένων αντικειμένων. Τα αντικείμενα αυτά λέγονται **στοιχεία** του συνόλου. Για κάθε σύνολο υπάρχει μια σαφής περιγραφή με βάση την οποία μπορούμε να αποφανθούμε κατά πόσο ένα δεδομένο στοιχείο ανήκει ή όχι στο σύνολο αυτό. Τα παραπάνω ασφαλώς δεν αποτελούν ένα μαθηματικό ορισμό του συνόλου. Η έννοια του συνόλου, όπως αυτή του σημείου, είναι θεμελιακή και δεν μπορεί να αναχθεί σε απλούστερες έννοιες. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να δει μια αξιωματική έκθεση της θεωρίας των συνόλων θα πρέπει να ανατρέξει σε ειδικά συγγράμματα.

Τα σύνολα και τα στοιχεία τους συνήθως συμβολίζονται με γράμματα. Έτσι, αν A είναι ένα σύνολο και a ένα στοιχείο του, τότε εκφράζουμε το γεγονός αυτό με το συμβολισμό « $a \in A$ », ο οποίος διαβάζεται «το a ανήκει στο A ». Ο συμβολισμός « $y \notin A$ » διαβάζεται «το y δεν ανήκει στο A » και σημαίνει ότι το y δεν είναι στοιχείο του A . Επίσης, αναφέρουμε ότι ένα στοιχείο ενός συνόλου A πολλές φορές λέγεται και μέλος του A .

Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Δηλαδή,

Ορισμός 1.1.1. Δύο σύνολα A, B λέγονται ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Για να περιγράψουμε ένα σύνολο γράφουμε τα δύο άγκιστρα $\{ \}$ και στον χώρο μεταξύ αυτών περιγράφουμε τα στοιχεία που ανήκουν στο σύνολο. Υπάρχουν τρεις κυρίως τρόποι να περιγραφεί ένα σύνολο.

(i) Πλήρης αναφορά όλων των στοιχείων του. Κάτι τέτοιο μπορεί να γίνει αν το σύνολο έχει λίγα στοιχεία. Για παράδειγμα, γράφουμε $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{\text{Αθήνα}, \text{Θεσσαλονίκη}\}$.

(ii) Με αναγραφή αρκετών στοιχείων του συνόλου (όχι απαραίτητα όλων), έτσι ώστε να γίνει σαφής η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία του συνόλου. Εδώ χρησιμοποιούνται και οι τρεις τελείες «...», τα λεγόμενα αποσιωπητικά. Για παράδειγμα, γράφουμε $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, $\{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$ και $\{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος.

(iii) Έστω S ένα σύνολο και P μια ιδιότητα. Τότε το $\{x \in S \mid \text{το } x \text{ έχει την ιδιότητα } P\}$ παριστά το σύνολο όλων των στοιχείων του S που έχουν την ιδιότητα P .

Παράδειγμα 1.1.2. Στα ακόλουθα σύνολα, τα οποία θεωρούμε γνωστά, θα αναφερθούμε πολλές φορές στη συνέχεια:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = το σύνολο των φυσικών αριθμών

$\mathbb{Z}$ = το σύνολο των ακεραίων αριθμών

$\mathbb{Q}$ = το σύνολο των ρητών αριθμών

$\mathbb{R}$ = το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{C}$ = το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Ορισμός 1.1.3. Το σύνολο που δεν έχει στοιχεία λέγεται **κενό** και συμβολίζεται με $\emptyset$.

Ορισμός 1.1.4. Αν A, B είναι δυο σύνολα και κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B , τότε το A λέγεται **υποσύνολο** του B και γράφουμε $A \subseteq B$. Αν επιπλέον υπάρχει κάποιο στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A , τότε το A λέγεται **γνήσιο υποσύνολο** του B και γράφουμε $A \subsetneq B$.

Εύκολα βλέπουμε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου, ενώ κάθε σύνολο είναι υποσύνολο του εαυτού του. Τέλος, δυο σύνολα A και B είναι ίσα αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Παράδειγμα 1.1.5. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 1.1.6. Έχουμε ότι

(i) $\{x \in \mathbb{Z} \mid \text{το } x \text{ είναι πολλαπλάσιο του } 2\}$ είναι το σύνολο των αρτίων ακεραίων αριθμών.

$$(ii) \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 4x + 1 = 0\} = \{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

$$(iii) \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 3\} = \emptyset.$$

Ορισμός 1.1.7. Καλούμε **ένωση** δύο συνόλων A, B το σύνολο που έχει ως στοιχεία του εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν στο A ή το B , και το συμβολίζουμε με $A \cup B$.

Ορισμός 1.1.8. Καλούμε **τομή** δύο συνόλων A, B το σύνολο που έχει ως στοιχεία του εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B , και το συμβολίζουμε με $A \cap B$.

Από τους ορισμούς έπεται ότι αν A, B είναι δύο σύνολα τότε $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$. Επίσης, αν Γ είναι ένα σύνολο με $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \cup B \subseteq \Gamma$. Ανάλογα, έχουμε $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$, ενώ για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$ και $\Delta \subseteq B$ θα είναι $\Delta \subseteq A \cap B$. Αν δεν υπάρχουν στοιχεία που ανήκουν και στο A και στο B , τότε $A \cap B = \emptyset$.

Ας θεωρήσουμε σύνολα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$. Τότε, η ένωση των $A_i, i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, είναι το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα $A_i, 1 \leq i \leq \nu$, και συμβολίζεται με $\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_\nu$. Η τομή των $A_i, i \in \{1, 2, \dots, \nu\}$, είναι το σύνολο με στοιχεία εκείνα τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα $A_i, 1 \leq i \leq \nu$, και συμβολίζεται με $\bigcap_{i=1}^{\nu} A_i$ ή με $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\nu$.

Ανάλογα, αν Λ είναι ένα σύνολο συνόλων, τότε το σύνολο που περιλαμβάνει εκείνα ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον από τα μέλη του Λ λέγεται **ένωση των συνόλων που ανήκουν στο Λ** και συμβολίζεται με $\bigcup_{A \in \Lambda} A$. Αν $\Lambda \neq \emptyset$, τότε η τομή των συνόλων που ανήκουν στο Λ είναι το σύνολο που περιλαμβάνει εκείνα ακριβώς τα στοιχεία που ανήκουν σε όλα τα μέλη του Λ , και συμβολίζεται με $\bigcap_{A \in \Lambda} A$.

Ορισμός 1.1.9. Η **διαφορά ενός συνόλου Y από ένα σύνολο X** είναι το σύνολο που περιλαμβάνει ακριβώς εκείνα τα στοιχεία του X που δεν ανήκουν στο Y , και συμβολίζεται με $X \setminus Y$. Αν το Y είναι ένα υποσύνολο του X τότε η διαφορά του Y από το X λέγεται **συμπλήρωμα του Y στο X** και συμβολίζεται με Y^c .

Παράδειγμα 1.1.10. Έστω A το σύνολο των αρτίων ακεραίων. Τότε $\mathbb{Z} \setminus A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \notin A\}$ είναι το σύνολο των περιττών ακεραίων.

Ορισμός 1.1.11. Το σύνολο με στοιχεία τα υποσύνολα ενός συνόλου S λέγεται **δυναμοσύνολο του S** και συμβολίζεται με $\mathcal{P}(S)$.

Παράδειγμα 1.1.12. Έστω $S = \{1, 2\}$. Τότε $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{1\}, \{2\}\}$.

Πρόταση 1.1.13. (Η άλγεβρα των συνόλων) Έστω S ένα σύνολο και $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(S)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

$$\begin{array}{ll}
 A \cup A = A & A \cap A = A \\
 A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
 (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) & (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) \\
 A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) & A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \\
 A \cap (A \cup B) = A & A \cup (A \cap B) = A \\
 A \cup \emptyset = A & A \cap S = A \\
 A \cup S = S & A \cap \emptyset = \emptyset \\
 A \cup A^c = S & A \cap A^c = \emptyset \\
 (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (A \cap B)^c = A^c \cup B^c
 \end{array}$$

Οι τελευταίες δύο ισότητες λέγονται νόμοι του De Morgan.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης είναι άμεση από τους ορισμούς. Ενδεικτικά, επαληθεύουμε την τελευταία ισότητα. Για να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ αρκεί να δείξουμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$ και $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$. Πρώτα, αν $x \in (A \cap B)^c$ τότε $x \in S$ και $x \notin A \cap B$ και άρα ένα ακριβώς από τα ακόλουθα ισχύει:

- (i) $x \in A$ και $x \notin B$
- (ii) $x \notin A$ και $x \in B$
- (iii) $x \notin A$ και $x \notin B$

Στην περίπτωση (i) έχουμε ότι $x \in B^c$, στην περίπτωση (ii) έχουμε ότι $x \in A^c$ και στην περίπτωση (iii) έχουμε ότι $x \in A^c \cap B^c$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, έχουμε $x \in A^c \cup B^c$. Δείξαμε ότι $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$. Έστω τώρα ότι $x \in A^c \cup B^c$. Τότε $x \in A^c$ ή $x \in B^c$, συνεπώς $x \notin A$ ή $x \notin B$ και άρα $x \notin A \cap B$, δηλαδή $x \in (A \cap B)^c$.

Ασκήσεις

1. Να επαληθευτούν όλες οι ισότητες της Πρότασης 1.1.13.
2. Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τότε με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του. Ναδειχτεί ότι αν A, B είναι πεπερασμένα σύνολα τότε:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

3. Έστω S ένα σύνολο και $A, B \in \mathcal{P}(S)$. Ναδειχτεί ότι $A \cap B^c = \emptyset$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$.
4. Έστω S ένα σύνολο και $A, B \in \mathcal{P}(S)$ με A^c και B^c πεπερασμένα σύνολα. Ναδειχτεί ότι το σύνολο $(A \cap B)^c$ είναι επίσης πεπερασμένο.
5. Έστω S ένα σύνολο και $X, Y \in \mathcal{P}(S)$. Η συμμετρική διαφορά των συνόλων X και Y ορίζεται ως

$$(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

και συμβολίζεται με $X \dot{+} Y$. Ναδειχτεί ότι αν $A, B, \Gamma \in \mathcal{P}(S)$, τότε

$$(i) \quad A \dot{+} B = B \dot{+} A$$

$$(ii) \quad A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$$

$$(iii) \quad A \dot{+} A = \emptyset.$$

$$(iv) \quad A \cap (B \dot{+} \Gamma) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$$

6. Έστω S, I μη-κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$. Η τομή των συνόλων A_i , $i \in I$, συμβολίζεται με $\bigcap_{i \in I} A_i$. Η ένωση των συνόλων A_i , $i \in I$ συμβολίζεται με $\bigcup_{i \in I} A_i$. Ναδειχτεί ότι:

$$(i) \quad \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

$$(ii) \quad \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

1.2 Καρτεσιανά Γινόμενα

Έστω A, B δυο σύνολα. Το σύμβολο (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$ λέγεται **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτη συντεταγμένη το α και δεύτερη συντεταγμένη το β . Αν (α, β) και (α', β') είναι δύο διατεταγμένα ζεύγη, τότε $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ αν και μόνο αν $\alpha = \alpha'$ και $\beta = \beta'$.

Ορισμός 1.2.1. Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B είναι το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) με $\alpha \in A$ και $\beta \in B$, και συμβολίζεται με $A \times B$.

Παράδειγμα 1.2.2. Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 4\}$, τότε

- $A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$
- $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
- $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$$\bullet B \times B = \{(1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)\}$$

Η έννοια του καρτεσιανού γινομένου μπορεί να γενικευθεί για περισσότερα από δύο σύνολα. Έτσι, αν $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ είναι σύνολα, τότε το σύμβολο $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ με $\alpha_i \in A_i$, $1 \leq i \leq \nu$, λέγεται διατεταγμένη ν -άδα με i -συντεταγμένη το α_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$. Αν $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ και $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_\nu)$ είναι δύο διατεταγμένες ν -άδες, τότε $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu) = (\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_\nu)$ αν και μόνο αν $\alpha_i = \alpha'_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \nu$, δηλαδή αν και μόνο αν κάθε συντεταγμένη της ν -άδας $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$ ισούται με την αντίστοιχη συντεταγμένη της ν -άδας $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_\nu)$.

Ορισμός 1.2.3. Το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ είναι το σύνολο με στοιχεία τις διατεταγμένες ν -άδες $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu)$, όπου $\alpha_i \in A_i$, $1 \leq i \leq \nu$, και συμβολίζεται με $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu$. Στην περίπτωση που $A_1 = A_2 = \dots = A_\nu = A$, τότε το Καρτεσιανό γινόμενο των $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ συμβολίζεται με A^ν , δηλαδή $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_\nu = A^\nu$.

Έτσι, το σύνολο A^ν ορίζεται για κάθε θετικό ακέραιο ν . Θεωρούμε ότι $A^1 = A$. Για παράδειγμα, το σύνολο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, το σύνολο $\mathbb{R}^3$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{R}^\nu$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ν -άδων πραγματικών αριθμών.

Παρατήρηση Δεν θεωρήσαμε σκόπιμο να δώσουμε έναν αυστηρό ορισμό του καρτεσιανού γινομένου. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να συμβουλευτεί οποιοδήποτε βιβλίο της θεωρίας συνόλων.

