Κεφάλαιο Τέταρτο

Ευθείες Γραμμές και Επίπεδα

Στο Κεφάλαιο αυτό περιγράφεται ο τρόπος καθορισμού ευθείας γραμμής και επιπέδου στον 3-χώρο και αναφέρονται οι διάφορες μορφές των εξισώσεων που χρησιμοποιούνται για την αναλυτική περιγραφή τους. Επίσης, διατυπώνονται οι εξισώσεις υπολογισμού της απόστασης σημείου από ευθεία, ευθείας από ευθεία και σημείου από επίπεδο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

4-1 Ευθείες Γραμμές

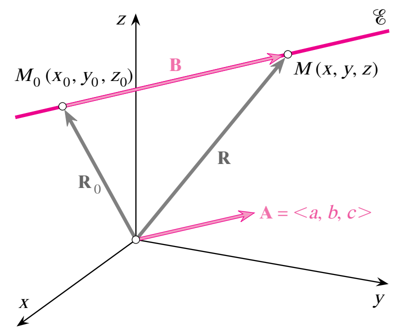
Μια ***ευθεία γραμμή*** $\mathscr{E}$ καθορίζεται πλήρως όταν γνωρίζουμε *ένα σημείο* M_0 της $\mathscr{E}$ και την *κατεύθυνση* αυτής στον χώρο. Στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων, η κατεύθυνση μιας ευθείας καθορίζεται από ένα μη μηδενικό *άνυσμα* **A** παράλληλο προς αυτήν, το οποίο ονομάζεται ***άνυσμα κατεύθυνσης*** της ευθείας.

Ανυσματικη Εξισωση Ευθειας

Θεωρούμε την ευθεία $\mathscr{E}$ που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{A} = <a, b, c>$ (βλ. Σχήμα 4-1). Έστω $M(x, y, z)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας $\mathscr{E}$ και $\mathbf{R}_0$ και **R** τα δύο ανύσματα θέσης των σημείων M_0 και M, αντίστοιχα (δηλαδή, $\mathbf{R}_0 = <x_0, y_0, z_0>$ και $\mathrm{R} = <x, y, z>$). Αν **B** είναι το άνυσμα με αρχή το σημείο M_0 και πέρας το σημείο M, σύμφωνα με τον κανόνα του τριγώνου για πρόσθεση ανυσμάτων [§2-3, Σχήμα 2-5α], το άνυσμα **R** είναι ίσο με το γεωμετρικό άθροισμα των ανυσμάτων $\mathbf{R}_0$ και **B**:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{B} \tag{4-1}$$

Όμως τα ανύσματα **A** και **B** είναι παράλληλα, συνεπώς, υπάρχει ένα μη μηδενικό βαθμωτό μέγεθος λ τέτοιο ώστε να ισχύει η σχέση $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{A}$. Έτσι, η εξίσωση (4-1) γράφεται:



Σχήμα 4-1 *Ευθεία γραμμή $\mathscr{E}$ διερχόμενη από το σημείο M_0 και παράλληλη προς το άνυσμα κατεύθυνσης* **A**.

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \lambda\mathbf{A} \tag{4-2}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται ***ανυσματική εξίσωση*** της ευθείας $\mathscr{E}$. Κάθε τιμή της *παραμέτρου* λ δίνει το άνυσμα θέσης **R** ενός σημείου M της ευθείας $\mathscr{E}$ (και αντίστροφα). Η τιμή $\lambda = 0$ αντιστοιχεί στο σημείο M_0. Θετικές τιμές του λ αντιστοιχούν σε σημεία της ευθείας $\mathscr{E}$ τα οποία βρίσκονται στη μια πλευρά του σημείου M_0 (κατά την κατεύθυνση του ανύσματος **A**), ενώ αρνητικές τιμές του λ αντιστοιχούν σε σημεία της $\mathscr{E}$ τα οποία βρίσκονται στην άλλη πλευρά του M_0 (κατά την κατεύθυνση του ανύσματος – **A**).

Παραμετρικες Εξισωσεις Ευθειας

Αν στην εξίσωση (4-2) αντικαταστήσουμε τα ανύσματα **R**, $\mathbf{R}_0$ και **A** με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους σε μορφή συνιστωσών, προκύπτει η ανυσματική σχέση:

$$<x, y, z> = <x_0, y_0, z_0> + \lambda <a, b, c> \tag{4-3}$$

ή, μετά την εκτέλεση των πράξεων, με βάση τις εξισώσεις (3-54) και (3-52):

$$<x, y, z> = <x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c> \tag{4-4}$$

Όμως σύμφωνα με την εξίσωση (3-49), δύο ανύσματα είναι ίσα όταν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες. Έτσι, από την ισότητα των δύο ανυσμάτων της εξίσωσης (4-4), προκύπτουν οι ακόλουθες βαθμωτές εξισώσεις:

$$x = x_0 + \lambda a \qquad y = y_0 + \lambda b \qquad z = z_0 + \lambda c \tag{4-5}$$

Οι τρεις αυτές σχέσεις ονομάζονται ***παραμετρικές εξισώσεις*** της ευθείας $\mathscr{E}$. Σε κάθε τιμή της παραμέτρου λ αντιστοιχεί ένα σημείο (x, y, z) της ευθείας $\mathscr{E}$ (και αντίστροφα). Οι συντεταγμένες (a, b, c) του ανύσματος $\mathbf{A}$ ονομάζονται ***αριθμοί κατεύθυνσης*** της $\mathscr{E}$. Επειδή κάθε μη μηδενικό άνυσμα παράλληλο προς το $\mathbf{A}$ θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως άνυσμα κατεύθυνσης της $\mathscr{E}$, συμπεραίνουμε ότι κάθε τριάδα πραγματικών αριθμών που είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς a, b και c θα μπορούσε, επίσης, να χρησιμοποιηθεί ως ένα σύνολο αριθμών κατεύθυνσης για την ευθεία $\mathscr{E}$.

Συμμετρικες Εξισωσεις Ευθειας

Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε μαθηματικά την ευθεία $\mathscr{E}$ είναι να απαλείψουμε την παράμετρο λ από τις εξισώσεις (4-5). Αν κανένας από τους αριθμούς a, b ή c είναι μηδέν, μπορούμε να λύσουμε τις εξισώσεις αυτές ως προς λ και κατόπιν να εξισώσουμε τους τρεις λόγους, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{4-6}$$

Οι σχέσεις αυτές ονομάζονται ***συμμετρικές εξισώσεις*** της ευθείας $\mathscr{E}$. Να σημειωθεί ότι οι αριθμοί a, b και c που εμφανίζονται στους παρονομαστές των εξισώσεων (4-6) είναι οι αριθμοί κατεύθυνσης της ευθείας $\mathscr{E}$, δηλαδή συνιστώσες κάποιου ανύσματος το οποίο είναι παράλληλο προς την $\mathscr{E}$. Αν ένας από τους αριθμούς κατεύθυνσης a, b ή c είναι μηδέν, μπορούμε ακόμη να απαλείψουμε την παράμετρο λ από τις εξισώσεις (4-5). Για παράδειγμα, αν ο αριθμός $c = 0$, μπορούμε να γράψουμε τις συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ ως εξής:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}, \qquad z = z_0 \tag{4-7}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $\mathscr{E}$ βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο $z = z_0$.

Επισήμανση: Αν η ευθεία $\mathscr{E}$ διέρχεται από τα σημεία $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και $M_1(x_1, y_1, z_1)$, τότε το άνυσμα $\overrightarrow{M_0M_1}$ μπορεί να θεωρηθεί ως *άνυσμα κατεύθυνσης* για την $\mathscr{E}$ και κατ' επέκταση οι συνιστώσες $(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ του ανύσματος αυτού είναι οι *αριθμοί κατεύθυνσης* της $\mathscr{E}$. Έτσι, οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ που διέρχεται από τα σημεία (x_0, y_0, z_0) και (x_1, y_1, z_1) είναι:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \tag{4-8}$$

Ειδη Ευθειων

Ορθογώνιες Ευθείες: Δύο ευθείες γραμμές $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ λέμε ότι είναι ***ορθογώνιες***, αν το εσωτερικό γινόμενο των αντίστοιχων ανυσμάτων κατεύθυνσης ($\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$) αυτών είναι μηδέν και αντίστροφα. Δηλαδή,

$$\text{Αν } \ \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0 \iff \text{οι ευθείες } \mathscr{E}_1 \text{ και } \mathscr{E}_2 \text{ είναι ορθογώνιες} \tag{4-9}$$

Να σημειωθεί ότι ο παραπάνω ορισμός δεν απαιτεί οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ να τέμνονται προκειμένου να είναι ορθογώνιες. Με άλλα λόγια, η ευθεία $\mathscr{E}_1$ μπορεί να είναι κάθετη στο επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathscr{E}_2$, χωρίς να τέμνει απαραίτητα την $\mathscr{E}_2$.

Παράλληλες Ευθείες: Δύο ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι ***παράλληλες***, αν τα αντίστοιχα ανύσματα κατεύθυνσης ($\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$) αυτών είναι παράλληλα και αντίστροφα. Δηλαδή,

$$\text{Αν}\quad \mathbf{A}_1 = m\mathbf{A}_2,\ \text{για κάποιο}\ m \neq 0 \iff \text{οι ευθείες}\ \mathscr{E}_1\ \text{και}\ \mathscr{E}_2\ \text{είναι παράλληλες} \tag{4-10}$$

Ασύμβατες Ευθείες: Δύο ευθείες γραμμές $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ χαρακτηρίζονται ως ***ασύμβατες*** όταν δεν είναι παράλληλες ούτε τέμνονται (δηλαδή, βρίσκονται σε *διαφορετικά* επίπεδα).