Ασκήσεις

1. Έστω $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{1, 4\}$. Να υπολογίσετε το $|(A \times B) \cup (B \times A)|$.
2. Έστω A, B, Γ, Δ σύνολα. Να δείχτεί ότι
 - (i) $A \times B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$
 - (ii) Αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε
 - (α) $A \times B = B \times A$ αν και μόνο αν $A = B$
 - (β) $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$ αν και μόνο αν $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$
 - (iii) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$
 - (iv) $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$
 - (v) $(A \setminus B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$

3. Έστω A, B δύο σύνολα. Ναδειχτεί ότι $A \times B = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$, όπου $B_\alpha = \{\alpha\} \times B$ και $A_\beta = A \times \{\beta\}$.
4. Έστω I, J, S, T μη-κενά σύνολα και έστω ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(S)$ και για κάθε $j \in J$ ένα σύνολο B_j με $B_j \in \mathcal{P}(T)$. Ναδειχτεί ότι:

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$$

και

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j.$$

1.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας

Ορισμός 1.3.1. Έστω A, B δύο σύνολα. Μια διμελής σχέση από το A στο B είναι ένα υποσύνολο R του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$. Ιδιαίτερα, ένα υποσύνολο $R \subseteq A \times A$ λέγεται μια διμελής σχέση στο A . Αν $(x, y) \in R$, τότε συνήθως γράφουμε xRy .

Παράδειγμα 1.3.2. Έστω A ένα σύνολο.

- (i) $R = \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$ είναι μια διμελής σχέση στο A .
- (ii) $R = \{(x, Y) \in A \times \mathcal{P}(A) \mid x \in Y\}$ είναι μια διμελής σχέση από το A στο $\mathcal{P}(A)$.
- (iii) $R = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \mid X \subseteq Y\}$ είναι μια διμελής σχέση στο $\mathcal{P}(A)$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω A ένα σύνολο και $R \subseteq A \times A$ μια διμελής σχέση στο A . Τότε

- (i) $H R$ λέγεται αυτοπαυής ή ανακλαστική αν $(x, x) \in R$ για κάθε $x \in A$.
- (ii) $H R$ λέγεται συμμετρική αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν $(x, y) \in R$, τότε $(y, x) \in R$.
- (iii) $H R$ λέγεται μεταβατική αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$, τότε $(x, z) \in R$.

Μία διμελής σχέση στο A , η οποία είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** στο A . Για τις σχέσεις ισοδυναμίας χρησιμοποιούμε συνήθως το σύμβολο $\sim$. Έτσι, αν R είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A τότε αντί για xRy γράφουμε $x \sim y$. Οι τρεις χαρακτηριστικές ιδιότητες της $\sim$ εκφράζονται ως εξής:

- Αυτοπαθής: $x \sim x$ για κάθε $x \in A$
- Συμμετρική: Αν $x \sim y$ τότε $y \sim x$
- Μεταβατική: Αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε $x \sim z$

Παράδειγμα 1.3.4. Έστω A ένα σύνολο.

- (i) Η ισότητα στο σύνολο A είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A .
- (ii) Αν $A \neq \emptyset$, τότε η σχέση $X \subseteq Y$ στο σύνολο $\mathcal{P}(A)$ δεν είναι σχέση ισοδυναμίας, καθώς δεν είναι συμμετρική.

Ορισμός 1.3.5. Έστω A ένα σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο A . Αν $\alpha \in A$ τότε η **κλάση ισοδυναμίας** του α είναι το σύνολο $K_\alpha = \{x \in A \mid \alpha \sim x\}$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της συμμετρικής ιδιότητας, $K_\alpha = \{x \in A \mid x \sim \alpha\}$. Το σύνολο $\{K_\alpha \mid \alpha \in A\}$ των κλάσεων ισοδυναμίας συμβολίζεται με $A/\sim$ και ονομάζεται σύνολο πηλίκου.

Παράδειγμα 1.3.6. Θεωρούμε το σύνολο X των σημείων του επιπέδου και σταθεροποιούμε ένα σημείο $O \in X$. Ορίζουμε μια σχέση στο X , ως εξής: Αν $P, Q \in X$ τότε θέτουμε $P \sim Q$ αν και μόνο αν τα σημεία P, Q ισαπέχουν από το O . Είναι εύκολο να δείχτεί ότι η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας ενός στοιχείου $P \in X$ είναι το σύνολο των σημείων του κύκλου με κέντρο O , ο οποίος διέρχεται από το P . (Αν $P = O$ τότε ο κύκλος αυτός εκφυλίζεται σε ένα σημείο.) Το σύνολο $X/\sim$ είναι το σύνολο όλων των κύκλων του επιπέδου με κέντρο O .

Πρόταση 1.3.7. Έστω A ένα σύνολο και $\sim$ μια σχέση ισοδυναμίας στο A . Τότε:

- (i) Αν $\alpha, \beta \in A$ τότε $K_\alpha = K_\beta$ αν και μόνο αν $\alpha \sim \beta$.
- (ii) Αν $\alpha, \beta \in A$ τότε $K_\alpha = K_\beta$ ή $K_\alpha \cap K_\beta = \emptyset$.
- (iii) $\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = A$.

Απόδειξη.

(i) Αν $K_\alpha = K_\beta$ τότε, επειδή $\beta \in K_\beta$, έπεται ότι $\beta \in K_\alpha$ και άρα $\alpha \sim \beta$. Έστω τώρα $\alpha \sim \beta$. Θα δείξουμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$ και $K_\beta \subseteq K_\alpha$. Αν $x \in K_\alpha$ τότε $x \sim \alpha$. Αλλά από υπόθεση έχουμε ότι $\alpha \sim \beta$ και άρα από τη μεταβατική ιδιότητα έπεται ότι $x \sim \beta$. Επομένως, $x \in K_\beta$ και άρα δείξαμε ότι $K_\alpha \subseteq K_\beta$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $K_\beta \subseteq K_\alpha$.

Οι αποδείξεις των (ii) και (iii) αφήνονται ως ασκήσεις στον αναγνώστη.

Ορισμός 1.3.8. Έστω A ένα σύνολο. Ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ λέγεται **διαμέριση του A** αν

$$(i) \emptyset \notin S,$$

$$(ii) \bigcup_{\Gamma \in S} \Gamma = A \text{ και}$$

$$(iii) \text{ αν } X, Y \in S \text{ τότε } X = Y \text{ ή } X \cap Y = \emptyset.$$

Έτσι, μια διαμέριση ενός συνόλου A είναι ένα σύνολο μη-κενών υποσυνόλων του A , τα οποία ανά δύο έχουν τομή το κενό σύνολο ή συμπίπτουν και η ένωσή τους είναι το A .

Από την Πρόταση 1.3.7 έπεται ότι αν $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A , τότε το σύνολο $A/\sim$ των κλάσεων ισοδυναμίας είναι μια διαμέριση του A . Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 1.3.9. Έστω A ένα σύνολο και S μια διαμέριση του A . Τότε, υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο A , έτσι ώστε οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας να είναι ακριβώς τα στοιχεία του S (δηλαδή, $A/\sim = S$).

Απόδειξη. Ορίζουμε μια σχέση στο A ως εξής: Για $x, y \in A$ θέτουμε $x \sim y$ αν και μόνο αν υπάρχει $\Gamma \in S$ με $x, y \in \Gamma$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση $\sim$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A και αν $x \in A$ με $x \in \Gamma$, τότε $K_\alpha = \Gamma$.

Ασκήσεις

Να εξεταστεί ποιες από τις ακόλουθες σχέσεις είναι σχέσεις ισοδυναμίας.

1. Στο σύνολο των ακεραίων $\mathbb{Z}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο ακέραιος $\beta - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 2.

2. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν ο ο πραγματικός αριθμός $\beta - \alpha$ είναι ρητός.

3. Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$:

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε $\alpha \sim \beta$ αν $\alpha\beta \geq 0$.

4. Στο σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

Αν $(\alpha_1, \alpha_2), (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τότε $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$.

1.4 Απεικονίσεις

Ορισμός 1.4.1. Έστω X, Y δύο σύνολα. Μια **απεικόνιση** f από το X στο Y είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο x του X ακριβώς ένα στοιχείο $f(x)$ του Y . Το σύνολο X λέγεται το πεδίο ορισμού της απεικόνισης f και το σύνολο Y το πεδίο τιμών της. Για συντομία, γράφουμε $f : X \rightarrow Y$. Το στοιχείο $f(x)$ του Y λέγεται η εικόνα του x μέσω της απεικόνισης f . Τις απεικονίσεις ονομάζουμε επίσης και **συναρτήσεις**.

Ορισμός 1.4.2. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση και $A \subseteq X, B \subseteq Y$. Τότε, το σύνολο $\{f(x) \in Y \mid x \in A\}$ λέγεται η εικόνα του A μέσω της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Ιδιαίτερα, το $f(X)$ λέγεται η εικόνα της f . Το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) \in B\}$ λέγεται η αντίστροφη εικόνα του B μέσω της f και συμβολίζεται με $f^{-1}(B)$.

Παράδειγμα 1.4.3. (i) Η πρόσθεση των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση

$$\pi\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } (x, y) \mapsto x + y.$$

(ii) Ο πολλαπλασιασμός των πραγματικών αριθμών είναι μια απεικόνιση

$$\pi\omicron\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } (x, y) \mapsto xy.$$

(iii) Μια απεικόνιση δεν είναι απαραίτητο να ορίζεται μέσω κάποιου τύπου. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν ο } x \text{ είναι ρητός} \\ 0 & \text{αν ο } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

(iv) Η $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(x, y) \mapsto x$ είναι μια απεικόνιση.

(v) Η $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\sigma(0) = 0$ και $\sigma(\nu) = \begin{cases} \kappa & \text{αν } \nu = 2\kappa \\ -\kappa & \text{αν } \nu = 2\kappa - 1 \end{cases}$ για κάθε $\nu > 0$ είναι μια απεικόνιση.

(vi) Η $\varrho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \mapsto -\nu$ είναι μια απεικόνιση.

Ορισμός 1.4.4. Δύο απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$ και $g : A \rightarrow B$ λέγονται *ίσες* αν $X = A$, $Y = B$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα 1.4.5. Οι απεικονίσεις $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $f(\nu) = \sin(\nu\pi)$ και $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $g(\nu) = \begin{cases} -1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι περιττός} \\ 1 & \text{αν ο } \nu \text{ είναι άρτιος} \end{cases}$ είναι ίσες.

Ορισμός 1.4.6. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση.

- (i) Η f λέγεται **ένα προς ένα**, και γράφουμε 1-1, αν για κάθε $x, x' \in X$ με $x \neq x'$ έπεται ότι $f(x) \neq f(x')$ ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $x, x' \in X$ με $f(x) = f(x')$ έπεται ότι $x = x'$.
- (ii) Η f λέγεται **επί** αν για κάθε $y \in Y$ υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = y$ ή, ισοδύναμα, αν $f(X) = Y$.

Παράδειγμα 1.4.7. Για τις απεικονίσεις στο Παράδειγμα 1.4.3 έχουμε:

- (i) Η ρ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\rho((r, 0)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\rho((1, 3)) = 4 = \rho((2, 2))$.
- (ii) Η ρ είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\rho((r, 1)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\rho((3, 4)) = 12 = \rho((2, 6))$.
- (iii) Η f δεν είναι επί, αφού $f(\mathbb{R}) = \{1, 0\} \subsetneq \mathbb{R}$, ούτε 1-1, αφού $f(2) = 1 = f(3)$.
- (iv) Η π_1 είναι επί, αφού αν $r \in \mathbb{R}$ τότε $\pi_1((r, 2)) = r$, αλλά δεν είναι 1-1, αφού $\pi_1((1, 2)) = 1 = \pi_1((1, 3))$.
- (v) Εύκολα βλέπουμε ότι η σ είναι 1-1 και επί.
- (vi) Η ϱ είναι 1-1, αφού αν $\varrho(x) = \varrho(y)$, τότε $-x = -y$ και άρα $x = y$, αλλά δεν είναι επί, αφού $\varrho(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{Z}$.

Ορισμός 1.4.8. Έστω M ένα σύνολο. Η απεικόνιση $M \rightarrow M$ που αντιστοιχεί το x στο x για κάθε $x \in X$ λέγεται η **ταυτοτική** απεικόνιση του M και συμβολίζεται με 1_M ή id_M .

Ορισμός 1.4.9. Έστω $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ δύο απεικονίσεις. Τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in X$, η οποία λέγεται **σύνθεση** των f και g .

Παράδειγμα 1.4.10. Έστω $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ και $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ οι συναρτήσεις με $f(\nu) = 2\nu + 1$ και $g(\nu) = 2\nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{Z}$. Τότε, για τις συνθέσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ είναι $(g \circ f)(\nu) = 4\nu + 2$ και $(f \circ g)(\nu) = 4\nu + 1$. Παρατηρούμε ότι $f \circ g \neq g \circ f$.

Πρόταση 1.4.11. Αν $f : A \rightarrow B$ είναι μια απεικόνιση, τότε $1_B \circ f = f = f \circ 1_A$.

Απόδειξη. Είναι άμεση και αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Πρόταση 1.4.12. (προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης απεικονίσεων) Έστω $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \Gamma$ και $h : \Gamma \rightarrow \Delta$ απεικονίσεις. Τότε, οι απεικονίσεις $h \circ (g \circ f) : A \rightarrow \Delta$ και $(h \circ g) \circ f : A \rightarrow \Delta$ είναι ίσες.

Απόδειξη. Έστω $\phi = h \circ (g \circ f) : A \rightarrow \Delta$ και $\psi = (h \circ g) \circ f : A \rightarrow \Delta$. Τότε, για κάθε $\alpha \in A$ έχουμε $\phi(\alpha) = (h \circ (g \circ f))(\alpha) = h((g \circ f)(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$ και $\psi(\alpha) = ((h \circ g) \circ f)(\alpha) = (h \circ g)(f(\alpha)) = h(g(f(\alpha)))$. Άρα $\phi(\alpha) = \psi(\alpha)$ για κάθε $\alpha \in A$, δηλαδή $\phi = \psi$.

Πρόταση 1.4.13. Έστω $f : X \rightarrow Y$ και $g : Y \rightarrow Z$ δυο απεικονίσεις.

- (i) Αν οι f και g είναι 1-1, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης 1-1.
- (ii) Αν οι f και g είναι επί, τότε η $g \circ f$ είναι επίσης επί.
- (iii) Αν οι f και g είναι 1-1 και επί τότε η $g \circ f$ είναι επίσης 1-1 και επί.

Απόδειξη.

(i) Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$. Επειδή η f είναι 1-1, έπεται ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Τώρα, επειδή η g είναι 1-1, έπεται ότι $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$. Άρα, η $g \circ f$ είναι 1-1.

(ii) Έστω $z \in Z$. Επειδή η g είναι επί, έπεται ότι $z = g(y)$ για κάποιο $y \in Y$. Τώρα, επειδή η f είναι επί, έχουμε ότι $y = f(x)$ για κάποιο $x \in X$. Άρα, έχουμε $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. Δείξαμε ότι για κάθε $z \in Z$ υπάρχει κάποιο $x \in X$ με $z = (g \circ f)(x)$. Άρα, η $g \circ f$ είναι επί.

(iii) Αυτό έπεται άμεσα από τα (i) και (ii).

Έστω $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow A$ δυο απεικονίσεις. Τότε, ορίζονται οι απεικονίσεις

$$g \circ f : A \rightarrow A \text{ και } f \circ g : B \rightarrow B.$$

Στην περίπτωση που $g \circ f = 1_A$ και $f \circ g = 1_B$, η g λέγεται μια **αντίστροφη** της f (και η f μια αντίστροφη της g). Θα εξετάσουμε παρακάτω πότε μια απεικόνιση f έχει αντίστροφη και θα δούμε ότι αυτή, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Πρόταση 1.4.14. Μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.

Απόδειξη. Έστω ότι η f έχει μια αντίστροφη $g : B \longrightarrow A$. Έτσι, έχουμε $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$ και $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$. Θα δείξουμε ότι η f είναι 1-1 και επί. Πράγματι, έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ με $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Τότε, έχουμε $\alpha_1 = g(f(\alpha_1)) = g(f(\alpha_2)) = \alpha_2$ και έτσι η f είναι 1-1. Έστω τώρα $\beta \in B$. Τότε $f(g(\beta)) = \beta$, δηλαδή το β είναι η εικόνα του στοιχείου $g(\beta) \in A$ μέσω της f . Άρα, η f είναι επί.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι 1-1 και επί. Θα δείξουμε ότι υπάρχει απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$ με $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$. Έστω $\beta \in B$. Καθώς η f είναι επί, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Αν κάποιο στοιχείο $\alpha' \in A$ είναι τέτοιο ώστε $f(\alpha') = \beta$, τότε $f(\alpha) = \beta = f(\alpha')$. Επειδή όμως η f είναι 1-1, έπεται ότι $\alpha = \alpha'$. Άρα, αν $\beta \in B$ τότε υπάρχει ένα μοναδικό $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $g : B \longrightarrow A$, ως εξής: Αν $\beta \in B$ τότε η εικόνα $g(\beta)$ του β μέσω της g είναι το μοναδικό στοιχείο $\alpha \in A$ το οποίο έχει την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$. Δηλαδή, $g(\beta) = \alpha$, όπου α το μοναδικό στοιχείο του A με την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$. Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι $f(g(\beta)) = \beta$ για κάθε $\beta \in B$ και $g(f(\alpha)) = \alpha$ για κάθε $\alpha \in A$. Άρα, έχουμε $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.

Πρόταση 1.4.15. Αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει μοναδική αντίστροφη, την οποία συμβολίζουμε με f^{-1} .

Απόδειξη. Είδαμε στην Πρόταση 1.4.14 ότι αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί τότε έχει αντίστροφη. Έστω $g_1, g_2 : B \longrightarrow A$ δυο αντίστροφες της f . Τότε, έχουμε $g_1 \circ f = 1_A = g_2 \circ f$ και $f \circ g_1 = 1_B = f \circ g_2$. Έτσι, με βάση τις Προτάσεις 1.4.11 και 1.4.12, συμπεραίνουμε ότι $g_1 = 1_A \circ g_1 = (g_2 \circ f) \circ g_1 = g_2 \circ (f \circ g_1) = g_2 \circ 1_B = g_2$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αν μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ είναι 1-1 και επί, τότε η αντίστροφη απεικόνιση $f^{-1} : B \longrightarrow A$ είναι επίσης 1-1 και επί, ενώ η αντίστροφη της f^{-1} είναι η f , δηλαδή $(f^{-1})^{-1} = f$.

Παράδειγμα 1.4.16. Από τις απεικονίσεις του Παραδείγματος 1.4.3 μόνο η απεικόνιση σ στο (v) είναι 1-1 και επί και άρα μόνο αυτή έχει αντίστροφη. Η $\sigma^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ ορίζεται θέτοντας $\sigma^{-1}(0) = 0$ και

$$\sigma^{-1}(k) = \begin{cases} 2k & \text{αν } k \text{ θετικός ακέραιος} \\ -2k - 1 & \text{αν } k \text{ αρνητικός ακέραιος} \end{cases}$$

Πρόταση 1.4.17. Αν οι απεικονίσεις $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow \Gamma$ έχουν αντίστροφες, τότε η απεικόνιση $g \circ f : A \rightarrow \Gamma$ έχει επίσης αντίστροφη και μάλιστα ισχύει $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Απόδειξη. Έχουμε τις σχέσεις $f^{-1} \circ f = 1_A$ και $f \circ f^{-1} = 1_B$, όπως επίσης και τις σχέσεις $g^{-1} \circ g = 1_B$ και $g \circ g^{-1} = 1_\Gamma$. Με βάση τις Προτάσεις 1.4.11 και 1.4.12, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) \\ &= g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) \\ &= g \circ (1_B \circ g^{-1}) \\ &= g \circ g^{-1} \\ &= 1_\Gamma. \end{aligned}$$

Ανάλογα δείχνουμε ότι $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$. Έτσι, δείξαμε ότι η $g \circ f$ έχει μια αντίστροφη, την $f^{-1} \circ g^{-1}$. Καθώς γνωρίζουμε ότι αν μια απεικόνιση έχει αντίστροφη, τότε αυτή είναι μοναδική, έπεται ότι $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ορισμός 1.4.18. Έστω $f : X \rightarrow Y$ μια απεικόνιση και M ένα υποσύνολο του X . Η απεικόνιση $M \rightarrow Y$ με $x \mapsto f(x)$ λέγεται **περιορισμός της f στο M** και συμβολίζεται με $f|_M$.

Ορισμός 1.4.19. Έστω $\rho : A \rightarrow B$ μία απεικόνιση και Γ ένα σύνολο με $A \subseteq \Gamma$. Αν $\sigma : \Gamma \rightarrow B$ είναι μια απεικόνιση τέτοια ώστε $\rho = \sigma|_A$, τότε η σ λέγεται **επέκταση της ρ** .

Παράδειγμα 1.4.20. Θεωρούμε την απεικόνιση $\rho : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \mapsto -\nu$. Τότε, οι απεικονίσεις $\sigma_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\nu \mapsto -\nu$ και $\sigma_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\sigma_2(\nu) = \begin{cases} -\nu & \text{αν ο } \nu \text{ είναι θετικός} \\ \nu & \text{αν ο } \nu \text{ είναι αρνητικός} \end{cases}$ είναι επεκτάσεις της ρ με $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

Ορισμός 1.4.21. Έστω A, B δυο σύνολα. Η απεικόνιση $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ με $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha$ λέγεται **προβολή στον πρώτο παράγοντα του καρτεσιανού γινομένου $A \times B$** . Ανάλογα ορίζεται η προβολή $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ στον δεύτερο παράγοντα του $A \times B$.

Παρατήρηση 1.4.22. Ο ορισμός της απεικόνισης που δώσαμε (Ορισμός 1.4.1) δεν είναι διατυπωμένος αυστηρά στη γλώσσα των συνόλων. Ένας αυστηρός ορισμός είναι ο ακόλουθος: Μια απεικόνιση f είναι μια διατεταγμένη τριάδα (X, Y, R) όπου X, Y είναι σύνολα και R ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $X \times Y$, το οποίο έχει τις επόμενες δύο ιδιότητες:

(i) για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in Y$ ώστε $(x, y) \in R$ και

- (ii) αν $x \in X$ και $y, y' \in Y$ είναι στοιχεία με $(x, y) \in R$ και $(x, y') \in R$, τότε $y = y'$.

Έτσι, μια απεικόνιση $f = (X, Y, R)$ είναι μια διμελής σχέση ειδικής μορφής από το X στο Y .

Ασκήσεις

1. (i) Ποιες από τις ακόλουθες απεικονίσεις είναι 1-1; ποιες είναι επί;

$$f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x^2$$

$$f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^2$$

$$f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, x \longmapsto x^3$$

$$f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^3$$

$$f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, x \longmapsto x + 1$$

- (ii) Είναι οι απεικονίσεις $f_5 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_5$ ίσες;

2. Έστω $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η προβολή στον πρώτο παράγοντα. Αν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ναδειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο $\pi_1^{-1}(r_1)$ στο $\pi_1^{-1}(r_2)$.

3. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Ναδειχτεί ότι:

(i) Αν $X \subseteq Y$ τότε $f(X) \subseteq f(Y)$.

(ii) Αν $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $f^{-1}(\Gamma) \subseteq f^{-1}(\Delta)$.

(iii) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι 1-1.

(iv) $f(f^{-1}(\Gamma)) \subseteq \Gamma$ με την ισότητα να ισχύει αν η f είναι επί.

4. Έστω $f : A \rightarrow B$ μια απεικόνιση, $X, Y \subseteq A$ και $\Gamma, \Delta \subseteq B$. Ναδειχτεί ότι:

(i) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

(ii) $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$

(iii) $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$

(iv) $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta) = f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$

Ναδειχτεί επίσης ότι στο (iii) έχουμε ισότητα για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ αν και μόνο αν η f είναι 1-1.

5. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Θεωρούμε ένα μη-κενό σύνολο I και υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in I$ μας δίνεται ένα σύνολο A_i με $A_i \in \mathcal{P}(X)$ και ένα σύνολο B_i με $B_i \in \mathcal{P}(Y)$. Να δειχτεί ότι:
- (i) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
 - (ii) $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$
 - (iii) $f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
 - (iv) Αν η f είναι 1-1 τότε $f(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$
6. Έστω $f : A \longrightarrow B$ και $\rho : B \longrightarrow \Gamma$ δυο απεικονίσεις. Να δειχτεί ότι:
- (i) Αν η $\rho \circ f$ είναι επί, τότε η ρ είναι επί.
 - (ii) Αν η $\rho \circ f$ είναι 1-1, τότε η f είναι 1-1.
7. Έστω $f : A \longrightarrow X$ μια απεικόνιση και B, Γ υποσύνολα του A , τέτοια ώστε οι περιορισμοί $f|_B$ και $f|_\Gamma$ είναι 1-1. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο περιορισμός $f|_{B \cup \Gamma}$ είναι επίσης 1-1;
8. Έστω $f : A \longrightarrow B$ μια απεικόνιση. Να δειχτεί ότι:
- (i) Η f είναι 1-1 αν και μόνο αν $|f^{-1}(\{\beta\})| = 1$ για κάθε $\beta \in f(A)$.
 - (ii) Η f είναι επί αν και μόνο αν $f^{-1}(\{\beta\}) \neq \emptyset$ για κάθε $\beta \in B$.
9. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Τότε ορίζονται οι απεικονίσεις $\bar{f} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ με $A \mapsto f(A)$ και $\overline{f^{-1}} : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ με $B \mapsto f^{-1}(B)$. Να δειχτεί ότι:
- (i) Αν η f είναι επί τότε $\bar{f} \circ \overline{f^{-1}} = 1_{\mathcal{P}(Y)}$.
 - (ii) Αν η f είναι 1-1 τότε $\overline{f^{-1}} \circ \bar{f} = 1_{\mathcal{P}(X)}$.
10. (i) Έστω A, B δυο σύνολα και S το σύνολο των απεικονίσεων $f : \{1, 2\} \longrightarrow A \cup B$ με $f(1) \in A$ και $f(2) \in B$. Να δειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το S στο $A \times B$.
- (ii) Έστω A ένα σύνολο και ν ένας φυσικός αριθμός. Αν M είναι το σύνολο όλων των απεικονίσεων $f : \{1, 2, 3, \dots, \nu\} \longrightarrow A$, τότε να δειχτεί ότι υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το A στο $A^\nu = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{\nu\text{-φορές}}$.
11. Μια απεικόνιση $f : A \longrightarrow B$ λέγεται σταθερή αν $f(\alpha) = f(\alpha')$ για κάθε $\alpha, \alpha' \in A$. Να δειχτεί ότι αν $f, \rho : A \longrightarrow A$ είναι σταθερές απεικονίσεις και $f \neq \rho$, τότε $\rho \circ f \neq f \circ \rho$.

12. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση. Ναδειχτεί ότι η f είναι σταθερή αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow X$ έχουμε $f \circ g = f$.
13. Να βρεθεί μια 1-1 και επί απεικόνιση $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$, όπου $M \subsetneq \mathbb{N}$.
14. Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια απεικόνιση.
- (i) Στο σύνολο X ορίζουμε μια σχέση, θέτοντας $x \sim x'$ αν και μόνο αν $f(x) = f(x') \in Y$. Ναδειχτεί ότι η σχέση αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας.
 - (ii) Ναδειχτεί ότι το σύνολο $\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in f(X)\}$ είναι μια διαμέριση του X .
15. (i) Έστω $f : X \longrightarrow Y$ μια 1-1 απεικόνιση. Να ορίσετε μια απεικόνιση $\varrho : Y \longrightarrow X$ με $\varrho \circ f = 1_X$.
- (ii) Δώστε παράδειγμα απεικονίσεων $\sigma, \tau : A \longrightarrow A$ με $\tau \circ \sigma = 1_A$ και $\sigma \circ \tau \neq 1_A$.
16. Έστω $f, g : X \longrightarrow Y$ δυο απεικονίσεις. Ναδειχτεί ότι:
- (i) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $h : Y \longrightarrow \{3, 7\}$ ισχύει $h \circ f = h \circ g$.
 - (ii) $f = g$ αν και μόνο αν για κάθε απεικόνιση $\sigma : \{3\} \longrightarrow X$ ισχύει ότι $f \circ \sigma = g \circ \sigma$.
17. Έστω $A = A_1 \times A_2$ και R_1, R_2 σχέσεις ισοδυναμίας στα A_1 και A_2 αντίστοιχα. Έστω R η σχέση στο A που ορίζεται θέτοντας $(\alpha_1, \alpha_2)R(\beta_1, \beta_2)$ αν $\alpha_1 R_1 \beta_1$ και $\alpha_2 R_2 \beta_2$. Ναδειχτεί ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας στο A και υπάρχει μια 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο A/R στο καρτεσιανό γινόμενο $(A_1/R_1) \times (A_2/R_2)$.

1.5 Μαθηματική Επαγωγή

Θα αποδείξουμε την αρχή της επαγωγής χρησιμοποιώντας την ακόλουθη ιδιότητα των φυσικών αριθμών.

Αξίωμα του ελαχίστου ή Αξίωμα καλής διάταξης: Κάθε μη-κενό υποσύνολο M του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή, υπάρχει $m_0 \in M$ τέτοιο ώστε $m_0 \leq m$ για κάθε $m \in M$.

Θεώρημα 1.5.1. (Μαθηματική επαγωγή ή αρχή της επαγωγής) Έστω ότι σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν , με τέτοιον τρόπο ώστε:

- (i) η $p(1)$ αληθεύει και
- (ii) αν η $p(\mu)$ αληθεύει για κάποιο θετικό ακέραιο αριθμό μ , τότε η $p(\mu + 1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν .

Απόδειξη. Έστω S το υποσύνολο του $\mathbb{N}$ που έχει ως στοιχεία του εκείνους τους θετικούς ακέραιους αριθμούς ν , για τους οποίους η πρόταση $p(\nu)$ δεν αληθεύει. Θα δείξουμε ότι $S = \emptyset$. Έστω ότι $S \neq \emptyset$. Τότε, από το αξίωμα ελαχίστου, το S περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω μ . Από την υπόθεση (i), έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ , έχουμε ότι $\mu - 1 \notin S$ και άρα η πρόταση $p(\mu - 1)$ αληθεύει. Τότε όμως, από την υπόθεση (ii), έπεται ότι και η $p(\mu)$ αληθεύει, που είναι άτοπο καθώς $\mu \in S$.

Μια άλλη μορφή της μαθηματικής επαγωγής είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 1.5.2. (Δεύτερη μορφή της επαγωγής) Έστω ότι σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν , με τέτοιον τρόπο ώστε:

- (i) η $p(1)$ αληθεύει και
- (ii) αν $\mu \in \mathbb{N}$ και η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$, τότε η $p(\mu + 1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν .

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν S είναι το σύνολο που αποτελείται από όλους τους φυσικούς αριθμούς ν με $\nu \geq 1$, για τους οποίους η $p(\nu)$ δεν αληθεύει, τότε $S = \emptyset$. Αν το S δεν είναι κενό, τότε λόγω του αξιώματος του ελαχίστου, θα περιέχει ένα ελάχιστο στοιχείο, έστω μ . Από την υπόθεση (i), έχουμε ότι $\mu > 1$. Από τον ορισμό του μ προκύπτει ότι η πρόταση $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu - 1$. Από την υπόθεση (ii), έχουμε ότι η $p(\mu)$ αληθεύει, που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 1.5.3. Η υπόθεση (i) στα προηγούμενα δύο θεωρήματα λέγεται συνήθως «αρχικό βήμα της επαγωγής», ενώ η υπόθεση (ii) «επαγωγικό βήμα». Επίσης, η υπόθεση «αν η $p(\nu)$ αληθεύει στην (ii) του Θεωρήματος 1.5.1 (αντίστοιχα «αν η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $r \leq \mu$ » στην (ii) του Θεωρήματος 1.5.2) λέγεται «υπόθεση επαγωγής».

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε μια ιδιότητα που αφορά την πρόσθεση πραγματικών αριθμών:

Παρατήρηση 1.5.4. Γνωρίζουμε ότι αν α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Δηλαδή, αν προσθέσουμε το άθροισμα των α και β με το γ , τότε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που βρίσκουμε αν προσθέσουμε το α με το άθροισμα των β και γ . Συνεπώς, δεν έχει σημασία πώς μπαίνουν οι παρενθέσεις. Έτσι, μπορούμε να παραστήσουμε χωρίς κίνδυνο σύγχυσης τον αριθμό $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ως $\alpha + \beta + \gamma$.

Γενικότερα, αν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$ είναι πραγματικοί αριθμοί τότε μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή ως προς ν ότι με όποιον τρόπο και να προσθέσουμε τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu$, δηλαδή με όποιον τρόπο και να βάλουμε τις παρενθέσεις, το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο και το συμβολίζουμε με $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu$ ή $\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i$. Έτσι, για παράδειγμα, έχουμε $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = \alpha_1 + (\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)) = ((\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3) + \alpha_4 = (\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)) + \alpha_4$.

Έστω B ένα πεπερασμένο υποσύνολο των πραγματικών αριθμών με στοιχεία τους αριθμούς $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$. Χρησιμοποιώντας την αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης των πραγματικών αριθμών (δηλαδή τη σχέση $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$, $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$), μπορεί να αποδειχτεί με επαγωγή ως προς ν ότι για κάθε 1-1 και επί απεικόνιση $\phi : \{1, 2, \dots, \nu\} \rightarrow \{1, 2, \dots, \nu\}$ ισχύει

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu = \beta_{\phi(1)} + \beta_{\phi(2)} + \dots + \beta_{\phi(\nu)}.$$

Άρα, χωρίς κίνδυνο σύγχυσης, μπορούμε να παραστήσουμε το άθροισμα $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$ με $\sum_{\beta \in B} \beta$.

Παράδειγμα 1.5.5. Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ ισχύει

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{\nu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \nu^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(*)$. Η $p(1)$ αληθεύει, αφού $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η $p(\mu)$, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Έστω λοιπόν ότι

$$\sum_{i=1}^{\mu} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + \mu^2 = \frac{\mu(\mu+1)(2\mu+1)}{6}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mu+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{\mu} i^2 + (\mu+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} \mu(\mu+1)(2\mu+1) + (\mu+1)^2 \\ &= \frac{1}{6} (\mu+1) [\mu(2\mu+1) + 6(\mu+1)] \\ &= \frac{1}{6} (\mu+1) (2\mu^2 + 7\mu + 6) \\ &= \frac{1}{6} (\mu+1) (\mu+2) (2\mu+3) \end{aligned}$$

και άρα ισχύει η $p(\mu+1)$. Συνεπώς, από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(*)$ ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν .

Παράδειγμα 1.5.6. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός με $x \neq 1$. Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$ ισχύει

$$(**) \quad \sum_{i=0}^{\nu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\nu} = \frac{1 - x^{\nu+1}}{1 - x}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Η $p(\nu)$ είναι η ισότητα $(**)$. Η $p(1)$ αληθεύει, αφού $\sum_{i=0}^1 x^i = 1 + x = \frac{1-x^2}{1-x}$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η $p(\mu)$, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Έστω λοιπόν ότι

$$\sum_{i=0}^{\mu} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{\mu} = \frac{1 - x^{\mu+1}}{1 - x}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\mu+1} x^i &= \sum_{i=0}^{\mu} x^i + x^{\mu+1} \\ &= \frac{1-x^{\mu+1}}{1-x} + x^{\mu+1} \\ &= \frac{1-x^{\mu+1} + x^{\mu+1}(1-x)}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{\mu+2}}{1-x} \end{aligned}$$

και άρα ισχύει η $p(\mu+1)$. Συνεπώς, από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι η $(**)$ αληθεύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό ν .

Παρατήρηση 1.5.7. Συχνά οι επαγωγικές αποδείξεις δεν αρχίζουν από τον αριθμό 1, αλλά από κάποιον άλλο μεγαλύτερο. Ισχύουν τα αντίστοιχα των Θεωρημάτων 1.5.1 και 1.5.2 και στην περίπτωση αυτή. Για παράδειγμα, αναφέρουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 1.5.8. (Δεύτερη μορφή της επαγωγής με αρχικό βήμα στο κ) Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και έστω ότι σε κάθε φυσικό αριθμό ν με $\nu \geq \kappa$ αντιστοιχεί μια πρόταση $p(\nu)$ που αφορά το ν . Έστω επιπλέον ότι

(i) Η $p(\kappa)$ αληθεύει και

(ii) Αν μ είναι ένας φυσικός αριθμός με $\mu \geq \kappa$ και η $p(r)$ αληθεύει για κάθε $\kappa \leq r \leq \mu$, τότε η $p(\mu+1)$ αληθεύει.

Τότε, η $p(\nu)$ αληθεύει για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq \kappa$.

Απόδειξη. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη.

Παράδειγμα 1.5.9. Ένας φυσικός αριθμός $p \geq 2$ λέγεται πρώτος αν δε μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο μικρότερων του φυσικών αριθμών. Θα δείξουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο (ενός ή περισσοτέρων) πρώτων αριθμών.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.5.8. Για $n = 2$ ο ισχυρισμός ισχύει, αφού ο 2 είναι πρώτος. Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους φυσικούς r με $2 \leq r \leq \mu$. Θα δείξουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τον $\mu + 1$. Αν ο $\mu + 1$ είναι πρώτος, τότε έχουμε τελειώσει. Αν ο $\mu + 1$ δεν είναι πρώτος, τότε $\mu + 1 = \mu_1 \mu_2$ με $\mu_1 < \mu + 1$ και $\mu_2 < \mu + 1$. Αλλά τότε, από την υπόθεση της επαγωγής, οι αριθμοί μ_1 και μ_2 είναι πρώτοι ή γινόμενα πρώτων. Συνεπώς, το γινόμενό τους, δηλαδή ο αριθμός $\mu + 1$, είναι επίσης γινόμενο πρώτων. Το αποτέλεσμα τώρα έπεται από το Θεώρημα 1.5.8.

Ασκήσεις

1. Να δειχτεί ότι

(i) Ο αριθμός $8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1}$ είναι πολλαπλάσιο του 73 για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$.

(ii) $\sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{\nu} \nu(\nu+1)$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$.

(iii) $2\nu \leq 2^{\nu}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

(iv) $\sum_{i=1}^{\nu} i! < (\nu+1)!$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geq 1$.

2. Έστω A ένα πεπερασμένο σύνολο με ν στοιχεία. Να δειχτεί ότι το πλήθος των στοιχείων του $\mathcal{P}(A)$ είναι 2^{ν} .

3. Έστω κ ένας φυσικός αριθμός και $M \subseteq \{1, 2, \dots, \kappa\}$, τέτοιο ώστε:

(i) $1 \in M$ και

(ii) αν $\lambda \in \{1, 2, \dots, \kappa-1\}$ και $\lambda \in M$, τότε $\lambda+1 \in M$.

Να δειχτεί ότι $M = \{1, 2, \dots, \kappa\}$.

4. (i) Έστω A, B δυο πεπερασμένα υποσύνολα των πραγματικών αριθμών με $A \cap B = \emptyset$. Να δειχτεί ότι $\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{\alpha \in A} \alpha + \sum_{\beta \in B} \beta$.

(ii) Έστω $A_1, A_2, \dots, A_{\nu}$ πεπερασμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$. Να δειχτεί ότι $\sum_{x \in \bigcup_{i=1}^{\nu} A_i} x = \sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x + \dots + \sum_{x \in A_{\nu}} x$. Το άθροισμα $\sum_{x \in A_1} x + \sum_{x \in A_2} x + \dots + \sum_{x \in A_{\nu}} x$ το συμβολίζουμε με $\sum_{i=1}^{\nu} (\sum_{x \in A_i} x)$.