Απόσταση Σημείου από Ευθεία

Θεωρούμε την ευθεία $\mathscr{E}$ που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{A}$ (Σχήμα 4-2). Έστω M ένα τυχαίο σημείο του χώρου εκτός της ευθείας $\mathscr{E}$ και $\mathbf{R}_0$ και $\mathbf{R}$ τα δύο ανύσματα θέσης των σημείων M_0 και M, αντίστοιχα. Η *απόσταση* d του σημείου M από την ευθεία $\mathscr{E}$ είναι:

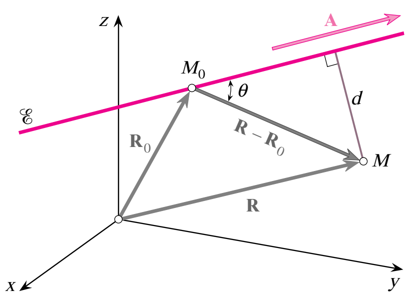
$$d = |\overrightarrow{M_0M}|\sin\theta = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0|\sin\theta \tag{4-11}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των ανυσμάτων $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ και $\mathbf{A}$. Σύμφωνα με την εξίσωση (2-31), το μέτρο το ανύσματος $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{A}$ είναι ίσο με το γινόμενο:

$$|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{A}| = |\mathbf{R} - \mathbf{R}_0||\mathbf{A}|\sin\theta \tag{4-12}$$

Από τον συνδυασμό των εξισώσεων (4-11) και (4-12), προκύπτει η σχέση υπολογισμού της ***απόστασης*** d:

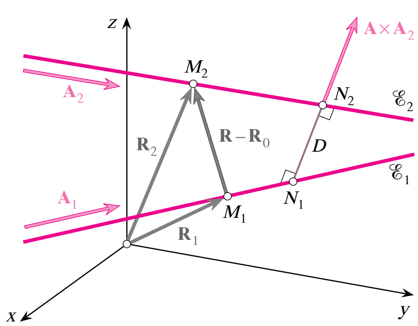
$$d = \frac{|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \times \mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|} \tag{4-13}$$



Σχήμα 4-2 *Απόσταση d του τυχαίου σημείου M του χώρου από την ευθεία $\mathscr{E}$.*

Απόσταση Μεταξύ Δύο Ευθειών

Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες γραμμές $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ (Σχήμα 4-3). Η ευθεία $\mathscr{E}_1$ διέρχεται από το σημείο M_1 και είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{A}_1$ και η ευθεία $\mathscr{E}_2$ διέρχεται από το σημείο M_2 και είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{A}_2$. Έστω $\mathbf{R}_1$ και $\mathbf{R}_2$ τα ανύσματα θέσης των σημείων M_1 και M_2, αντίστοιχα. Ως ***απόσταση*** D μεταξύ των ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ ορίζουμε την *ελάχιστη* απόσταση μεταξύ δύο σημείων, ένα σε κάθε ευθεία. Αν N_1 και N_2 είναι τα πιο κοντινά σημεία των ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$, αντίστοιχα, τότε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος N_1N_2 είναι προφανώς ίσο με την απόσταση D μεταξύ των δύο αυτών γραμμών. Το ευθύγραμμο τμήμα N_1N_2 είναι κάθετο και στις δύο ευθείες, άρα, και στα αντίστοιχα ανύσματα κατεύθυνσης ($\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$) αυτών και, ως εκ τούτου, παράλληλο προς το άνυσμα $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$. Επομένως, η απόσταση D μεταξύ των ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή της *βαθμωτής συνιστώσας* του ανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ κατά την διεύθυνση του ανύσματος $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$, δηλαδή:



Σχήμα 4-3 *Απόσταση D μεταξύ δύο ασύμβατων ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$.*

$$D = \left|(\overrightarrow{M_1 M_2})\cdot \mathbf{e}_{\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2}\right| = \left|(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\cdot \mathbf{e}_{\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2}\right| \tag{4-14}$$

όπου $\mathbf{e}_{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατά την κατεύθυνση του ανύσματος $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4-14) το άνυσμα $\mathbf{e}_{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}$ με την ισοδύναμη έκφρασή του, προκύπτει η σχέση υπολογισμού της *απόστασης* D:

$$D = \frac{\left|(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\cdot(\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2)\right|}{\left|\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2\right|} \tag{4-15}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-1

Σκοπός: Η εύρεση των αναλυτικών εκφράσεων ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο και είναι παράλληλη προς δεδομένο άνυσμα.

Το πρόβλημα: **α.** *Να ευρεθούν: (1) η ανυσματική εξίσωση, (2) οι παραμετρικές και (3) οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας* $\mathscr{E}$ *που διέρχεται από το σημείο* $M_0(-1, 2, 3)$ *και είναι παράλληλη προς το άνυσμα* $\mathbf{A} = <2, 4, -2>$ *(βλ. Σχήμα Π4-1).*
β. *Σε ποιό σημείο η ευθεία* $\mathscr{E}$ *τέμνει το xy-επίπεδο και σε ποιό το xz-επίπεδο;*

Λύση: **α_1** Η γενική μορφή της ανυσματικής εξίσωσης της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \lambda\mathbf{A} \tag{1}$$

Για τη δοθείσα ευθεία, τα ανύσματα $\mathbf{R}_0$ και $\mathbf{A}$ έχουν τις παρακάτω καρτεσιανές εκφράσεις:

$$\mathbf{R}_0 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \tag{2}$$

Λόγω των εκφράσεων αυτών, η ανυσματική εξίσωση (1) γράφεται:

$$\mathbf{R} = (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \lambda(2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \tag{3}$$

ή, μετά την εκτέλεση των πράξεων, με βάση τις εξισώσεις (3-54) και (3-52):

$$\mathbf{R} = (-1 + 2\lambda)\,\mathbf{i} + 2\,(1 + 2\lambda)\,\mathbf{j} + (3 - 2\lambda)\,\mathbf{k} \tag{4}$$

α_2 Η γενική μορφή των παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$x = x_0 + \lambda a \qquad y = y_0 + \lambda b \qquad z = z_0 + \lambda c \tag{5}$$

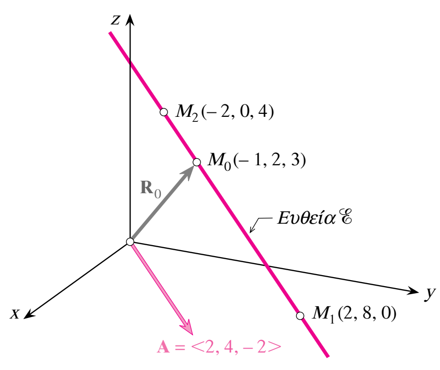
Για την ευθεία $\mathscr{E}$ που διέρχεται από το σημείο ($x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 3$) και έχει αριθμούς κατεύθυνσης $a = 2$, $b = 4$ και $c = -2$, οι εξισώσεις (5) λαμβάνουν τη μορφή:

$$x = -1 + 2\lambda \qquad y = 2 + 4\lambda \qquad z = 3 - 2\lambda \tag{6}$$

α_3 Οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{-2} \tag{7}$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις αντίστοιχες γενικές εξισώσεις (4-6), με αντικατάσταση των γνωστών τιμών των συντεταγμένων (x_0, y_0, z_0) του σημείου M_0 από το οποίο διέρχεται η ευθεία $\mathscr{E}$ και των αριθμών κατεύθυνσης (a, b, c) της $\mathscr{E}$.



Σχήμα Π4-1

β Η ευθεία $\mathscr{E}$ τέμνει το xy-επίπεδο όταν $z = 0$. Θέτοντας την τιμή $z = 0$ στην τρίτη από τις παραμετρικές εξισώσεις (6), προκύπτει η τιμή $\lambda = 3/2$. Για την τιμή αυτή της παραμέτρου λ, οι δύο άλλες παραμετρικές εξισώσεις (6) δίνουν τις τιμές $x = 2$ και $y = 8$. Άρα, η ευθεία $\mathscr{E}$ τέμνει το xy-επίπεδο στο σημείο $M_1\,(2, 8, 0)$. Όμοια, η ευθεία $\mathscr{E}$ τέμνει το xz-επίπεδο όταν $y = 0$. Θέτοντας την τιμή $y = 0$ στη δεύτερη από τις παραμετρικές εξισώσεις (6), προκύπτει η τιμή $\lambda = -1/2$. Για την τιμή αυτή της παραμέτρου λ, οι δύο άλλες παραμετρικές εξισώσεις (6) δίνουν τις τιμές $x = -2$ και $z = 4$. Άρα, η ευθεία $\mathscr{E}$ τέμνει το xz-επίπεδο στο σημείο $M_2\,(-2, 0, 4)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-2

Σκοπός: Η εύρεση των αναλυτικών εκφράσεων ευθείας που διέρχεται από δύο γνωστά σημεία.

Το πρόβλημα: **α.** *Να ευρεθούν: (1) η ανυσματική εξίσωση, (2) οι παραμετρικές και (3) οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ που διέρχεται από τα σημεία $M_1\,(5, 1, 3)$ και $M_2\,(6, 5, 1)$.* **β.** *Να εξεταστεί αν τα σημεία $A\,(4, -3, 5)$ και $B\,(0, 3, 2)$ βρίσκονται επάνω στην ευθεία $\mathscr{E}$.*

Λύση **α_1** Η γενική μορφή της ανυσματικής εξίσωσης της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \lambda\mathbf{A} \qquad (\alpha\text{–}1)$$

Εδώ δε δίνεται με σαφήνεια το άνυσμα **A** προς το οποίο είναι παράλληλη η ευθεία $\mathscr{E}$. Όμως παρατηρούμε ότι το άνυσμα **A** με αρχή το σημείο M_1 και πέρας το σημείο M_2 είναι παράλληλο προς την ευθεία $\mathscr{E}$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα Π4-2, το άνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι ίσο με τη διαφορά $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ των ανυσμάτων θέσης $\mathbf{R}_1 = <5, 1, 3>$ και $\mathbf{R}_2 = <6, 5, 1>$ των σημείων M_1 και M_2, αντίστοιχα, από τα οποία διέρχεται η ευθεία γραμμή $\mathscr{E}$. Δηλαδή,

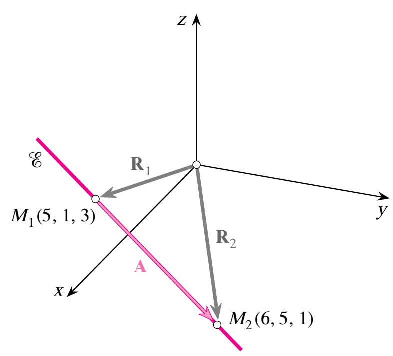
$$\mathbf{A} = \overrightarrow{M_1M_2} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad (\alpha\text{–}2)$$

Προκειμένου να εφαρμόσουμε την ανυσματική εξίσωση (α-1), επιλέγουμε ως σημείο M_0 το σημείο (5, 1, 3), οπότε η εξίσωση αυτή γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{R} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \lambda\,(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \qquad (\alpha\text{–}3)$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων, με βάση τις εξισώσεις (3-54) και (3-52), η ανυσματική εξίσωση (α-3) γράφεται:

$$\mathbf{R} = (5 + \lambda)\,\mathbf{i} + (1 + 4\lambda)\,\mathbf{j} + (3 - 2\lambda)\,\mathbf{k} \qquad (\alpha\text{–}4)$$



Σχήμα Π4-2

α_2 Η γενική μορφή των παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$x = x_0 + \lambda a \qquad y = y_0 + \lambda b \qquad z = z_0 + \lambda c \qquad (\alpha\text{–}5)$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (α-2), οι αριθμοί κατεύθυνσης της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι $a = 1$, $b = 4$ και $c = -2$. Για την εφαρμογή των εξισώσεων (α-5), πρέπει να επιλεγεί και ένα σημείο της $\mathscr{E}$ ως σημείο M_0. Έστω ότι ως σημείο M_0 επιλέγουμε το σημείο (5, 1, 3), τότε οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ θα έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$x = 5 + \lambda \qquad y = 1 + 4\lambda \qquad z = 3 - 2\lambda \qquad (\alpha\text{–}6)$$

α_3 Οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ είναι:

$$\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 3}{-2} \qquad (\alpha\text{-}7)$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τις αντίστοιχες γενικές εξισώσεις (4-6), με αντικατάσταση των γνωστών τιμών των συντεταγμένων (x_0, y_0, z_0) του σημείου M_0 και των αριθμών κατεύθυνσης (a, b, c) της ευθείας $\mathscr{E}$.