5. Έστω A, B δυο πεπερασμένα σύνολα και $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ μια απεικόνιση. Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu\}$, ναδειχτεί ότι

$$(i) \sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\beta \in B} f(\alpha_1, \beta) + \dots + \sum_{\beta \in B} f(\alpha_\nu, \beta)$$

$$(ii) \sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta_1) + \dots + \sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta_\mu)$$

Το δεύτερο μέλος της (i) το γράφουμε και ως

$$\sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} f(\alpha, \beta) \right),$$

ενώ το δεύτερο μέλος της (ii) το γράφουμε και ως

$$\sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta) \right).$$

Έτσι, από τις (i) και (ii), έπεται ότι

$$\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{\alpha \in A} \left(\sum_{\beta \in B} f(\alpha, \beta) \right) = \sum_{\beta \in B} \left(\sum_{\alpha \in A} f(\alpha, \beta) \right).$$

1.6 Λύσεις - Υποδείξεις των Ασκήσεων του Κεφαλαίου 1

Παράγραφος 1.1

1. Από τις ισότητες που αναφέρονται ότι ισχύουν στην Πρόταση 1.1.13 έχει αποδειχθεί η τελευταία. Εδώ θα αποδείξουμε μερικές ακόμη.

(i) Ας αποδείξουμε ότι ισχύει $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$. Δηλαδή ότι ισχύει ο επιμεριστικός νόμος της τομής ως προς την ένωση.

Έστω $r \in A \cap (B \cup \Gamma)$, τότε το r ανήκει στο σύνολο A και στο σύνολο $B \cup \Gamma$, δηλαδή ανήκει στο σύνολο A και στα σύνολα B ή Γ . Αυτό σημαίνει ότι το r ανήκει στο σύνολο A και στο σύνολο B ή στο σύνολο A και στο σύνολο Γ . Άρα $r \in A \cap B$ ή $r \in A \cap \Gamma$. Επομένως $r \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, δηλαδή αποδείξαμε ότι $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

Αντίστροφα, έστω $r \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$, τότε το r ανήκει στο σύνολο $A \cap B$ ή στο σύνολο $A \cap \Gamma$. Αυτό σημαίνει ότι το r ανήκει στο σύνολο A και στα σύνολα B ή Γ , δηλαδή το r ανήκει στο σύνολο A και στην ένωση $B \cup \Gamma$. Επομένως $r \in A \cap (B \cup \Gamma)$, δηλαδή αποδείξαμε $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$ και τελικά την ισότητα $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

(ii) Ας αποδείξουμε ότι $A \cap (A \cup B) = A$.

Προφανώς το σύνολο A είναι υποσύνολο του εαυτού του, όπως επίσης ισχύει $A \subseteq A \cup B$. Επομένως το σύνολο A είναι υποσύνολο και των δύο συνόλων A και $A \cup B$. Δηλαδή είναι υποσύνολο της τομής τους, άρα $A \subseteq A \cap (A \cup B)$.

Αντίστροφα, προφανώς κάθε στοιχείο της τομής $A \cap (A \cup B)$ είναι και στοιχείο του συνόλου A , άρα $A \cap (A \cup B) \subseteq A$ και τελικά $A \cap (A \cup B) = A$.

(iii) Ας δούμε ότι $A \cup A^c = S$. Προφανώς, $A \cup A^c \subseteq S$. Αντίστροφα, αν ένα στοιχείο του συνόλου S δεν ανήκει στο σύνολο A , θα ανήκει στο συμπλήρωμά του A^c , άρα κάθε στοιχείο του συνόλου S θα ανήκει είτε στο υποσύνολο A ή στο υποσύνολο A^c , συνεπώς $A \cup A^c \subseteq S$ και τελικά $A \cup A^c = S$.

Εδώ θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι: Αν S είναι ένα σύνολο και A ένα υποσύνολό του, τότε $(A^c)^c = A$. Δηλαδή το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός υποσυνόλου είναι το υποσύνολο αυτό. Πράγματι, από τον ορισμό του συμπληρώματος έχουμε ότι αν $r \in (A^c)^c$, τότε το $r \in S$ δεν ανήκει στο A^c , δηλαδή ανήκει στο σύνολο A , άρα αποδείξαμε ότι $(A^c)^c \subseteq A$. Αντίστροφα, αν $r \in A$, τότε $r \notin A^c$, δηλαδή $r \in (A^c)^c$. Οπότε τελικά $(A^c)^c = A$.

(iv) Έχει αποδειχθεί η τελευταία ισότητα $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, θα την

επικαλεσθούμε για να αποδείξουμε την δύϊκή της, δηλαδή ότι $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Πράγματι, $(A \cup B)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c$ [αντικαταστήσαμε το A με το ίσον του $(A^c)^c$ και το B με το ίσον του $(B^c)^c$], οπότε συνεχίζουμε την ισότητα και έχουμε $(A \cup B)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c = ((A^c \cap B^c)^c)^c$ [για την τελευταία ισότητα επικαλεσθήκαμε την ισότητα που προαναφέραμε]. Τώρα, επειδή το συμπλήρωμα του συμπληρώματος ενός υποσυνόλου είναι το υποσύνολο αυτό, η ισότητα συνεχίζεται και έχουμε τελικά $(A \cup B)^c = ((A^c)^c \cup (B^c)^c)^c = ((A^c \cap B^c)^c)^c = A^c \cap B^c$.

Θα μπορούσατε να αποδείξετε την ισότητα αυτή ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης που αναφέρονται στην απόδειξη της τελευταίας ισότητας της Πρότασης 1.1.13.

2. Από τον ορισμό της ένωσης συνόλων έπεται ότι, αν ένα από τα δύο σύνολα είναι υποσύνολο του άλλου (π.χ. $B \subseteq A$), τότε $A \cup B = A$ και $A \cap B = B$. Επομένως

$$|A \cup B| = |A| = |A| + |B| - |B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Αν κάθενα από τα δύο σύνολα δεν είναι υποσύνολο του άλλου, τότε μπορούν να υποθεθούν μη κενά. Έστω $A \cap B = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, c_1, c_2, \dots, c_k\}$ και $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Τότε $A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m, c_1, c_2, \dots, c_k\}$ και επομένως $|A \cup B| = n + m + k = (n + k) + (m + k) - k = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Στην περίπτωση όπου η τομή $A \cap B$ είναι το κενό σύνολο, προφανώς $k = 0$ και ισχύει $|A \cup B| = n + m = |A| + |B|$.

3. Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$, τότε κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B . Δηλαδή δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου A που να ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου B . Επομένως $A \cap B^c = \emptyset$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \cap B^c = \emptyset$. Δηλαδή δεν υπάρχει στοιχείο του συνόλου A που να ανήκει στο συμπλήρωμα του συνόλου B . Άρα όλα τα στοιχεία του συνόλου A ανήκουν στο σύνολο B , συνεπώς $A \subseteq B$.

4. Από την Πρόταση 1.1.13 έχουμε ότι $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Τα A^c και B^c έχουν υποτεθεί πεπερασμένα, άρα από την άσκηση 2 (της ίδιας παραγράφου), έπεται ότι και η ένωσή τους $A^c \cup B^c$ είναι πεπερασμένο σύνολο.
5. Πριν ξεκινήσουμε την λύση της άσκησης, ας κάνουμε ορισμένα σχόλια. Κατ' αρχάς αν έχουμε δύο σύνολα X και Y , η διαφορά $X \setminus Y$ από τον ορισμό περιλαμβάνει τα στοιχεία του συνόλου X , τα οποία δεν ανήκουν

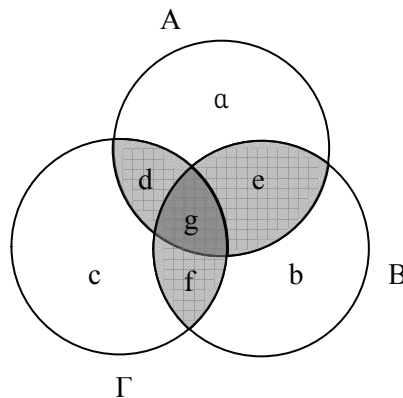
στο σύνολο Y , δηλαδή ένα στοιχείο της διαφοράς $X \setminus Y$ προφανώς ανήκει στην διαφορά $X \setminus (X \cap Y)$. Επίσης αντίστροφα, ένα στοιχείο της διαφοράς $X \setminus (X \cap Y)$ είναι ένα στοιχείο του συνόλου X , το οποίο δεν ανήκει στο σύνολο Y , διότι αν ανήκε στο σύνολο Y , τότε, ως στοιχείο και του συνόλου X θα ανήκε στην τομή $X \cap Y$, άτοπο. Άρα ισχύει $X \setminus Y = X \setminus (X \cap Y)$. Υπό την έννοια αυτή από ένα σύνολο πάντα αφαιρούμε ένα υποσύνολό του.

Ας σχολιάσουμε τί σημαίνει συμμετρική διαφορά δύο συνόλων. Έχουμε ορίσει ως συμμετρική διαφορά των συνόλων A και B το σύνολο $A \dot{+} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Από το προηγούμενο σχόλιο έπεται ότι $A \dot{+} B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (B \cap A)) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Δηλαδή ένα στοιχείο της συμμετρικής διαφοράς ανήκει στην ένωση $A \cup B$, αλλά δεν ανήκει στην $A \cap B$ και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι $A \dot{+} B = (A \cap B)^c$, όπου $(A \cap B)^c$ παριστά το συμπλήρωμα της τομής $A \cap B$ ως προς την ένωση $A \cup B$.

Αν τώρα έχουμε τρία σύνολα A , B , και Γ , τότε ισχύει ότι $A \cap (B \setminus \Gamma) = A \cap (B \setminus (B \cap \Gamma)) = (A \cap B) \setminus (A \cap B \cap \Gamma)$.

$$i) \quad A \dot{+} B = (A \cap B)^c = (B \cap A)^c = B \dot{+} A$$

ii) Στο ερώτημα αυτό δεν θα δώσουμε μια “τυπική” απόδειξη, αλλά με την βοήθεια του διπλανού σχήματος θα δούμε εποπτικά μια “απόδειξη”.



Τα χωρία a, b, c, d, e, f, g είναι ξένα μεταξύ τους, δηλαδή ανά δύο η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Παρατηρούμε ότι $B \dot{+} \Gamma = (B \cup \Gamma) \setminus (B \cap \Gamma) = b \cup c \cup d \cup e$. Οπότε $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \cup (B \dot{+} \Gamma)) \setminus (A \cap (B \dot{+} \Gamma)) = (a \cup d \cup e \cup g \cup b \cup c) \setminus (d \cup e) = a \cup g \cup b \cup c$.

Τώρα συμμετρικά βλέπουμε ότι $(A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma = ((A \dot{+} B) \cup \Gamma) \setminus ((A \dot{+} B) \cap \Gamma) = (a \cup d \cup b \cup f \cup c \cup g) \setminus (d \cup f) = a \cup b \cup c \cup g$.

Συνεπώς $A \dot{+} (B \dot{+} \Gamma) = (A \dot{+} B) \dot{+} \Gamma$.

iii) $A \dot{+} A = (A \cap A)^c = A^c$, όπου το συμπλήρωμα A^c είναι ως προς την ένωση $A \cup A = A$, δηλαδή $A \dot{+} A = (A \cap A)^c = A^c = \emptyset$.

iv) Παρατηρούμε ότι $A \cap (B \dot{+} \Gamma) = A \cap ((B \cup \Gamma) \setminus (B \cap \Gamma)) = (A \cap (B \cup \Gamma)) \setminus (A \cap B \cap \Gamma) = ((A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)) \setminus ((A \cap B) \cap (B \cap \Gamma)) = (A \cap B) \dot{+} (A \cap \Gamma)$.

6. (i) Έστω $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^c$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο x δεν ανήκει στην ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$, δηλαδή το στοιχείο x δεν ανήκει στα σύνολα A_i για όλα τα $i \in I$, άρα $x \in (A_i)^c$ για όλα τα $i \in I$, επομένως $x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$. Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcap_{i \in I} A_i^c$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in (A_i)^c$ για όλα τα $i \in I$, δηλαδή το στοιχείο x δεν ανήκει στα σύνολα A_i για όλα τα $i \in I$, άρα το στοιχείο x δεν ανήκει στην ένωση $\bigcup_{i \in I} A_i$, επομένως $x \in (\bigcup_{i \in I} A_i)^c$.

Άρα τελικά αποδεικνύεται η ισότητα $(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$.

(ii) Με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται και η *δυϊκή* ισότητα $(\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$.

Παράγραφος 1.2

1. Στο παράδειγμα 1.2.2 έχουν υπολογισθεί τα καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$ και $B \times A$, οπότε η ένωσή τους είναι το σύνολο $\{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$ το οποίο αποτελείται από 11 το πλήθος στοιχεία.
2. (i) Για να δημιουργήσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο από ένα σύνολο και ένα στοιχείο από ένα (άλλο) σύνολο. Για να επιλέξουμε όμως ένα στοιχείο πρέπει το σύνολο να είναι μη κενό. Όποτε το συμπέρασμα έπεται κατά προφανή τρόπο.