Επισήμανση: Αν ως σημείο M_0 επιλέγαμε το σημείο (6, 5, 1), τότε οι ζητούμενες εξισώσεις της ευθείας $\mathscr{E}$ θα είχαν τις ακόλουθες μορφές:

$$\mathbf{R} = (6 + \lambda)\,\mathbf{i} + (5 + 4\lambda)\,\mathbf{j} + (1 - 2\lambda)\,\mathbf{k} \qquad \{\textit{Ανυσματική εξίσωση}\} \qquad (\alpha\text{–}4)^*$$

$$x = 6 + \lambda \qquad y = 5 + 4\lambda \qquad z = 1 - 2\lambda \qquad \{\textit{Παραμετρικές εξισώσεις}\} \qquad (\alpha\text{–}6)^*$$

$$\frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-1}{-2} \qquad \{\textit{Συμμετρικές εξισώσεις}\} \qquad (\alpha\text{–}7)^*$$

β Ένα σημείο (x, y, z) βρίσκεται επάνω σε μια ευθεία, εφόσον οι παραμετρικές εξισώσεις της ικανοποιούνται από τον ίδιο αριθμό λ. Έτσι, το σημείο $A\,(4, -3, 5)$ βρίσκεται επάνω στην ευθεία $\mathscr{E}$ και αυτό, επειδή οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$4 = 5 + \lambda \qquad -3 = 1 + 4\lambda \qquad 5 = 3 - 2\lambda \qquad (\beta\text{-}1)$$

που προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις (α-6), για $x = 4$, $y = -3$ και $z = 5$, ικανοποιούνται και οι τρεις από την τιμή $\lambda = -1$. Αντίθετα, το σημείο Β (0, 3, 2) δε βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\mathscr{E}$ και αυτό, επειδή οι παραμετρικές εξισώσεις:

$$0 = 5 + \lambda \qquad 3 = 1 + 4\lambda \qquad 2 = 3 - 2\lambda \qquad (\beta\text{-}2)$$

που προκύπτουν από τις αντίστοιχες εξισώσεις (α-6), για $x = 0$, $y = 3$ και $z = 2$, δεν ικανοποιούνται από την ίδια τιμή της παραμέτρου λ. Η πρώτη ικανοποιείται για $\lambda = -5$, ενώ οι άλλες δύο ικανοποιούνται για $\lambda = 1/2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-3

Σκοπός: Ο έλεγχος της ορθογωνιότητας δύο ευθειών γνωστών παραμετρικών εξισώσεων.

Το πρόβλημα: *(α) Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ με παραμετρικές εξισώσεις:*

$$\textit{Ευθεία } \mathscr{E}_1: \quad x = -\lambda_1 \qquad y = 1 + \lambda_1 \qquad z = 3 - 2\lambda_1 \qquad (1)$$

$$\textit{Ευθεία } \mathscr{E}_2: \quad x = -3 - 13\lambda_2 \qquad y = -1 - 5\lambda_2 \qquad z = 2 + 4\lambda_2 \qquad (2)$$

είναι ορθογώνιες και (β) να ευρεθεί το σημείο τομής τους (εφόσον διαπιστωθεί ότι τέμνονται).

Λύση: **α** Δύο ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι ορθογώνιες, αν το εσωτερικό γινόμενο των αντίστοιχων ανυσμάτων κατεύθυνσης ($\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$) αυτών είναι μηδέν, [Εξ. (4-9)]:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = 0 \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Οι συντελεστές των παραμέτρων λ_1 και λ_2 στις εξισώσεις (1) και (2) είναι ίσοι με τις συντεταγμένες των αντίστοιχων ανυσμάτων κατεύθυνσης των ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$. Επομένως, οι καρτεσιανές εκφράσεις των ανυσμάτων $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ είναι:

$$\mathbf{A}_1 = -\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{A}_2 = -\,13\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Το εσωτερικό γινόμενο των δύο αυτών ανυσμάτων είναι:

$$\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = (-\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (-\,13\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = (-1)(-13) + (1)(-5) + (-2)(4) = 0 \qquad (\alpha\text{-}3)$$

δηλαδή, ικανοποιείται η συνθήκη (α-1). Άρα, οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι ορθογώνιες.

β Ας υποθέσουμε ότι οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ τέμνονται και το σημείο τομής τους είναι το (x, y, z). Επειδή το θεωρούμενο σημείο ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του πρέπει να ικανοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις τόσο της ευθείας $\mathscr{E}_1$ όσο, και της ευθείας $\mathscr{E}_2$. Δηλαδή, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις:

$$-\lambda_1 = -3 - 13\lambda_2 \qquad 1 + \lambda_1 = -1 - 5\lambda_2 \qquad 3 - 2\lambda_1 = 2 + 4\lambda_2 \tag{β-1}$$

ή, οι ισοδύναμες προς αυτές:

$$\lambda_1 - 13\lambda_2 = 3 \qquad \lambda_1 + 5\lambda_2 = -2 \qquad 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 1 \tag{β-2}$$

Από τη λύση των δύο πρώτων εξισώσεων (β-2), προκύπτουν οι τιμές $\lambda_1 = -11/18$ και $\lambda_2 = -5/18$, οι οποίες όμως δεν ικανοποιούν την τρίτη εξίσωση. Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων λ_1 και λ_2 οι οποίες να ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις (β-2). Άρα, οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ δεν τέμνονται και, ως εκ τούτου, βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα (κάθετα μεταξύ τους).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-4

Σκοπός: Ο έλεγχος της ασυμβατότητας δύο ευθειών γνωστών παραμετρικών εξισώσεων.

Το πρόβλημα: *Οι παραμετρικές εξισώσεις δύο ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι:*

$$\textit{Ευθεία } \mathscr{E}_1: \quad x = 4 + \lambda_1 \qquad y = 8 - 2\lambda_1 \qquad z = 10 - 4\lambda_1 \tag{1}$$

$$\textit{Ευθεία } \mathscr{E}_2: \quad x = -3 + \lambda_2 \qquad y = 7 + 3\lambda_2 \qquad z = 5 + 2\lambda_2 \tag{2}$$

Να αποδειχθεί ότι οι δύο αυτές ευθείες γραμμές είναι ασύμβατες.

Λύση: Για να είναι δύο ευθείες $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$ ασύμβατες πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις: (α) να μην είναι παράλληλες και (β) να μην τέμνονται. Η πρώτη προϋπόθεση ικανοποιείται όταν ισχύει η ανυσματική εξίσωση (4-9);

$$\mathbf{A}_1 = m\mathbf{A}_2 \tag{α-1}$$

όπου $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ είναι τα ανύσματα κατεύθυνσης των ευθειών $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$, αντίστοιχα, και m κάποιο βαθμωτό μέγεθος. Οι συντελεστές των παραμέτρων λ_1 και λ_2 στις εξισώσεις (1) και (2) είναι ίσοι με τις συντεταγμένες των αντίστοιχων ανυσμάτων κατεύθυνσης των ευθειών $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$. Επομένως, οι καρτεσιανές εκφράσεις των ανυσμάτων $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ είναι:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{A}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \tag{α-2}$$

Παρατηρούμε ότι αντίστοιχες συνιστώσες των ανυσμάτων $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ δεν είναι ανάλογες, συνεπώς, δεν ικανοποιείται η συνθήκη (α-1). Άρα, οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$ δεν είναι παράλληλες.

Ας δούμε τώρα αν ικανοποιείται η δεύτερη προϋπόθεση (οι ευθείες να μην τέμνονται). Έστω ότι η απαίτηση αυτή δεν ικανοποιείται και οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$ τέμνονται στο σημείο (x, y, z). Επειδή το σημείο αυτό ανήκει και στις δύο ευθείες, οι συντεταγμένες του πρέπει να ικανοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις τόσο της ευθείας $\mathscr{E}_1$, όσο και της ευθείας $\mathscr{E}_2$. Δηλαδή, πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις:

$$4 + \lambda_1 = -3 + \lambda_2 \qquad 8 - 2\lambda_1 = 7 + 3\lambda_2 \qquad 10 - 4\lambda_1 = 5 + 2\lambda_2 \tag{β-1}$$

ή, οι ισοδύναμες προς αυτές σχέσεις:

$$\lambda_1 - \lambda_2 = -7 \qquad 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 1 \qquad 4\lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \tag{β-2}$$

Από τη λύση των δύο πρώτων εξισώσεων (β-2), προκύπτουν οι τιμές $\lambda_1 = -4$ και $\lambda_2 = 3$, οι οποίες όμως δεν ικανοποιούν την τρίτη εξίσωση. Επομένως, δεν υπάρχουν τιμές των παραμέτρων λ_1 και λ_2 οι οποίες να ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις (β-2). Άρα, οι ευθείες $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$ δεν τέμνονται.

Συμπερασματικά, οι δοθείσες ευθείες $\mathscr{E}_1$ *και* $\mathscr{E}_2$ δεν είναι παράλληλες ούτε τέμνονται, συνεπώς, είναι ασύμβατες και, ως τέτοιες, βρίσκονται σε διαφορετικά επίπεδα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-5

Σκοπός: Η εύρεση της απόστασης σημείου από ευθεία.

Το πρόβλημα: *Να ευρεθεί η απόσταση του σημείου Μ (3, 0, 7) από την ευθεία γραμμή $\mathscr{E}$, της οποίας οι παραμετρικές εξισώσεις είναι:*

$$x = 2 + 2\lambda \qquad y = -1 + 6\lambda \qquad z = 5 - 3\lambda \tag{1}$$

Λύση: Η απόσταση d του σημείου M (με άνυσμα θέσης $\mathbf{R}$) από την ευθεία $\mathscr{E}$ που διέρχεται από το σημείο M_0 (με άνυσμα θέσης $\mathbf{R}_0$) και είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{A}$ (βλ. Σχήμα 4-2) υπολογίζεται από την εξίσωση (4-13):

$$d = \frac{|(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\times\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|} \tag{2}$$

Από τη σύγκριση των παραμετρικών εξισώσεων (4-5) και (1), προκύπτει ότι η ευθεία $\mathscr{E}$ διέρχεται από το σημείο (2, – 1, 5) και έχει αριθμούς κατεύθυνσης $a = 2$, $b = 6$ και $c = -3$. Επομένως, οι καρτεσιανές εκφράσεις των ανυσμάτων $\mathbf{R}_0$ και $\mathbf{A}$ είναι:

$$\mathbf{R}_0 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \tag{3}$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση των εκφράσεων της διαφοράς $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$:

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = (3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \tag{4}$$

και του εξωτερικού γινομένου των ανυσμάτων $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ και $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\times\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-3-12) - \mathbf{j}(-3-4) + \mathbf{k}(6-2) = -15\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις γνωστές εκφράσεις των δύο ανυσμάτων $\mathbf{A}$ και $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\times\mathbf{A}$ στην εξίσωση (2), προκύπτει:

$$d = \frac{|-15\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 4\mathbf{k}|}{|2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + (7)^2 + (4)^2}}{\sqrt{(2)^2 + (6)^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{290}}{7} = 2{,}43 \tag{6}$$

Άρα, η απόσταση του σημείου (3, 0, 7) από τη δοθείσα ευθεία $\mathscr{E}$ είναι 2,43 (μονάδες μήκους).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-6

Σκοπός: Η εύρεση της απόστασης μεταξύ δύο ευθειών.

Το πρόβλημα: *Θεωρούμε δύο ευθείες $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$. Η ευθεία $\mathscr{E}_1$ διέρχεται από τα σημεία Α (1, 1, 7) και Β (2, – 1, 5) και η ευθεία $\mathscr{E}_2$ από τα σημεία Γ (5, – 2, 3) και Δ (– 3, 4, – 1). Να ευρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο αυτών ευθειών.*

Λύση: Η απόσταση D μεταξύ δύο ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ που διέρχονται από τα σημεία M_1 (με άνυσμα θέσης $\mathbf{R}_1$) και M_2 (με άνυσμα θέσης $\mathbf{R}_2$) και είναι παράλληλες προς τα ανύσματα $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$, αντίστοιχα, υπολογίζεται από την εξίσωση (4-15):

$$D = \frac{|(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)\cdot(\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2)|}{|\mathbf{A}_1\times\mathbf{A}_2|} \tag{1}$$

Αν επιλέξουμε ως σημεία M_1 και M_2 τα σημεία $A(1, 1, 7)$ και $\Gamma(5, -2, 3)$, αντίστοιχα, τότε η καρτεσιανή έκφραση της ανυσματικής διαφοράς $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ είναι:

$$\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 = (5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \tag{2}$$

Επειδή εδώ τα ανύσματα $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ δε δίνονται με σαφήνεια, θεωρούμε ως ανύσματα κατεύθυνσης των ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ τα ανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, αντίστοιχα, τα οποία είναι προφανώς παράλληλα προς τις δύο αυτές ευθείες. Δηλαδή,

$$\mathbf{A}_1 = \overrightarrow{AB} = (2 - 1)\,\mathbf{i} + (-1 - 1)\,\mathbf{j} + (5 - 7)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_2 = \overrightarrow{\Gamma\Delta} = (-3 - 5)\,\mathbf{i} + (4 + 2)\,\mathbf{j} + (-1 - 3)\,\mathbf{k} = -8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k} \tag{4}$$

Επομένως, το εξωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων $\mathbf{A}_1$ και $\mathbf{A}_2$ είναι:

$$\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ -8 & 6 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\,(8 + 12) - \mathbf{j}\,(-4 - 16) + \mathbf{k}\,(6 - 16) = 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k} \tag{5}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις γνωστές καρτεσιανές εκφράσεις των δύο ανυσμάτων $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ και $\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ στην εξίσωση (1), προκύπτει:

$$D = \frac{|(4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\cdot(20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k})|}{|20\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 10\mathbf{k}|} = \frac{|(4)(20) + (-3)(20) + (-3)(-10)|}{\sqrt{(20)^2 + (20)^2 + (-10)^2}} = \frac{60}{30} = 2 \tag{6}$$

Άρα, η απόσταση μεταξύ των δύο δοθεισών ευθειών $\mathscr{E}_1$ και $\mathscr{E}_2$ είναι 2 (μονάδες μήκους).

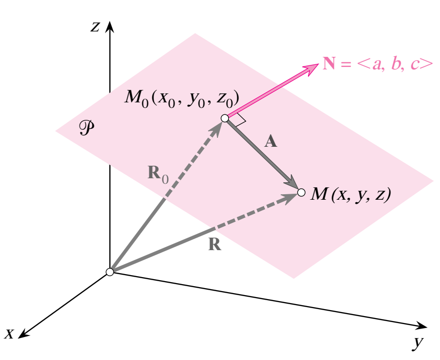
4-2 Επίπεδα

Στον Ευκλείδειο χώρο των τριών διαστάσεων, ένα ***επίπεδο*** $\mathscr{P}$ καθορίζεται πλήρως όταν γνωρίζουμε ένα σημείο του και ένα, μη μηδενικό άνυσμα, ορθογώνιο ως προς το επίπεδο $\mathscr{P}$. Το άνυσμα αυτό ονομάζεται ***κάθετο άνυσμα*** και θα παριστάνεται με το σύμβολο **N**.

Ανυσματική Εξίσωση Επιπέδου

Θεωρούμε το επίπεδο $\mathscr{P}$ το οποίο διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{N} = <a, b, c>$ (βλ. Σχήμα 4-4). Έστω $M(x, y, z)$ ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου $\mathscr{P}$ και $\mathbf{R}_0$ και $\mathbf{R}$ τα δύο ανύσματα θέσης των σημείων M_0 και M, αντίστοιχα (δηλαδή, $\mathbf{R}_0 = <x_0, y_0, z_0>$ και $\mathbf{R} = <x, y, z>$). Αν **A** είναι το άνυσμα με αρχή το σημείο M_0 και πέρας το σημείο M, σύμφωνα με τον κανόνα του τριγώνου για αφαίρεση ανυσμάτων [§2-3, Σχήμα 2-6β], το άνυσμα **A** είναι ίσο με τη γεωμετρική διαφορά των ανυσμάτων **R** και $\mathbf{R}_0$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0 \tag{4-16}$$



Σχήμα 4-4 *Επίπεδο $\mathscr{P}$ το οποίο διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι κάθετο στο άνυσμα* **N**.

Το κάθετο άνυσμα **N** είναι ορθογώνιο ως προς κάθε άνυσμα του επιπέδου $\mathscr{P}$, συνεπώς, και ως προς το άνυσμα **A**. Άρα, σύμφωνα με τη συνθήκη (2-21), το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων **N** και **A** είναι μηδέν. Δηλαδή, ισχύει η σχέση:

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) = 0 \tag{4-17}$$

Η τελευταία σχέση ονομάζεται ***ανυσματική εξίσωση*** του επιπέδου $\mathscr{P}$.

Βαθμωτη Εξισωση Επιπεδου

Αν στην εξίσωση (4-17) αντικαταστήσουμε το κάθετο άνυσμα **N** και τα ανύσματα θέσης $\mathbf{R}_0$ και **R** με τις αντίστοιχες εκφράσεις τους σε μορφή συνιστωσών, προκύπτει η σχέση:

$$<a,\ b,\ c> \cdot <x - x_0\ ,\ y - y_0\ ,\ z - z_0> = 0 \tag{4-18}$$

ή, μετά την εκτέλεση του εσωτερικού γινομένου:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \tag{4-19}$$

Η σχέση αυτή ονομάζεται *καρτεσιανή* ή ***βαθμωτή εξίσωση*** του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$ και είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{N} = <a,\ b,\ c>$. Η βαθμωτή εξίσωση (4-19) μπορεί να γραφεί πιο απλά, ως εξής:

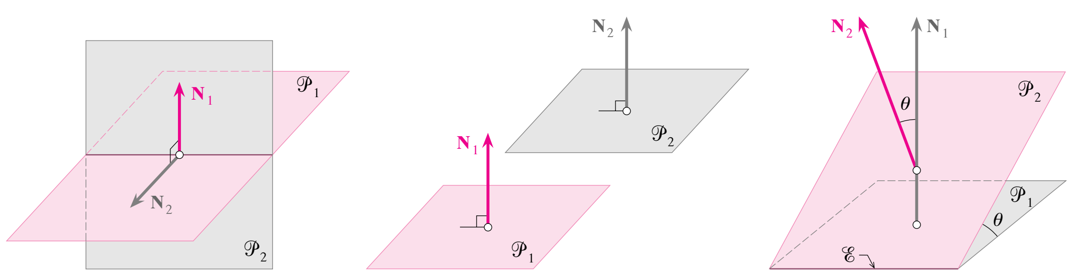
$$ax + by + cz + d = 0 \tag{4-20}$$

όπου ο όρος $d = -\,(ax_0 + by_0 + cz_0)$. Αν ένας τουλάχιστον από τους τρεις συντελεστές a, b και c δεν είναι μηδέν, τότε η *γραμμική εξίσωση* (4-20) παριστάνει πάντα ένα επίπεδο $\mathscr{P}$ στον 3-χώρο, το οποίο είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{N} = <a,\ b,\ c>$. Να σημειωθεί ότι *οι συντελεστές των x, y, z στην εξίσωση αυτή, είναι οι συνιστώσες του κάθετου ανύσματος* **N**. Αν ο σταθερός όρος $d = 0$, τότε το επίπεδο $\mathscr{P}$ πρέπει να διέρχεται από την αρχή των καρτεσιανών αξόνων.