(ii) α) Έστω $A \times B = B \times A$, τότε για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε ότι υπάρχουν $\bar{a} \in A$ και $\bar{b} \in B$ έτσι ώστε $(a, b) = (\bar{b}, \bar{a}) \in A \times B = B \times A$. Άρα $a = \bar{b} \in B$ και $b = \bar{a} \in A$. Δηλαδή $A = B$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

β) Υποθέτουμε ότι $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$. Αν το διατεταγμένο ζεύγος (a, b) ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$, τότε $a \in A \subseteq \Gamma$ και $b \in B \subseteq \Delta$, δηλαδή $(a, b) \in \Gamma \times \Delta$. Συνεπώς $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$. Τότε για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε ότι $(a, b) \in A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$, δηλαδή $a \in \Gamma$ και $b \in \Delta$. Συνεπώς $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$.
- (iii) Έστω $(a, b) \in (A \cup B) \times \Gamma$. Τότε $a \in A$ ή $a \in B$ και $b \in \Gamma$, δηλαδή $(a, b) \in A \times \Gamma$ ή $(a, b) \in B \times \Gamma$, άρα $(a, b) \in (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.

Αντίστροφα, έστω $(a, b) \in (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$. Τότε $(a, b) \in A \times \Gamma$ ή $(a, b) \in B \times \Gamma$, δηλαδή $a \in A$ ή $a \in B$ και $b \in \Gamma$, άρα $a \in A \cup B$ και $b \in \Gamma$. Συνεπώς $(a, b) \in (A \cup B) \times \Gamma$.

(iv) Έστω $(a, b) \in (A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta)$, τότε $a \in A \cap B$ και $b \in \Gamma \cap \Delta$, δηλαδή $(a, b) \in A \times \Gamma$ όπως επίσης $(a, b) \in B \times \Delta$. Συνεπώς $(a, b) \in (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$.

Αντίστροφα, $(a, b) \in (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$, τότε $(a, b) \in A \times \Gamma$ και $(a, b) \in B \times \Delta$. Αυτό σημαίνει ότι $a \in A$ και $a \in B$ και, $b \in \Gamma$ και $b \in \Delta$, δηλαδή $a \in A \cap B$ και $b \in \Gamma \cap \Delta$. Συνεπώς $(a, b) \in (A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta)$.

Παρατήρηση: Προφανώς τώρα είστε σε θέση να αποδείξετε ότι $(A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta) = (A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta)$.

(v) Έστω $(a, b) \in (A \setminus B) \times \Gamma$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο a ανήκει στο σύνολο A , αλλά όχι στο σύνολο B , ενώ το στοιχείο b ανήκει στο σύνολο Γ . Επομένως το ζεύγος (a, b) ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times \Gamma$, αλλά δεν ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $B \times \Gamma$. Συνεπώς $(a, b) \in (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$.

Αντίστροφα, έστω $(a, b) \in (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$. Αυτό σημαίνει ότι το ζεύγος (a, b) ανήκει στο στο καρτεσιανό γινόμενο $A \times \Gamma$, αλλά δεν ανήκει στο καρτεσιανό γινόμενο $B \times \Gamma$. Επειδή το στοιχείο b ανήκει στο σύνολο Γ , έχουμε ότι το στοιχείο a δεν ανήκει στο σύνολο B , άρα $a \in A \setminus B$ και $b \in \Gamma$. Συνεπώς $(a, b) \in (A \setminus B) \times \Gamma$.

3. Έστω $(a_1, b) \in A \times B$, προφανώς $(a_1, b) \in \{a_1\} \times B \subseteq \bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B) = \bigcup_{a \in A} B_a$.

Αντίστροφα, προφανώς για κάθε $a \in A$ έχουμε ότι $\{a\} \times B \subseteq A \times B$, επομένως $\bigcup_{a \in A} (\{a\} \times B) = \bigcup_{a \in A} B_a \subseteq A \times B$.

Παρομοίως αποδεικνύεται και η ισότητα $A \times B = \bigcup_{b \in B} A_b$, όπου $A_b = A \times \{b\}$.

4. Από την άσκηση 2_{(ii)(β)} (της ίδιας παραγράφου) έχουμε ότι, για κάθε $i \in I$ και $j \in J$, $A_i \times B_j \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j)$. Επομένως $\bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j \subseteq (\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j)$.

Αντίστροφα, έστω $(a, b) \in (\bigcup_{i \in I} A_i) \times (\bigcup_{j \in J} B_j)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν δείκτες $i \in I$ και $j \in J$ έτσι ώστε $a \in A_i$ και $b \in B_j$, δηλαδή $(a, b) \in A_i \times B_j \subseteq \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$.

Με παρόμοια επιχειρήματα αποδεικνύεται και η ισότητα

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$$

Παράγραφος 1.3

1. Εξετάζουμε αν η σχέση που μας δίνεται πληροί τις τρεις ιδιότητες που πρέπει να πληροί μια σχέση ισοδυναμίας. Δηλαδή αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική.

Προφανώς για κάθε $\alpha \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $\alpha \sim \alpha$, διότι η διαφορά $\alpha - \alpha = 0 = 2 \cdot 0$ είναι πολλαπλάσιο του 2. Άρα η σχέση είναι αυτοπαθής.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$, τότε η διαφορά $\beta - \alpha$ είναι πολλαπλάσιο του 2. Δηλαδή $\beta - \alpha = 2 \cdot k$ με $k \in \mathbb{Z}$, τότε όμως και η διαφορά $\alpha - \beta = 2 \cdot (-k)$ είναι πολλαπλάσιο του 2. Άρα $\beta \sim \alpha$ και η σχέση είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \gamma$. Δηλαδή ότι $\beta - \alpha = 2 \cdot k$ και $\gamma - \beta = 2 \cdot m$ με $k, m \in \mathbb{Z}$. Τότε $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) = 2 \cdot k + 2 \cdot m = 2 \cdot (k + m)$. Άρα $\alpha \sim \gamma$ και η σχέση είναι μεταβατική.

Συνεπώς πληρούνται οι τρεις ιδιότητες και η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

2. Προφανώς για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\alpha \sim \alpha$, διότι η διαφορά $\alpha - \alpha = 0$ είναι ρητός αριθμός. Άρα η σχέση είναι αυτοπαθής.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$, τότε η διαφορά $\beta - \alpha$ είναι ρητός αριθμός. Δηλαδή $\beta - \alpha = k$ με $k \in \mathbb{Q}$, τότε όμως και η διαφορά $\alpha - \beta = -k$ είναι ρητός αριθμός. Άρα $\beta \sim \alpha$ και η σχέση είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \gamma$. Δηλαδή ότι $\beta - \alpha = k$ και $\gamma - \beta = m$ με $k, m \in \mathbb{Q}$. Τότε $\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) = k + m \in \mathbb{Q}$. Άρα $\alpha \sim \gamma$ και η σχέση είναι μεταβατική.

Συνεπώς πληρούνται οι τρεις ιδιότητες και η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.

3. Προφανώς για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\alpha \sim \alpha$, διότι $\alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \geq 0$. Άρα η σχέση είναι αυτοπαθής.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$, δηλαδή $\alpha \cdot \beta \geq 0$. Τότε όμως και $\beta \cdot \alpha = \alpha \cdot \beta \geq 0$. Άρα $\beta \sim \alpha$ και η σχέση είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε ότι $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \gamma$, δηλαδή $\alpha \cdot \beta \geq 0$ και $\beta \cdot \gamma \geq 0$. Τότε όμως το γινόμενο $\alpha \cdot \gamma$ δεν είναι κατ' ανάγκη μη αρνητικός αριθμός, όπως εύκολα διαπιστώνουμε με το εξής παράδειγμα: $1 \sim 0$ και $0 \sim -1$, αλλά $1 \cdot (-1) = -1 \leq 0$ και επομένως $1 \not\sim -1$. Άρα η σχέση δεν είναι μεταβατική.

Συνεπώς δεν πληρούνται και οι τρεις ιδιότητες και η σχέση δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

4. Προφανώς για κάθε $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\alpha_1, \alpha_2)$, διότι $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_2 \cdot \alpha_1$. Άρα η σχέση είναι αυτοπαθή.

Υποθέτουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2)$, δηλαδή $\alpha_1 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1$. Τότε όμως και $\beta_1 \cdot \alpha_2 = \beta_2 \cdot \alpha_1$. Άρα $(\beta_1, \beta_2) \sim (\alpha_1, \alpha_2)$ και η σχέση είναι συμμετρική.

Υποθέτουμε ότι $(\alpha_1, \alpha_2) \sim (\beta_1, \beta_2)$, και $(\beta_1, \beta_2) \sim (\gamma_1, \gamma_2)$ δηλαδή $\alpha_1 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1$ και $\beta_1 \cdot \gamma_2 = \beta_2 \cdot \gamma_1$. Τότε όμως το γινόμενο $\alpha_1 \cdot \gamma_2$ δεν είναι κατ' ανάγκη ίσον με το γινόμενο $\alpha_2 \cdot \gamma_1$, όπως εύκολα διαπιστώνουμε με το εξής παράδειγμα: $(1, 0) \sim (0, 0)$ και $(0, 0) \sim (1, 1)$, αλλά $1 \cdot 1 \neq 0 \cdot 1$ και επομένως $(1, 0) \not\sim (1, 1)$. Άρα η σχέση δεν είναι μεταβατική.

Συνεπώς δεν πληρούνται και οι τρεις ιδιότητες και η σχέση δεν είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παρατήρηση: Στην προηγούμενη άσκηση, αν αντί του συνόλου $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ λάβουμε το σύνολο $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, όπου $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, τότε μπορείτε να αποδείξετε ότι η σχέση είναι μεταβατική και επομένως σχέση ισοδυναμίας.

Παράγραφος 1.4

1. (i) Η απεικόνιση f_1 είναι 1-1, αλλά όχι επί, διότι αν x_1, x_2 είναι διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί, τότε προφανώς $f_1(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f_1(x_2)$. Όπως επίσης για $y = 2$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_1(x) = y$.

Η απεικόνιση f_2 δεν είναι ούτε 1-1 ούτε επί, διότι αν $0 \neq x \in \mathbb{Z}$, τότε προφανώς $f_2(x) = f_2(-x)$, ενώ $x \neq -x$. Όπως επίσης για $y = 2$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $f_2(x) = y$.

Η απεικόνιση f_3 είναι 1-1, αλλά όχι επί, διότι αν x_1, x_2 είναι διαφορετικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε προφανώς $f_3(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = f_3(x_2)$. Όπως επίσης για $y = 2$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_3(x) = y$.

Η απεικόνιση f_4 είναι 1-1, και επί, διότι αν x_1, x_2 είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε προφανώς $f_4(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = f_4(x_2)$. Όπως επίσης για κάθε $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f_4(x) = y$.

Η απεικόνιση f_5 είναι 1-1, αλλά όχι επί, διότι αν x_1, x_2 είναι διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί, τότε προφανώς $f_5(x_1) = x_1 + 1 \neq x_2 + 1 = f_5(x_2)$. Όπως επίσης για $y = 0$ δεν υπάρχει $x \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_5(x) = y$.

(ii) Για τις απεικονίσεις $f_5 \circ f_1$ και $f_1 \circ f_5$ έχουμε ότι: $f_5 \circ f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $f_5 \circ f_1(x) = f_5(f_1(x)) = f_1(x) + 1 = x^2 + 1$, ενώ $f_1 \circ f_5 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $f_1 \circ f_5(x) = f_1(f_5(x)) = (f_5(x))^2 = (x + 1)^2$.

Δηλαδή δεν είναι ίσες.

2. Έχουμε ότι $\pi_1^{-1}(r_1) = \pi_1^{-1}(\{r_1\}) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \pi_1((a, b)) = a \in \{r_1\}\} = \{(r_1, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Όμοια, $\pi_1^{-1}(r_2) = \{(r_2, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $f : \pi_1^{-1}(r_1) \longrightarrow \pi_1^{-1}(r_2)$ ως εξής: $f((r_1, b)) = (r_2, b)$.

Προφανώς για κάθε $(r_1, b) \in \pi_1^{-1}(r_1)$ υπάρχει το μοναδικό $(r_2, b) \in \pi_1^{-1}(r_2)$ έτσι ώστε $f((r_1, b)) = (r_2, b)$. Άρα η f είναι απεικόνιση.

Προφανώς f είναι 1-1 και επί.

Παρατήρηση: Προφανώς η f δεν είναι η μοναδική 1-1 και επί απεικόνιση που μπορούμε να ορίσουμε από το σύνολο $\pi_1^{-1}(r_1)$ στο σύνολο $\pi_1^{-1}(r_2)$.

3. (i) Προφανώς, αν $y \in f(X)$, υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $y = f(x)$, αλλά $X \subseteq Y$, συνεπώς $y = f(x) \in f(Y)$.

(ii) Έστω $x \in f^{-1}(\Gamma)$, αυτό σημαίνει ότι $f(x) \in \Gamma$. Αλλά $\Gamma \subseteq \Delta$, δηλαδή $f(x) \in \Delta$ που σημαίνει ότι $x \in f^{-1}(\Delta)$.

(iii) Έστω $x \in X$, τότε $f(x) \in f(X)$. Επομένως από τον ορισμό της αντίστροφης εικόνας υποσυνόλου έχουμε ότι $x \in f^{-1}(f(X))$.

Στην περίπτωση όπου η f είναι 1-1, αν $x \in f^{-1}(f(X))$, έπεται ότι το x είναι το μοναδικό πρότυπο ενός $y = f(x') \in f(X)$, με $x' \in X$, δηλαδή $f(x) = y = f(x')$. Συνεπώς $x = x' \in X$.