Ειδη Επιπεδων

Ορθογώνια Επίπεδα: Δύο επίπεδα $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ λέμε ότι είναι ***ορθογώνια*** (Σχήμα 4-5α), αν το εσωτερικό γινόμενο των κάθετων ανυσμάτων τους ($\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$) είναι μηδέν (και αντίστροφα). Δηλαδή,

$$\text{Αν}\quad \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = 0 \iff \textit{τα επίπεδα } \mathscr{P}_1 \textit{ και } \mathscr{P}_2 \textit{ είναι ορθογώνια} \tag{4-21}$$



(α) (β) (γ)

Σχήμα 4-5 *(α) Ορθογώνια, (β) παράλληλα και (γ) τεμνόμενα επίπεδα υπό γωνία θ.*

Παράλληλα Επίπεδα: Δύο επίπεδα $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι ***παράλληλα*** (Σχήμα 4-5β), αν τα κάθετα ανύσματά τους ($\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$) είναι παράλληλα (και αντίστροφα). Δηλαδή,

$$\textit{Αν}\ \ \mathbf{N}_1 = m\mathbf{N}_2\,,\ \textit{για κάποιο}\ m \neq 0 \iff \textit{τα επίπεδα}\ \mathscr{P}_1\ \textit{και}\ \mathscr{P}_2\ \textit{είναι παράλληλα} \tag{4-22}$$

Τεμνόμενα Επίπεδα: Αν δύο επίπεδα δεν είναι παράλληλα, τότε τέμνονται κατά μήκος μιας ευθείας γραμμής $\mathscr{E}$ (Σχήμα 4-5γ). Απαραίτητη προϋπόθεση για να τέμνονται δύο επίπεδα $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι το άνυσμα $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ του εξωτερικού γινομένου των κάθετων ανυσμάτων τους να είναι μη μηδενικό (και αντίστροφα). Δηλαδή,

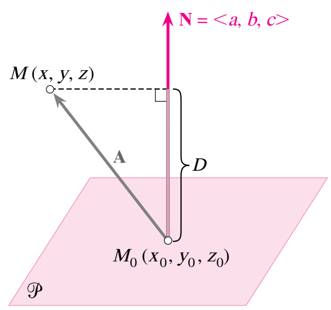
$$\textit{Αν}\ \ \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 \neq \mathbf{0} \iff \textit{τα επίπεδα}\ \mathscr{P}_1\ \textit{και}\ \mathscr{P}_2\ \textit{τέμνονται} \tag{4-23}$$

Η *γραμμή τομής* $\mathscr{E}$ των δύο επιπέδων $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι κάθετη σε καθένα από τα δύο ορθογώνια ανύσματα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$, συνεπώς, είναι παράλληλη προς το άνυσμα $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$. Η (οξεία) γωνία θ μεταξύ των κάθετων ανυσμάτων $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ ορίζεται ως η *γωνία μεταξύ των δύο επιπέδων* $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$.

Απόσταση Σημείου από Επίπεδο

Θεωρούμε το επίπεδο $\mathscr{P}$ που διέρχεται από το σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{N} = \langle a, b, c\rangle$ (Σχήμα 4-6). Έστω $M(x, y, z)$ ένα τυχαίο σημείο του χώρου εκτός του επιπέδου $\mathscr{P}$ και $\mathbf{A}$ το άνυσμα με αρχή το σημείο M_0 και πέρας το σημείο M. Τότε, η καρτεσιανή έκφραση του ανύσματος $\mathbf{A}$ είναι:

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{M_0M} = \langle x - x_0\ ,\ y - y_0\ ,\ z - z_0\rangle \tag{4-24}$$



Σχήμα 4-6 *Απόσταση D του σημείου M από το επίπεδο $\mathscr{P}$.*

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4-6, η *απόσταση* D του σημείου M από το επίπεδο $\mathscr{P}$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή της *βαθμωτής συνιστώσας* A_N του ανύσματος $\mathbf{A}$ κατά την διεύθυνση του ανύσματος $\mathbf{N}$. Έτσι, αν $\mathbf{e_N}$ είναι το μοναδιαίο άνυσμα κατα την κατεύθυνση του $\mathbf{N}$, η ***απόσταση*** D δίνεται από τη σχέση:

$$D = |A_N| = |\mathbf{A}\cdot\mathbf{e_N}| = \left|\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}\right)\right| = \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|} \tag{4-25}$$

Το εσωτερικό γινόμενο των ανυσμάτων $\mathbf{N}$ και $\mathbf{A}$ είναι:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) \tag{4-26}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί και με την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} = (ax + by + cz + d) - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) \tag{4-27}$$

Επειδή το σημείο M_0 βρίσκεται στο επίπεδο $\mathscr{P}$, οι συντεταγμένες του (x_0, y_0, z_0) πρέπει να ικανοποιούν τη βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου $\mathscr{P}$, [Εξ. (4-20], οπότε η τελευταία εξίσωση απλοποιείται στη σχέση:

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{A} = ax + by + cz + d \tag{4-28}$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές εκφράσεις του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{N}\cdot\mathbf{A}$ και του ανύσματος $\mathbf{N}$ στην εξίσωση (4-25), προκύπτει η σχέση:

$$D = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4-29}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-7

Σκοπός: Η εύρεση της εξίσωσης ενός επιπέδου που διέρχεται από δεδομένο σημείο και είναι κάθετο σε συγκεκριμένο άνυσμα.

Το πρόβλημα: **α.** *Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου* $\mathscr{P}$ *που διέρχεται από το σημείο* $M_0(2, -4, 5)$ *και είναι κάθετο στην ευθεία* $\mathscr{E}$ *της οποίας δύο σημεία είναι τα* $A\,(4, -1, -8)$ *και* $B\,(6, 2, -4)$.
β. *Να ευρεθούν τα σημεία τομής του επιπέδου* $\mathscr{P}$ *με τους τρεις καρτεσιανούς άξονες.*

Λύση: **α** Η βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου $\mathscr{P}$ που διέρχεται από το σημείο $M_0\,(x_0,\, y_0,\, z_0)$ και είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{N} = \langle a, b, c \rangle$ έχει τη γενική μορφή (4-19):

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, δίνονται οι συντεταγμένες $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ του σημείου M_0, αλλά δε δίνεται με σαφήνεια το άνυσμα $\mathbf{N}$ το κάθετο στο επίπεδο $\mathscr{P}$. Όμως, επειδή η ευθεία $\mathscr{E}$ είναι κάθετη στο επίπεδο $\mathscr{P}$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως άνυσμα $\mathbf{N}$ το άνυσμα $\overrightarrow{AB}$, το οποίο είναι παράλληλο προς την ευθεία $\mathscr{E}$. Δηλαδή,

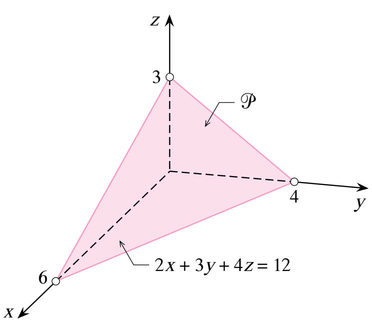
$$\mathbf{N} = \overrightarrow{AB} = (6 - 4)\,\mathbf{i} + (2 + 1)\,\mathbf{j} + (-4 + 8)\,\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k} \qquad (\alpha\text{–}2)$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της εξίσωσης του επιπέδου $\mathscr{P}$, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (α-1) τις τιμές $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = -4$ και $z_0 = 5$:

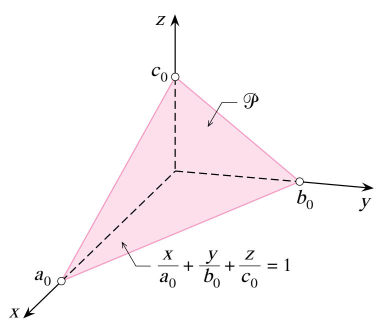
$$2\,(x - 2) + 3\,(y + 4) + 4\,(z - 5) = 0 \quad \text{ή} \quad 2x + 3y + 4z = 12 \qquad (\alpha\text{–}3)$$

β Για να βρούμε το σημείο τομής του επιπέδου $\mathscr{P}$ με τον x-άξονα, θέτουμε στην εξίσωση (α-3) τις τιμές $y = 0$ και $z = 0$, οπότε προκύπτει η τιμή $x = 6$ (δηλαδή, το ζητούμενο σημείο είναι το (6, 0, 0).

Όμοια, βρίσκουμε ότι το επίπεδο $\mathscr{P}$ τέμνει τον y-άξονα στο σημείο (0, 4, 0) και τον z-άξονα στο σημείο (0, 0, 3). Στο Σχήμα Π4-7α φαίνεται το τμήμα του επιπέδου $\mathscr{P}$ που βρίσκεται στο πρώτο οκτημόριο του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων.



Σχήμα Π4-7α



Σχήμα Π4-7β

Επισήμανση: Η βαθμωτή εξίσωση (α-3) του επιπέδου $\mathscr{P}$ μπορεί να γραφεί και υπό τη μορφή:

$$x/a_0 + y/b_0 + z/c_0 = 1 \qquad (\alpha\text{–}4)$$

όπου $a_0 = 6$, $b_0 = 4$ και $c_0 = 3$. Δηλαδή, η εξίσωση (α-4) παριστάνει ένα επίπεδο το οποίο τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(a_0,\, 0,\, 0)$, τον y-άξονα στο σημείο $(0,\, b_0,\, 0)$ και τον z-άξονα στο σημείο $(0,\, 0,\, c_0)$. Στο Σχήμα Π4-7β φαίνεται το τμήμα του επιπέδου αυτού που βρίσκεται στο πρώτο οκτημόριο του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-8

Σκοπός: Η εύρεση του σημείου τομής ευθείας και επιπέδου γνωστών εξισώσεων.

Το πρόβλημα: *Να ευρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου $\mathcal{P}$ με καρτεσιανή εξίσωση:*

$$2x - 3y + 2z + 6 = 0 \tag{1}$$

και της ευθείας $\mathcal{E}$ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = 1 + 2\lambda \qquad y = 2 - \lambda \qquad z = -3\lambda \tag{2}$$

Λύση: Έστω ότι η ευθείας $\mathcal{E}$ τέμνει το επίπεδο $\mathcal{P}$ στο σημείο $M(x_M, y_M, z_M)$, τότε οι συντεταγμένες του πρέπει να ικανοποιούν τόσο την εξίσωση του επιπέδου, [Εξ. (1)]:

$$2x_M - 3y_M + 2z_M + 6 = 0 \tag{3}$$

όσο και τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας, [Εξ. (2)], για κάποια τιμή λ_M της παραμέτρου λ:

$$x_M = 1 + 2\lambda_M \qquad y_M = 2 - \lambda_M \qquad z_M = -3\lambda_M \tag{4}$$

Αντικαθιστώντας τις γνωστές εκφράσεις των x_M, y_M και z_M στην εξίσωση (3), προκύπτει:

$$2(1 + 2\lambda_M) - 3(2 - \lambda_M) + 2(-3\lambda_M) + 6 = 0 \qquad \text{ή} \qquad \lambda_M = -2 \tag{5}$$

Επομένως, το σημείο τομής M αντιστοιχεί στην τιμή $\lambda = -2$. Για την τιμή αυτή του λ, οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας, [Εξ. (2)], δίνουν τις τιμές $x = -3$, $y = 4$ και $z = 6$. Άρα, η ευθεία $\mathcal{E}$ τέμνει το επίπεδο $\mathcal{P}$ στο σημείο $M(-3, 4, 6)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-9

Σκοπός: Η εύρεση της εξίσωσης ενός επιπέδου που διέρχεται από τρία γνωστά σημεία.

Το πρόβλημα: *Να ευρεθεί η βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που διέρχεται από τα σημεία $A(2\ 0, 2)$, $B(1, 2, 0)$ και $\Gamma(0, 2, 3)$.*

Λύση: Για την εύρεση της βαθμωτής εξίσωσης ενός επιπέδου $\mathcal{P}$, [Εξ. (4-19)]:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{1}$$

πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ από το οποίο να διέρχεται το επίπεδο $\mathcal{P}$ και ένα άνυσμα $\mathbf{N} = <a, b, c>$ κάθετο σε αυτό. Εδώ ως σημείο M_0 μπορούμε να επιλέξουμε ένα από τα τρία δοθέντα σημεία του επιπέδου (το οποιοδήποτε). Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο A. Έτσι, εκείνο που απομένει να βρούμε είναι ένα μη μηδενικό άνυσμα κάθετο στο επίπεδο $\mathcal{P}$. Ένα τέτοιο άνυσμα είναι αυτό του εξωτερικού γινομένου των ανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$, οι καρτεσιανές εκφράσεις των οποίων είναι:

$$\overrightarrow{AB} = (1 - 2)\,\mathbf{i} + (2 - 0)\,\mathbf{j} + (0 - 2)\,\mathbf{k} = -\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} = (0 - 2)\,\mathbf{i} + (2 - 0)\,\mathbf{j} + (3 - 2)\,\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{3}$$

Επομένως, ως άνυσμα $\mathbf{N}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνυσμα $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma}$, δηλαδή:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A\Gamma} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 4)\,\mathbf{i} - (-1 - 4)\,\mathbf{j} + (-2 + 4)\,\mathbf{k} = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \tag{4}$$

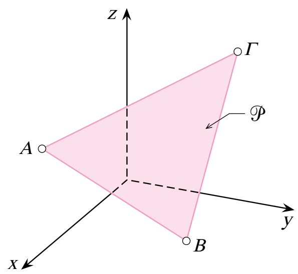
Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της καρτεσιανής εξίσωσης του επιπέδου $\mathcal{P}$, αντικαθιστώντας τις τιμές $a = 6$, $b = 5$, $c = 2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$ και $z_0 = 2$ στην εξίσωση (1):

$$6\,(x - 2) + 5\,(y - 0) + 2\,(z - 2) = 0 \tag{5}$$

ή, μετά την εκτέλεση των πράξεων:

$$6x + 5y + 2z = 16 \tag{6}$$

Στο Σχήμα Π4-9 φαίνεται το τμήμα του επιπέδου $\mathcal{P}$ που ορίζεται από τις ευθείες που συνδέουν τα σημεία A, B και Γ.



Σχήμα Π4-9

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-10

Σκοπός: Η εύρεση της εξίσωσης ενός επιπέδου που περιέχει δεδομένη ευθεία και είναι κάθετο σε άλλο γνωστό επίπεδο.

Το πρόβλημα: *Να ευρεθεί η βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}_1$ το οποίο περιέχει την ευθεία γραμμή $\mathcal{E}$ με παραμετρικές εξισώσεις:*

$$x = 1 + \lambda \qquad y = 1 \qquad z = -1 + \lambda \tag{1}$$

και είναι κάθετο στο επίπεδο $\mathcal{P}_2$ με καρτεσιανή εξίσωση:

$$3x - y + z = 7 \tag{2}$$

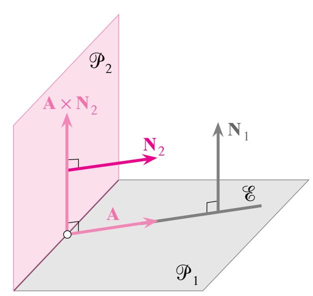
Λύση: Για να βρούμε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}_1$, [Εξ. (4-19)]:

$$a\,(x - x_0) + b\,(y - y_0) + c\,(z - z_0) = 0 \tag{3}$$

πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημείο του $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ και ένα άνυσμα $\mathbf{N}_1 = \langle a, b, c\rangle$ κάθετο σε αυτό. Ως σημείο M_0 μπορούμε να επιλέξουμε το οποιοδήποτε σημείο της ευθείας $\mathcal{E}$, δεδομένου ότι αυτή βρίσκεται στο επίπεδο $\mathcal{P}_1$. Έστω ότι επιλέγουμε το σημείο (1, 1, –1), το οποίο αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $\lambda = 0$. Έτσι, εκείνο που απομένει να βρούμε είναι ένα μη μηδενικό άνυσμα κάθετο στο επίπεδο $\mathcal{P}_1$, το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε ως άνυσμα $\mathbf{N}_1$. Για τον σκοπό αυτό, βρίσκουμε πρώτα το άνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{A}$ της ευθείας $\mathcal{E}$ και το κάθετο άνυσμα $\mathbf{N}_2$ του επιπέδου $\mathcal{P}_2$ (βλ. Σχήμα Π4-10). Ως γνωστόν, οι συνιστώσες του ανύσματος κατεύθυνσης μιας ευθείας είναι οι συντελεστές του λ στις παραμετρικές εξισώσεις της και οι συνιστώσες του κάθετου ανύσματος ενός επιπέδου είναι οι συντελεστές των x, y, z στη βαθμωτή εξίσωση αυτού. Δηλαδή,

$$\mathbf{A} = \langle 1, 0, 1\rangle \qquad \text{και} \qquad \mathbf{N}_2 = \langle 3, -1, 1\rangle \tag{4}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου δύο ανυσμάτων (§2-6), το άνυσμα $\mathbf{A}\times\mathbf{N}_2$ είναι ορθογώνιο και ως προς τα δύο ανύσματα $\mathbf{A}$ και $\mathbf{N}_2$, συνεπώς, είναι κάθετο στο επίπεδο $\mathcal{P}_1$. Έτσι, ως κάθετο άνυσμα $\mathbf{N}_1$ του επιπέδου $\mathcal{P}_1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνυσμα $\mathbf{A}\times\mathbf{N}_2$, η καρτεσιανή έκφραση του οποίου βρίσκεται με βάση την εξίσωση (3-64):



Σχήμα Π4-10

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}\times\mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 1)\,\mathbf{i} - (1 - 3)\,\mathbf{j} + (-1 - 0)\,\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} \tag{5}$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση της εξίσωσης του επιπέδου $\mathcal{P}_1$, αντικαθιστώντας τις τιμές $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$, $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ και $z_0 = -1$ στην εξίσωση (3):

$$(x - 1) + 2\,(y - 1) - (z + 1) = 0 \qquad \text{ή} \qquad x + 2y - z = 4 \tag{6}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-11

Σκοπός: Η εύρεση της γωνίας μεταξύ δύο επιπέδων και της εξίσωσης της τομής αυτών.

Το πρόβλημα: *Δίνονται οι καρτεσιανές εξισώσεις δύο επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$:*

$$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z - 1 = 0 \qquad \mathcal{P}_2 : x - y + 2z + 8 = 0 \tag{1}$$

Να ευρεθούν: (α) η γωνία θ μεταξύ των δύο επιπέδων και (β) οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathcal{E}$ στην οποία τέμνονται τα επίπεδα $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$.

Λύση: **α** Εξ ορισμού, η γωνία θ μεταξύ δύο επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ είναι ίση με την οξεία γωνία που σχηματίζουν τα αντίστοιχα κάθετα ανύσματα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ (βλ. Σχήμα 4-5γ). Τα κάθετα ανύσματα των δύο δοθέντων επιπέδων είναι:

$$\mathbf{N}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{N}_2 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \tag{α-1}$$

Υπενθυμίζεται ότι οι συνιστώσες του κάθετου ανύσματος ενός επιπέδου είναι οι συντελεστές των x, y, z στη βαθμωτή του εξίσωση. Η γωνία θ μεταξύ των ανυσμάτων $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση της εξίσωσης (2-18), στην οποία αντικαθιστούμε τις καρτεσιανές εκφράσεις των ανυσμάτων $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ από τις εξισώσεις (α-1):

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1|\,|\mathbf{N}_2|} = \frac{(1)(1) + (2)(-1) + (1)(2)}{(\sqrt{6}\,)(\sqrt{6}\,)} = \frac{11}{6} \;\Rightarrow\; \theta = 80°\,24' \tag{α-2}$$

Άρα, η γωνία θ μεταξύ των δύο δοθέντων επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ είναι 80° και 24′.

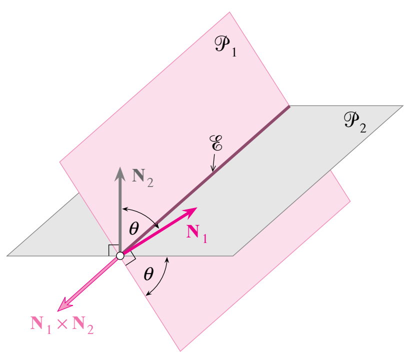
β Για να βρούμε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας $\mathcal{E}$ στην οποία τέμνονται τα δύο επίπεδα $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$, βρίσκουμε ένα σημείο $M_0(x_0, y_0, z_0)$ της $\mathcal{E}$ και ένα άνυσμα $\mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$ παράλληλο προς αυτήν και κατόπιν χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (4-5):

$$x = x_0 + \lambda a \qquad y = y_0 + \lambda b \qquad z = z_0 + \lambda c \tag{β-1}$$

Ως σημείο M_0 μπορούμε να επιλέξουμε κάθε σημείο της ευθείας $\mathcal{E}$, π.χ. το σημείο στο οποίο τέμνει το καρτεσιανό xy-επίπεδο, θέτοντας $z = 0$ στις εξισώσεις και των δύο επιπέδων, οπότε προκύπτουν οι σχέσεις:

$$x + 2y = 1 \qquad \text{και} \qquad x - y = -8 \tag{β-2}$$

Από τη λύση του συστήματος των δύο αυτών εξισώσεων λαμβάνονται οι τιμές $x = -5$ και $y = 3$. Έτσι, το σημείο $(-5, 3, 0)$ είναι ένα από τα σημεία της ευθείας $\mathcal{E}$, το οποίο και χρησιμοποιούμε ως σημείο M_0. Εκείνο που απομένει τώρα να βρούμε είναι ένα μη μηδενικό άνυσμα παράλληλο προς την ευθεία $\mathcal{E}$. Όμως, η ευθεία $\mathcal{E}$ ως τομή των δύο επιπέδων είναι κάθετη στα κάθετα ανύσματα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ και, άρα, παράλληλη προς το εξωτερικό γινόμενο αυτών (βλ. Σχήμα Π4-11). Έτσι, ως άνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{A}$ της ευθείας $\mathcal{E}$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνυσμα $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, η καρτεσιανή έκφραση του οποίου είναι:



Σχήμα Π4-11

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4+1)\,\mathbf{i} - (2-1)\,\mathbf{j} + (-1-2)\,\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k} \qquad (\beta\text{-}3)$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εύρεση των παραμετρικών εξισώσεων της ευθείας $\mathscr{E}$, αντικαθιστώντας τις τιμές $a = 5$, $b = -1$, $c = -3$, $x_0 = -5$, $y_0 = 3$ και $z_0 = 0$ στις τρεις εξισώσεις (β-1):

$$x = -5 + 5\lambda \qquad y = 3 - \lambda \qquad z = -\lambda \qquad (\beta\text{-}4)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-12

Σκοπός: Ο υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο παράλληλων επιπέδων.