(iv) Έστω $y \in f(f^{-1}(\Gamma))$, αυτό σημαίνει ότι $y = f(x)$ με $x \in f^{-1}(\Gamma)$, δηλαδή $y = f(x) \in \Gamma$.

Στην περίπτωση όπου η f είναι επί, αν $y \in \Gamma$, έπεται ότι υπάρχει $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$, δηλαδή $x \in f^{-1}(\Gamma)$, οπότε $y = f(x) \in f(f^{-1}(\Gamma))$.

4. (i) Έστω $y \in f(X \cup Y)$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in X \cup Y$ έτσι ώστε $y = f(x)$. Επειδή το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο X ή στο σύνολο Y , έχουμε ότι η εικόνα του $f(x) = y$ ανήκει στο σύνολο $f(X)$ ή στο σύνολο $f(Y)$, δηλαδή $y \in f(X) \cup f(Y)$.

Αντίστροφα, έστω $y \in f(X) \cup f(Y)$, αυτό σημαίνει ότι το y ανήκει στο σύνολο $f(X)$ ή στο σύνολο $f(Y)$, δηλαδή υπάρχει στοιχείο x που ανήκει στο σύνολο X ή στο σύνολο Y με $y = f(x)$. Άρα $y = f(x) \in f(X \cup Y)$.

(ii) Έστω $x \in f^{-1}(\Gamma \cup \Delta)$, αυτό σημαίνει ότι $f(x) \in \Gamma \cup \Delta$, δηλαδή το $f(x)$ ανήκει στο σύνολο Γ ή στο σύνολο Δ , άρα το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in f^{-1}(\Gamma) \cup f^{-1}(\Delta)$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma)$ ή στο σύνολο $f^{-1}(\Delta)$, δηλαδή το $f(x)$ ανήκει

στο σύνολο Γ ή στο σύνολο Δ , άρα το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma \cup \Delta)$.

(iii) Έστω $y \in f(X \cap Y)$, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x \in X \cap Y$ έτσι ώστε $y = f(x)$. Επειδή το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο X και στο σύνολο Y , έχουμε ότι η εικόνα του $f(x) = y$ ανήκει στο σύνολο $f(X)$ και στο σύνολο $f(Y)$, δηλαδή $y \in f(X) \cap f(Y)$.

Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση f είναι 1-1. Έστω $y \in f(X) \cap f(Y)$, αυτό σημαίνει ότι το y ανήκει στο σύνολο $f(X)$ και στο σύνολο $f(Y)$, δηλαδή υπάρχει στοιχείο x_1 που ανήκει στο σύνολο X και στοιχείο x_2 που ανήκει στο σύνολο Y με $y = f(x_1) = f(x_2)$. Αλλά η f έχει υποτεθεί 1-1. Άρα $x_1 = x_2 \in X \cap Y$ και $y = f(x_1) = f(x_2) \in f(X \cap Y)$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ έχουμε ότι $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y)$. Έστω x_1, x_2 δύο διαφορετικά στοιχεία του συνόλου A , τότε για $X = \{x_1\}$ και $Y = \{x_2\}$ έχουμε ότι $X \cap Y = \emptyset$. Συνεπώς $f(X) \cap f(Y) \subseteq f(X \cap Y) = f(\emptyset) = \emptyset$. Δηλαδή $f(x_1) \neq f(x_2)$, το οποίο σημαίνει ότι η f είναι 1-1.

(iv) Έστω $x \in f^{-1}(\Gamma \cap \Delta)$, αυτό σημαίνει ότι $f(x) \in \Gamma \cap \Delta$, δηλαδή το $f(x)$ ανήκει στο σύνολο Γ και στο σύνολο Δ , άρα το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in f^{-1}(\Gamma) \cap f^{-1}(\Delta)$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma)$ και στο σύνολο $f^{-1}(\Delta)$, δηλαδή το $f(x)$ ανήκει στο σύνολο Γ και στο σύνολο Δ , άρα το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\Gamma \cap \Delta)$.

5. Η άσκηση αυτή αποτελεί γενίκευση της προηγούμενης άσκησης.

Εδώ θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο ερώτημα, τα υπόλοιπα ερωτήματα αποδεικνύονται παρομοίως επικαλούμενοι επιχειρήματα από τα αντίστοιχα ερωτήματα της προηγούμενης άσκησης.

Έστω $x \in f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$, αυτό σημαίνει ότι $f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i$, δηλαδή το $f(x)$ ανήκει σε (τουλάχιστον) ένα από τα σύνολα B_i , άρα υπάρχει $i \in I$ έτσι ώστε το στοιχείο x να ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(B_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$.

Αντίστροφα, έστω $x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$. Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο x ανήκει σε (τουλάχιστον) ένα από τα σύνολα $f^{-1}(B_i)$, δηλαδή υπάρχει $i \in I$ έτσι ώστε το στοιχείο το $f(x)$ να ανήκει στο σύνολο B_i , άρα το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} B_i)$.

6. (i) Υποθέτουμε ότι η σύνθεση των απεικονίσεων $g \circ f$ είναι επί, δηλαδή ότι για κάθε στοιχείο y του πεδίου τιμών της Γ (το οποίο είναι και πεδίο τιμών

της ϱ) υπάρχει $x \in A$, στο πεδίο ορισμού της, έτσι ώστε $\varrho \circ f(x) = y$. Αυτό σημαίνει ότι για το $y \in \Gamma$ υπάρχει το στοιχείο $f(x) \in B$, στο πεδίο ορισμού της ϱ , έτσι ώστε $\varrho(f(x)) = y$, δηλαδή η απεικόνιση ϱ είναι επί.

(ii) Υποθέτουμε ότι η σύνθεση των απεικονίσεων $\varrho \circ f$ είναι 1-1, δηλαδή για $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$, στο πεδίο ορισμού της $\varrho \circ f$ (το οποίο είναι και πεδίο ορισμού της f), έχουμε ότι $\varrho \circ f(x_1) \neq \varrho \circ f(x_2)$. Αυτό σημαίνει ότι, επειδή η ϱ είναι απεικόνιση ότι $f(x_1) \neq f(x_2)$. Δηλαδή η απεικόνιση f είναι 1-1.

7. Έστω η απεικόνιση $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ με $f(x) = x^2$. Αν $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$ και $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$, τότε οι περιορισμοί της f στα σύνολα A και B είναι προφανώς απεικονίσεις 1-1. Αλλά προφανώς η $f|_{A \cup B} = f$ δεν είναι 1-1.

8. (i) Υποθέτουμε ότι η f είναι 1-1 και έστω $\beta \in f(A)$, τότε υπάρχει μοναδικό $\alpha \in A$ έτσι ώστε $f(\alpha) = \beta$, δηλαδή το σύνολο $f^{-1}(\{\beta\})$ είναι μονοσύνολο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(\{\beta\})$ είναι μονοσύνολο για κάθε $\beta \in f(A)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha \in A$ με την ιδιότητα $f(\alpha) = \beta$, δηλαδή η f είναι 1-1.

(ii) Υποθέτουμε ότι η f είναι επί, δηλαδή για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$. Άρα το σύνολο $f^{-1}(\{\beta\})$ είναι μη κενό.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το σύνολο $f^{-1}(\{\beta\})$ είναι μη κενό για κάθε $\beta \in B$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\beta \in B$ υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\alpha \in A$ με $f(\alpha) = \beta$, δηλαδή η f είναι επί.

9. (i) Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση f είναι επί. Από την άσκηση 3_{iv}) (της ίδιας παραγράφου) έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{P}(Y)$ ισχύει $f(f^{-1}(B)) = B$, δηλαδή $\bar{f}(f^{-1}(B)) = B$ για κάθε $B \in \mathcal{P}(Y)$. Άρα $\bar{f} \circ f^{-1} = 1_{\mathcal{P}(Y)}$.

(ii) Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση f είναι 1-1. Από την άσκηση 3_{iii}) (της ίδιας παραγράφου), όπως προηγουμένως αποδεικνύεται ότι η σύνθεση $f^{-1} \circ \bar{f} = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

10. (i) Έστω $f \in S$ με $f(1) = a_f \in A$ και $f(2) = b_f \in B$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi: S \rightarrow A \times B$ ως εξής: $\varphi(f) = (a_f, b_f)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η φ είναι πράγματι απεικόνιση και μάλιστα 1-1 και επί.

Εδώ αποδεικνύουμε ότι η φ είναι 1-1. Έστω $f, g \in S$ με $f \neq g$, τότε για (τουλάχιστον) ένα από τα στοιχεία του πεδίου ορισμού τους θα έχουμε $f(1) = a_f \neq g(1) = a_g$ ή $f(2) = b_f \neq g(2) = b_g$. Δηλαδή $\varphi(f) = (a_f, b_f) \neq (a_g, b_g) = \varphi(g)$.

(ii) Πρόκειται για (μερική) γενίκευση του προηγούμενου ερωτήματος, όπου αντί του συνόλου $\{1, 2\}$ έχουμε το σύνολο $\{1, 2, \dots, \nu\}$, αλλά $A = B$.

Αν $f \in M$ με $f(i) = a_i, i = 1, 2, \dots, \nu$, τότε ορίζουμε $\varphi : M \longrightarrow A^\nu$ ως εξής: $\varphi(f) = (a_1, a_2, \dots, a_\nu)$ και αποδεικνύουμε ότι η φ είναι πράγματι απεικόνιση, 1-1 και επί.

11. Επειδή οι απεικονίσεις f και ρ είναι σταθερές μεν διαφορετικές δε, έχουμε ότι υπάρχουν $b, c \in A$ έτσι ώστε $b \neq c$ με $f(x) = b$ και $\rho(x) = c$ για κάθε $x \in A$, οπότε $\rho \circ f(x) = \rho(f(x)) = \rho(b) = c \neq f(\rho(x)) = f(c) = b$. Άρα οι απεικονίσεις $\rho \circ f$ και $f \circ \rho$ είναι διαφορετικές.
12. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση f είναι σταθερή, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $f(x) = y \in X$. Έστω $g : X \longrightarrow X$ μια τυχαία απεικόνιση, τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $f(g(x)) = y = f(x)$, δηλαδή $f \circ g = f$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε απεικόνιση $g : X \longrightarrow X$ ισχύει $f \circ g = f$. Έστω $x_1, x_2 \in X$, αν $g : X \longrightarrow X$ με $g(x_1) = x_2$, τότε έχουμε $f \circ g(x_1) = f(x_1)$, δηλαδή $f(x_2) = f(x_1)$. Άρα η f είναι σταθερή.
13. Προφανώς για $M = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ η απεικόνιση $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ με $f(n) = n + 1$ εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι 1-1 και επί.
14. (i) Προφανώς για κάθε $x \in X$ ισχύει $f(x) = f(x)$, δηλαδή $x \sim x$ και η σζέση είναι αυτοπαθής.
Επίσης, αν $x \sim y$, δηλαδή $f(x) = f(y)$, έχουμε $f(y) = f(x)$, άρα $y \sim x$ και η σχέση είναι συμμετρική.
Έστω $x \sim y$ και $y \sim z$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x) = f(y) = f(z)$, άρα $x \sim z$ και η σχέση είναι μεταβατική.
Επομένως η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας.
(ii) Έστω $x \in X$ και $y = f(x) \in f(X)$, τότε για την κλάση ισοδυναμίας του x έχουμε $K_x = \{z \in X \mid x \sim z\} = \{z \in X \mid f(z) = f(x) = y\} = f^{-1}(\{y\})$. Δηλαδή οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι τα σύνολα $f^{-1}(\{y\})$ με $y \in f(X)$. Άρα το σύνολο $\{f^{-1}(\{y\}) \mid y \in f(X)\}$ αποτελεί μια διαμέριση του συνόλου X .
15. (i) Επειδή $f(X) \subseteq Y$ ορίζουμε μια απεικόνιση $\rho : Y \longrightarrow X$ ως εξής: Για $y = f(x) \in f(X)$ ορίζουμε $\rho(y) = x$ και για όλα τα $z \in Y \setminus f(X)$ ορίζουμε $\rho(z) = a$, όπου a είναι ένα (τυχαίο) στοιχείο του συνόλου X . Είναι εύκολο να δούμε ότι η ρ είναι πράγματι απεικόνιση, αφού η f έχει υποτεθεί 1-1 και για κάθε $y \in f(X)$ υπάρχει μοναδικό $x \in X$ με $f(x) = y$. Επίσης έχουμε για κάθε $x \in X$ $\rho(f(x)) = x$, δηλαδή $\rho \circ f = 1_X$.

Παρατήρηση: Όπως (ίσως) έχετε ήδη παρατηρήσει αν η απεικόνιση f είναι και επί τότε το σύνολο $Y \setminus f(X)$ είναι το κενό σύνολο και η απεικόνιση ρ είναι η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} .

(ii) Οι απεικονίσεις που αναζητούμε πρέπει να είναι αναγκαστικά η μεν σ 1-1 η δε τ επί (ιδέ άσκηση 6 της (ιδίας) παραγράφου). Έστω $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $\sigma(n) = n + 1$ και $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $\tau(n) = n - 1$ για $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $\tau(0) = 0$. Τότε έχουμε $\tau(\sigma(n)) = \tau(n + 1) = (n + 1) - 1 = n$, δηλαδή $\tau \circ \sigma = 1_{\mathbb{N}}$. Αλλά $\sigma(\tau(0)) = \sigma(0) = 1$, δηλαδή $\sigma \circ \tau \neq 1_{\mathbb{N}}$.

16. (i) Προφανώς αν $f = g$, τότε $h \circ f = h \circ g$ για κάθε απεικόνιση $h : Y \rightarrow W$ για οποιοδήποτε σύνολο W .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $f(x) = y_1 \neq y_2 = g(x)$ τότε για την (μη σταθερή) απεικόνιση $h : Y \rightarrow \{3, 7\}$ με $h(y_1) = 3$, $h(y_2) = 7$ και $h(y) = 3$ για οποιοδήποτε άλλο στοιχείο $y \in Y$ έχουμε $h(f(x)) = h(y_1) = 3$, ενώ $h(g(x)) = h(y_2) = 7$. Δηλαδή $h(f(x)) \neq h(g(x))$, άτοπο. Άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

(ii) Προφανώς αν $f = g$, τότε $f \circ \sigma = g \circ \sigma$ για κάθε απεικόνιση $\sigma : W \rightarrow X$ για οποιοδήποτε σύνολο W .

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in X$ με $f(x) \neq g(x)$ τότε για την (σταθερή) απεικόνιση $\sigma(3) = x$ έχουμε ότι $f(\sigma(3)) = f(x) \neq g(x) = g(\sigma(3))$, άτοπο. Άρα $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παρατήρηση: Όπως παρατηρούμε στο μεν πρώτο ερώτημα σημασία έχει η ύπαρξη μη σταθερής απεικόνισης h , στο δε δεύτερο ερώτημα σημασία έχει η ύπαρξη σταθερής απεικόνισης σ και όχι η φύση των στοιχείων των συνόλων $\{3, 7\}$ και $\{3\}$.

17. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας στο καρτεσιανό γινόμενο $A = A_1 \times A_2$. Εδώ θα αποδείξουμε μόνο την μεταβατική ιδιότητα.

Έστω $(\alpha_1, \alpha_2) R (\beta_1, \beta_2)$ και $(\beta_1, \beta_2) R (\gamma_1, \gamma_2)$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_1 R_1 \beta_1$ και $\alpha_2 R_2 \beta_2$, όπως επίσης $\beta_1 R_1 \gamma_1$ και $\beta_2 R_2 \gamma_2$. Αλλά οι σχέσεις R_1 και R_2 , ως σχέσεις ισοδυναμίας, είναι μεταβατικές. Επομένως $\alpha_1 R_1 \gamma_1$ και $\alpha_2 R_2 \gamma_2$. Δηλαδή $(\alpha_1, \alpha_2) R (\gamma_1, \gamma_2)$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $f : A/R \rightarrow A_1/R_1 \times A_2/R_2$ ως εξής: $f(K_{(\alpha_1, \alpha_2)}) = (K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2})$.

Η f είναι πράγματι απεικόνιση, διότι αν $K_{(\alpha_1, \alpha_2)} = K_{(\beta_1, \beta_2)}$, τότε $(\alpha_1, \alpha_2) R (\beta_1, \beta_2)$, δηλαδή $\alpha_1 R_1 \beta_1$ και $\alpha_2 R_2 \beta_2$. Επομένως $K_{\alpha_1} = K_{\beta_1}$ και $K_{\alpha_2} = K_{\beta_2}$, το οποίο σημαίνει ότι $f(K_{(\alpha_1, \alpha_2)}) = (K_{\alpha_1}, K_{\alpha_2}) = (K_{\beta_1}, K_{\beta_2}) = f(K_{(\beta_1, \beta_2)})$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι f είναι 1-1 και επί.

Παράγραφος 1.5

1. (i) Προφανώς για $\nu = 1$ έχουμε ότι ο αριθμός $8^{1+1} + 9^{2 \cdot 1 - 1} = 64 + 9 = 73$ είναι πολλαπλάσιο του 73.

Υποθέτουμε ότι για $k = \nu$ έχουμε ότι $8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1} = 73 \cdot \lambda$, τότε για $k = \nu + 1$ έχουμε ότι ο αριθμός $8^{(\nu+1)+1} + 9^{2(\nu+1)-1} = 8 \cdot 8^{\nu+1} + 9^2 \cdot 9^{2\nu-1} = 8 \cdot (8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1}) + (81 - 8) \cdot 9^{2\nu-1} = 8 \cdot (73 \cdot \lambda) + 73 \cdot 9^{2\nu-1} = 73 \cdot (8 \cdot \lambda + 9^{2\nu-1})$ είναι πολλαπλάσιο του 73, άρα από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι ο αριθμός $8^{\nu+1} + 9^{2\nu-1}$ είναι πολλαπλάσιο του 73 για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$.

(ii) Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η ισότητα $\sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{\nu} \nu(\nu+1)$.

Προφανώς η $p(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, $\sum_{i=1}^{\mu+1} (-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{\mu} \mu(\mu+1) + (-1)^{\mu+1} (\mu+1)^2 = \frac{1}{2}(-1)^{\mu} \mu(\mu+1) + (-1)^{\mu+1} \mu(\mu+1) + (-1)^{\mu+1} (\mu+1) = \frac{1}{2}(-1)^{\mu+1} \mu(\mu+1) + (-1)^{\mu+1} (\mu+1) = \frac{1}{2}(-1)^{\mu+1} \mu(\mu+1) + \frac{1}{2}(-1)^{\mu+1} (\mu+1) \cdot 2 = \frac{1}{2}(-1)^{\mu+1} (\mu+1)(\mu+2)$. Άρα ισχύει η $p(\mu+1)$ και από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι ισχύει η ισότητα $\sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i i^2 = \frac{1}{2}(-1)^{\nu} \nu(\nu+1)$ για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$.

(iii) Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η ανισότητα $2\nu \leq 2^{\nu}$.

Προφανώς η $p(0)$ και $p(1)$ αληθεύουν.

Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, $2(\mu+1) = 2\mu + 2 \leq 2^{\mu} + 2 \leq 2^{\mu+1}$. Άρα ισχύει η $p(\mu+1)$ και από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι ισχύει η ανισότητα $2\nu \leq 2^{\nu}$ για κάθε φυσικό αριθμό.

(iv) Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η ανισότητα $\sum_{i=1}^{\nu} i! < (\nu+1)!$.

Προφανώς η $p(1)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, $\sum_{i=1}^{\mu+1} i! = \sum_{i=1}^{\mu} i! + (\mu+1) < (\mu+1)! + (\mu+1) < (\mu+2)!$. Άρα ισχύει η $p(\mu+1)$ και από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι ισχύει η ανισότητα $\sum_{i=1}^{\nu} i! < (\nu+1)!$ για κάθε φυσικό αριθμό $\nu \geq 1$.

2. Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η πρόταση: Το πλήθος των υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου με ν το πλήθος στοιχεία είναι ίσον με 2^{ν} .

Προφανώς η $p(0)$ και $p(1)$ αληθεύουν.

Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει, θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{\mu}, a_{\mu+1}\}$, τότε για το σύνολο $B = \{a_1, a_2, \dots, a_{\mu}\}$ ισχύει η $p(\mu)$. Άρα έχει 2^{μ} ο πλήθος υποσυνόλων. Αν C είναι ένα

υποσύνολο του B , τότε αυτό είναι και υποσύνολο του συνόλου A , επιπλέον και το σύνολο $C \cup \{a_\mu\}$ είναι υποσύνολο του A , δηλαδή το σύνολο A έχει τουλάχιστον $2 \cdot 2^\mu$ το πλήθος υποσυνόλων. Αντίστροφα, αν D είναι ένα υποσύνολο του A , τότε είτε περιέχει το στοιχείο $a_{\mu+1}$ ή δεν το περιέχει. Αν δεν το περιέχει είναι ένα από τα 2^μ το πλήθος υποσυνόλων του συνόλου B , αν $a_{\mu+1} \in D$, τότε $D = (D \setminus \{a_{\mu+1}\}) \cup \{a_{\mu+1}\}$, όπου $C = D \setminus \{a_{\mu+1}\}$ είναι υποσύνολο του B . Δηλαδή το σύνολο A έχει το πολύ $2 \cdot 2^\mu$ το πλήθος υποσυνόλων. Τελικά το σύνολο A έχει $2 \cdot 2^\mu = 2^{\mu+1}$ το πλήθος υποσυνόλων και ισχύει η $p(\mu+1)$ και από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι το πλήθος των υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου με ν το πλήθος στοιχεία είναι ίσον με 2^ν για κάθε φυσικό αριθμό ν .

3. Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η πρόταση: Αν $M \subseteq \{1, 2, \dots, \nu\}$ τέτοιο ώστε: $1 \in M$ και για $\lambda \in M$ με $1 \leq \lambda \leq \nu - 1$ έπεται ότι $\lambda + 1 \in M$. Τότε $M = \{1, 2, \dots, \nu\}$.

Προφανώς η $p(2)$ αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει για $\mu \geq 2$ θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, έστω ότι $M \subseteq \{1, 2, \dots, \mu, \mu+1\}$ τέτοιο ώστε: $1 \in M$ και για $\lambda \in M$ με $1 \leq \lambda \leq \mu$ έπεται ότι $\lambda + 1 \in M$. Υποθέτουμε ότι $\mu+1 \notin M$, τότε $M \subseteq \{1, 2, \dots, \mu\}$ και επειδή ισχύει η $p(\mu)$ έχουμε ότι $M = \{1, 2, \dots, \mu\}$, τότε όμως $\mu \in M$ και άρα $\mu+1 \in M$, άτοπο και τελικά $M = \{1, 2, \dots, \mu, \mu+1\}$. Δηλαδή ισχύει η $p(\mu+1)$.

4. (i) Αν τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A και B είναι το κενό σύνολο, τότε η αποδεικταία σχέση ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο.

Υποθέτουμε ότι και τα δύο σύνολα είναι μή κενά. Έστω ότι $p(\nu)$ είναι η πρόταση: Το σύνολο B έχει ν το πλήθος στοιχεία και το σύνολο A έχει πεπερασμένο το πλήθος στοιχεία. Τότε προφανώς η $p(1)$ ισχύει. Πράγματι, αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ και $B = \{b\}$, τότε $A \cup B = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b\}$, οπότε $\sum_{x \in A \cup B} x = a_1 + a_2 + \dots + a_k + b = (\sum_{a \in A} a) + b = \sum_{a \in A} a + \sum_{b \in B} b$. Υποθέτουμε ότι η $p(\mu)$ ισχύει θα δείξουμε ότι ισχύει η $p(\mu+1)$. Πράγματι, αν $B = \{b_1, b_2, \dots, b_\mu, b_{\mu+1}\}$ και $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, τότε για τα σύνολα $\bar{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_\mu\}$ και $\bar{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k, b_{\mu+1}\}$ προφανώς έχουμε ότι $\bar{A} \cup \bar{B} = A \cup B$, και $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, οπότε $\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{x \in \bar{A} \cup \bar{B}} x = \sum_{a \in \bar{A}} a + \sum_{b \in \bar{B}} b = (\sum_{a \in A} a) + b_{\mu+1} + \sum_{b \in \bar{B}} b = \sum_{a \in A} a + \sum_{b \in B} b$. Δηλαδή ισχύει η $p(\mu+1)$ και από την αρχή της επαγωγής έπεται ότι $\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{a \in A} a + \sum_{b \in B} b$ για οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα A και B .

(ii) Έχοντας αποδείξει την σχέση για δύο υποσύνολα (δηλαδή για $\nu = 2$) με επαγωγή στο πλήθος των υποσυνόλων, επειδή $\bigcup_{i=1}^{\nu-1} A_i = (\bigcup_{i=1}^{\nu-1} A_i) \cup$

A_ν , εύκολα μπορεί να αποδειχθεί η ζητούμενη ισότητα.

5. (i) Από την άσκηση 3 της παραγράφου 2 (του ιδίου κεφαλαίου) έχουμε ότι $A \times B = \bigcup_{i=1}^\nu B_i$, όπου $B_i = \{a_i\} \times B$. Οπότε έχουμε $\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^\nu B_i} f(x)$. Από το (ii) της προηγούμενης άσκησης η τελευταία ισότητα συνεχίζεται ως εξής:

$$\sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^\nu B_i} f(x) = \sum_{x \in B_1} f(x) + \sum_{x \in B_2} f(x) + \cdots + \sum_{x \in B_\nu} f(x). \text{ Επειδή όμως κάθε } B_i = \{a_i\} \times B \text{ η τελευταία ισότητα συνεχίζεται ως εξής: } \sum_{x \in A \times B} f(x) = \sum_{x \in \bigcup_{i=1}^\nu B_i} f(x) = \sum_{x \in B_1} f(x) + \sum_{x \in B_2} f(x) + \cdots + \sum_{x \in B_\nu} f(x) = \sum_{b \in B} f(a_1, b) + \sum_{b \in B} f(a_2, b) + \cdots + \sum_{b \in B} f(a_\nu, b).$$

- (ii) Συμμετρικά, όπως στο (i), αποδεικνύεται και η ισότητα αυτή.

Παρατηρήσεις: 1. Επικαλεστήκαμε την άσκηση 3 της παραγράφου 2, η οποία έχει αποδειχθεί χωρίς επαγωγικά επιχειρήματα. Προσπαθήστε να την αποδείξετε επικαλούμενοι την αρχή της επαγωγής.

2. Θα μπορούσε η άσκηση να αποδειχθεί απ' ευθείας κάνοντας χρήση της αρχής της επαγωγής ως προς το πλήθος των στοιχείων του συνόλου A και ως προς το πλήθος των στοιχείων του συνόλου B , προσπαθήστε το !