Το πρόβλημα: *Δίνονται οι καρτεσιανές εξισώσεις δύο επιπέδων $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$:*

$$\mathscr{P}_1 : 2x + 4y - 2z = 1 \qquad \mathscr{P}_2 : -3x - 6y + 3z = 10 \qquad (1)$$

Ζητούνται: (α) να αποδειχθεί ότι τα δοθέντα επίπεδα είναι παράλληλα και (β) να υπολογιστεί η μεταξύ τους απόσταση.

Λύση: **α** Δύο επίπεδα $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι παράλληλα, αν τα κάθετα ανύσματα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ αυτών είναι παράλληλα (βλ. Σχήμα 4-5β), δηλαδή αν ισχύει η ανυσματική σχέση (4-22):

$$\mathbf{N}_1 = m\mathbf{N}_2, \quad \text{όπου } m \neq 0 \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Τα κάθετα ανύσματα $\mathbf{N}_1$ και $\mathbf{N}_2$ έχουν συντεταγμένες τους συντελεστές των x, y, z στις καρτεσιανές εξισώσεις των επιπέδων $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$, αντίστοιχα. Επομένως,

$$\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{N}_2 = -3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Η εξίσωση του ανύσματος $\mathbf{N}_1$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{N}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = -\frac{2}{3}(-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = -\frac{2}{3}\mathbf{N}_2 \qquad (\alpha\text{-}3)$$

Άρα, τα επίπεδα $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι παράλληλα, αφού ικανοποιείται η συνθήκη (α-1) για $m = -2/3$.

β Η απόσταση D ενός σημείου $M(x, y, z)$ από ένα επίπεδο $\mathscr{P}$ που είναι κάθετο σε ένα άνυσμα $\mathbf{N} = \langle a, b, c \rangle$ (βλ. Σχήμα 4-6) υπολογίζεται από την εξίσωση (4-29):

$$D = \frac{|\alpha x + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad (\beta\text{-}1)$$

Για να βρούμε την απόσταση μεταξύ των δύο παράλληλων επιπέδων, επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο στο ένα επίπεδο (έστω στο $\mathscr{P}_1$) και υπολογίζουμε την απόστασή του από το άλλο επίπεδο (το $\mathscr{P}_2$). Συγκεκριμένα, αν θέσουμε $y = z = 0$ στην εξίσωση του επιπέδου $\mathscr{P}_1$, βρίσκουμε $x = 1/2$. Έτσι, το $(1/2, 0, 0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου $\mathscr{P}_1$. Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην εφαρμογή της εξίσωσης (β-1), θέτοντας σε αυτήν τις γνωστές πλέον τιμές των συντεταγμένων (x, y, z) του σημείου M και των συνιστωσών (a, b, c) του κάθετου ανύσματος $\mathbf{N} = \mathbf{N}_2$:

$$D = \frac{|(-3)(1/2) + (-6)(0) + (3)(0) + (-10)|}{\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (3)^2}} = \frac{23}{6\sqrt{6}} = 1{,}565 \qquad (\beta\text{-}2)$$

Άρα, η απόσταση μεταξύ των επιπέδων $\mathscr{P}_1$ και $\mathscr{P}_2$ είναι περίπου 1,57 (μονάδες μήκους).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

4-01 Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (**Σ**) και ποιές λάθος (**Λ**) από μαθηματική άποψη; Σημειώστε **X** στο αντίστοιχο τετραγωνίδιο.

	Σ	**Λ**
α. Δύο ευθείες γραμμές είτε τέμνονται ή είναι παράλληλες.		
β. Δύο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη ευθεία είναι παράλληλες.		
γ. Δύο ευθείες γραμμές παράλληλες σε ένα επίπεδο είναι παράλληλες.		
δ. Οι ευθείες γραμμές $\mathbf{R}_1 = <0, 1, 2> + \lambda_1<4, -2, -8>$ και $\mathbf{R}_2 = <1, -3, 5> + \lambda_2<-2, 1, 4>$ είναι παράλληλες μεταξύ τους.		
ε. Οι ευθείες γραμμές $\mathbf{R}_1 = <1, -1, 2> + \lambda_1<0, -2, -5>$ και $\mathbf{R}_2 = <3, 1, 5> + \lambda_2<1, 2, 0>$ είναι κάθετες μεταξύ τους.		
στ. Οι παραμετρικές εξισώσεις του καρτεσιανού x-άξονα είναι $x = \lambda$, $y = 0$ και $z = 0$.		
ζ. Στον Ευκλείδειο 3-χώρο, τρία διαφορετικά σημεία ορίζουν πάντα ένα επίπεδο.		
η. Δύο επίπεδα παράλληλα σε μια ευθεία είναι παράλληλα.		
θ. Δύο επίπεδα κάθετα σε ένα τρίτο επίπεδο είναι παράλληλα.		
ι. Το επίπεδο $x = a$ διέρχεται από το σημείο $(a, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο άνυσμα $<1, 0, 0>$.		
ια. Το άνυσμα $<2, -4, 1>$ είναι παράλληλο προς το επίπεδο $2x + y = 5$.		
ιβ. Τα επίπεδα $3x - 2y + z = 5$ και $x + y - z = 2$ είναι κάθετα.		
ιγ. Τα επίπεδα $x + y = 1$ και $y + z = 1$ είναι παράλληλα.		
ιδ. Το επίπεδο $2x - 3y + 4z = 24$ τέμνει τους x-, y- και z-άξονες στα σημεία 12, – 8 και 6.		
ιε. Η απόσταση του σημείου $(4, -3, 1)$ από το επίπεδο $y = -5$ είναι ίση με 2.		

4-02 Να ευρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη προς το άνυσμα **A**:

α	$M_0(-4, 1, 2)$,	$\mathbf{A} = <-3, 2, -6>$
β	$M_0(2, -3, -5)$,	$\mathbf{A} = <4, -5, 8>$
γ	$M_0(4, 1, 2)$,	$\mathbf{A} = <3, -2, 1>$
δ	$M_0(-5, 0, -2)$,	$\mathbf{A} = <-3, 4, -5>$

4-03 Να ευρεθούν οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη προς την ευθεία γραμμή $\mathscr{E}$:

α	$M_0(0, 2, -1)$ $\mathscr{E}: x = 1 + 2\lambda,\ y = 3\lambda,\ z = 5 - 7\lambda$
β	$M_0(6, 4, -2)$ $\mathscr{E}: x = 6 + 2\lambda,\ y = 4 - 3\lambda,\ z = -2 + 6\lambda$

4-04 Να ευρεθεί η ανυσματική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2:

α	$M_1(3, -1, 4)$,	$M_2(0, 3, 2)$
β	$M_1(2, -4, -1)$,	$M_2(-3, 0, 1)$
γ	$M_1(2, 5, 1)$,	$M_2(3, 5, -3)$
δ	$M_1(-4, 0, 3)$,	$M_2(0, 2, -5)$

4-05 Να ευρεθούν οι συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2:

α	$M_1(1, 1, -2)$,	$M_2(1, 3, -6)$
β	$M_1(3, 5, 1)$,	$M_2(-2, 6, 4)$
γ	$M_1(1, 1/2, 1)$,	$M_2(3, 1, 2)$
δ	$M_1(-1, 0, 0)$,	$M_2(3, -2, 5)$

4-06 Να αποδειχθεί ότι οι ανυσματικές εξισώσεις:

$\mathbf{R} = \lambda<4, 4, 4>$ και

$\mathbf{R} = <1, 1, 1> + \lambda<-2, -2, -2>$

παριστάνουν την ίδια ευθεία γραμμή.

4-07 Να εξεταστεί αν τα παρακάτω σημεία M_1, M_2 και M_3 είναι συνευθειακά.

α	$M_1(2, -1, -8)$,	$M_2(5, 6, -3)$,	$M_3(1, -5, 4)$
β	$M_1(1, -2, 4)$,	$M_2(0, 3, 2)$,	$M_3(2, -7, 6)$
γ	$M_1(2, 3, 5)$,	$M_2(6, -1, 8)$,	$M_3(-2, 7, 2)$

4-08 Να ευρεθούν τα σημεία τομής των παρακάτω ευθειών με τα τρία καρτεσιανά επίπεδα.

α	$x = 1 + 3\lambda,\quad y = 4 + 2\lambda,\quad z = 2 - 2\lambda$

β	$x = 4 - 2\lambda, \quad y = 1 + 2\lambda, \quad z = 9 + 3\lambda$
γ	$x = 1 + 2\lambda, \quad y = -1 - \lambda, \quad z = 3\lambda$
δ	$x = 2\lambda, \quad y = 2 + 3\lambda, \quad z = -1 - 7\lambda$

4-09 Να εξεταστεί αν οι ευθείες $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ είναι ορθογώνιες, παράλληλες ή ασύμβατες.

α	$\mathcal{E}_1: (x-7)/8 = (4-y)/4 = (3-z)/24$ $\mathcal{E}_2: x = 6 + 2\lambda, \quad y = 6\lambda, \quad z = -8 + 10\lambda$
β	$\mathcal{E}_1: (x-1)/2 = (4-y)/3 = z$ $\mathcal{E}_2: x = -6\lambda, \quad y = 1 + 9\lambda, \quad z = -3\lambda$
γ	$\mathcal{E}_1: (x-1)/2 = (y-2)/3 = (z-3)/4$ $\mathcal{E}_2: x = -1 + 6\lambda, \ y = 3 - \lambda, \ z = -5 + 2\lambda$
δ	$\mathcal{E}_1: (x+6)/(-1) = (y-20)/3 = (z-1)/2$ $\mathcal{E}_2: x = 5 + 2\lambda, \quad y = -9 - 4\lambda, \quad z = 1 + 7\lambda$

4-10 Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-4, 2, 1)$ και $B(-1, 6, 2)$ είναι κάθετη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 1, 1)$ και $\Delta(1, -1, 6)$.

4-11 Να αποδειχθεί ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(4, -3, -15)$ και $B(10, 6, -3)$ είναι παράλληλη προς την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(2, -1, -5)$ και $\Delta(6, 5, 3)$.

4-12 Να εξεταστεί αν οι ευθείες $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ τέμνονται και (αν ναι) να ευρεθεί το σημείο τομής τους.

α	$\mathcal{E}_1: (1-x)/2 = (y-5)/3 = z + 1$ $\mathcal{E}_2: x = 1 - \lambda, \quad y = 2 + 3\lambda, \quad z = 4 + \lambda$
β	$\mathcal{E}_1: (x-6)/2 = (y-11)/4 = z + 3$ $\mathcal{E}_2: x = 4 + \lambda, \quad y = 5 + \lambda, \quad z = -1 + 2\lambda$
γ	$\mathcal{E}_1: (x-5)/2 = (y+9)/(-4) = (z-1)/7$ $\mathcal{E}_2: x = -6 - \lambda, \quad y = 20 + 3\lambda, \quad z = 1 + 2\lambda$

4-13 Να ευρεθεί η απόσταση του σημείου M_0 από την αντίστοιχη ευθεία $\mathcal{E}$.

α	$M_0(2, 1, -3)$ $\mathcal{E}: x = 4 + 2\lambda, \quad y = -1 + 3\lambda, \quad z = 1 - \lambda$
β	$M_0(1, 2, 3)$ $\mathcal{E}: x = 2 + \lambda, \quad y = 2 - 3\lambda, \quad z = 5\lambda$
γ	$M_0(2, -1, 4)$ $\mathcal{E}: x = 4 + \lambda, \quad y = 2, \quad z = 1 + 2\lambda$

4-14 Να ευρεθεί η απόσταση μεταξύ των ευθειών $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$, από τις οποίες η πρώτη διέρχεται από τα σημεία $A(3, 1, -1)$ και $B(4, 5, -2)$ και η δεύτερη από τα σημεία $\Gamma(1, 0, -1)$ και $\Delta(-1, 1, 0)$.

4-15 Να ευρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ με συμμετρικές εξισώσεις:

α	$\mathcal{E}_1: (x-1)/2 = -y = z + 4$ $\mathcal{E}_2: x + 1 = (y-3)/2, \quad z = 2$
β	$\mathcal{E}_1: (x+1)/4 = (y-3)/5 = z - 2$ $\mathcal{E}_2: (x+2)/3 = (y+4)/4 = (2-z)/3$
γ	$\mathcal{E}_1: (x-1)/2 = y - 2 = (3-z)/4$ $\mathcal{E}_2: (x-2)/4 = (z-3)/3, \quad y = -1$

4-16 Να ευρεθεί η βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι κάθετο στο άνυσμα $\mathbf{A}$:

α	$M_0(-2, 1, 3)$,	$\mathbf{A} = <5, -2, 1>$
β	$M_0(5, 1, 3)$,	$\mathbf{A} = <2, -3, 4>$
γ	$M_0(0, 0, 0)$,	$\mathbf{A} = <4, -3, 5>$
δ	$M_0(6, 3, 2)$,	$\mathbf{A} = <-2, 1, 5>$

4-17 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(1, -1, 2)$ και είναι παράλληλο προς τα ανύσματα $<2, 0, 3>$ και $<1, -2, 0>$.

4-18 Να ευρεθεί η βαθμωτή εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία A, B και Γ:

α	$A(2, 1, -3)$,	$B(4, 3, 5)$,	$\Gamma(6, -4, 0)$
β	$A(0, 0, 0)$,	$B(1, 1, 1)$,	$\Gamma(3, 2, -1)$
γ	$A(1, -1, 2)$,	$B(2, 1, 3)$,	$\Gamma(-1, 2, -1)$
δ	$A(0, 1, 1)$,	$B(1, 0, 1)$,	$\Gamma(1, 1, 0)$

4-19 Να ευρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου $\mathcal{P}$ και της ευθείας γραμμής $\mathcal{E}$:

α	$\mathcal{P}: x + y + z = 2$ $\mathcal{E}: x = 1 + 2\lambda, \quad y = 1 + 5\lambda, \quad z = 3\lambda$
β	$\mathcal{P}: 3x - y + 5z = 10$ $\mathcal{E}: x = 1 - \lambda, \quad y = 4\lambda, \quad z = 1 + \lambda$
γ	$\mathcal{P}: x + y - z = 8$ $\mathcal{E}: x = 1, \quad y = 2, \quad z = 1 + \lambda$

4-20 Ποιά από τα παρακάτω επίπεδα είναι παράλληλα και ποιά ορθογώνια;

α	$x + 5y - 3z = -8$	β	$5x - 2y - 4z = 8$
γ	$4x + 4y - 6z = 1$	δ	$-6x - 6y + 9z = 2$
ε	$2x - y + 3z = -5$	στ	$-3x + 6y + 9z = 0$
ζ	$8x - 2y - 6z = 12$	η	$x - 2y - 3z = -4$

4-21 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}_1$ που περιέχει την ευθεία $\mathcal{E}$ και είναι κάθετο στο $\mathcal{P}_2$:

α	$\mathcal{E}\ :\ \mathbf{R} = <-1, 2, 5> + \lambda <3, -1, -5>$ $\mathcal{P}_2 : 2x + y + z = 3$
β	$\mathcal{E}\ :\ x = 1 + \lambda\ ,\ \ y = 1\ ,\ \ z = -1 + \lambda$ $\mathcal{P}_2 : 3x - y + z = 7$
γ	$\mathcal{E}\ :\ (x - 4)/3 = -y = (z - 1)/5$ $\mathcal{P}_2 : x + y + z = 7$

4-22 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}_1$ που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλο προς το επίπεδο $\mathcal{P}_2$:

α	$M_0(-4, 1, 2)$, $\mathcal{P}_2 : x + 2y + 5z = 3$
β	$M_0(2, 3, -5)$, $\mathcal{P}_2 : x + y - 4z = 1$
γ	$M_0(0, 0, 0)$, $\mathcal{P}_2 : 4x - 3y + z = 5$

4-23 Να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$:

α	$\mathcal{P}_1 : 2x + 4y - 2z = 6$ $\mathcal{P}_2 : -3x - 6y + 3z = 9$
β	$\mathcal{P}_1 : -4x - 4y + 6z = 5$ $\mathcal{P}_2 : 2x + 2y - 3z = 6$
γ	$\mathcal{P}_1 : 3x + 6y - 6z = 12$ $\mathcal{P}_2 : x + 2y - 2z = -1$

4-24 Να αποδειχθεί ότι η απόσταση D μεταξύ των παράλληλων επιπέδων $ax + by + cz + d_1 = 0$ και $ax + by + cz + d_2 = 0$ δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

4-25 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που περιέχει τις παράλληλες γραμμές $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ με τις παρακάτω συμμετρικές εξισώσεις:

α	$\mathcal{E}_1 : (2 - x)/2 = -y = (z - 1)/3$ $\mathcal{E}_2 : x/2 = y - 3 = (z + 1)/(-3)$
β	$\mathcal{E}_1 : x - 3 = y/2 = z + 2$ $\mathcal{E}_2 : x - 1 = (y - 1)/2 = z - 3$

4-26 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που περιέχει τις τεμνόμενες γραμμές $\mathcal{E}_1$ και $\mathcal{E}_2$ με τις παρακάτω συμμετρικές εξισώσεις:

α	$\mathcal{E}_1 : (1 - x)/4 = (y - 1)/2 = (2 - z)/2$ $\mathcal{E}_2 : x + 1 = y - 2 = 1 - z$
β	$\mathcal{E}_1 : x - 1 = (y - 1)/4 = (3 - z)/2$ $\mathcal{E}_2 : x = y/4 = -z/2$

4-27 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2, 1)$ και περιέχει την τομή των επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ με εξισώσεις:

$\mathcal{P}_1 : 2x - y + 3z = 1$ $\quad\quad$ $\mathcal{P}_2 : x + y - z = 2$

4-28 Να ευρεθεί η εξίσωση του επιπέδου $\mathcal{P}$ που διέρχεται από το σημείο $(2, 1, -1)$ και είναι κάθετο στην τομή των επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ με εξισώσεις:

$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z = 2$ $\quad\quad$ $\mathcal{P}_2 : 2x + y - z = 3$

4-29 Να ευρεθεί η εξίσωση της προβολής της ευθείας γραμμής $\mathcal{E}$ με ανυσματική εξίσωση:

$\mathbf{R} = <1, 2, 0> + \lambda <2, -1, 3>$

στο επίπεδο $\mathcal{P}$ με εξίσωση: $x + y + z = 4$

4-30 Να ευρεθεί η ανυσματική εξίσωση της ευθείας $\mathcal{E}_1$ που διέρχεται από το σημείο $(0, 1, 2)$ και είναι παράλληλη προς το επίπεδο $\mathcal{P}$ με εξίσωση:

$x + y + z = 2$

και κάθετη στην ευθεία με ανυσματική εξίσωση:

$\mathbf{R} = <1, 1, 0> + \lambda <1, -1, 2>$

4-31 **α.** Να ευρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής M_0 της ευθείας $\mathcal{E}_1$ με εξίσωση:

$\mathbf{R} = <3, 0, 0> + \lambda <2, 2, 1>$

και του επιπέδου $\mathcal{P}$ με καρτεσιανή εξίσωση:

$x + 3y - z = -4$

β. Να ευρεθεί η ανυσματική εξίσωση της ευθείας $\mathcal{E}_2$ που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι κάθετη στην ευθεία $\mathcal{E}_1$.

4-32 Να ευρεθούν οι αριθμοί κατεύθυνσης της τομής $\mathcal{E}$ των επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$:

α	$\mathcal{P}_1 : x + 2y + 2z = 6$, $\mathcal{P}_2 : 2x - y - z = 4$
β	$\mathcal{P}_1 : 5x - 4y - 9z = 8$, $\mathcal{P}_2 : x + 4y + 3z = 4$
γ	$\mathcal{P}_1 : x + 2y + z = 1$, $\mathcal{P}_2 : x - y + 2z = -8$

4-33 Να ευρεθούν οι συμμετρικές εξισώσεις της τομής $\mathcal{E}$ των επιπέδων $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ και η γωνία θ που σχηματίζουν μεταξύ τους:

α	$\mathcal{P}_1 : x - 2y + 4z = 2$, $\mathcal{P}_2 : x + y - 2z = 5$
β	$\mathcal{P}_1 : 4x - 2y - z = 1$, $\mathcal{P}_2 : x + y + 2z = 1$
γ	$\mathcal{P}_1 : 3x - 4y + 5z = 6$, $\mathcal{P}_2 : x + y - z = 2$

4-34 Να ευρεθεί η απόσταση του σημείου M_0 από το αντίστοιχο επίπεδο $\mathcal{P}$.

α	$M_0(2, -3, -1)$, $\mathcal{P} : x + 2y + 2z = 9$
β	$M_0(1, 2, -3)$, $\mathcal{P} : 4x - 2y - 2z = 6$
γ	$M_0(-2, 4, 1)$, $\mathcal{P} : x - 2y - 2z = 8$
δ	$M_0(3, 0, -5)$, $\mathcal{P} : x - y - 4z = 5$