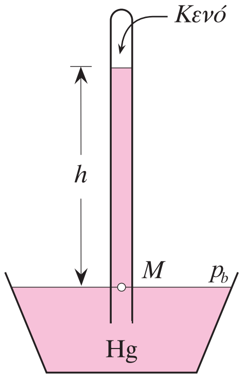
Μέρος Πρώτο

Απαντήσεις Θεμάτων Σκέψης

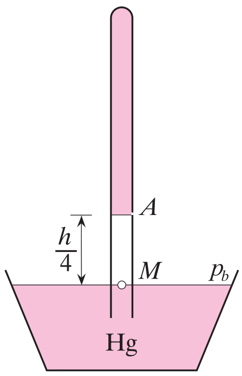
Στατική των Ρευστών

Θέμα Θ-04

Διατύπωση: *Τι θα συμβεί, αν στον σωλήνα του υδραργυρικού βαρομέτρου του Σχήματος Θ-04α ανοίξουμε μια μικρή οπή σε απόσταση h/4 από την ελεύθερη επιφάνεια του Hg στη λεκάνη του;*



Σχήμα Θ-04α



Σχήμα Θ-04β

Απάντηση: Για υγρά σε στατική ισορροπία, η πίεση p σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού όπου ασκείται πίεση p_0 δίνεται από τη θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής, [Εξ. (3-13)]:

$$p = p_0 + \gamma h \tag{1}$$

όπου γ είναι το ειδικό βάρος του υγρού. Στη διάταξη του Σχήματος Θ-04α, επειδή ο Hg είναι σε στατική ισορροπία, η πίεση στο σημείο M στη βάση της υδραργυρικής στήλης, προφανώς, είναι ίση με την ατμοσφαιρική ($p_M = p_b$). Από το άλλο μέρος, η πίεση στην κορυφή της στήλης είναι μηδέν. Έτσι, από την εξίσωση (1), για $p = p_M = p_b$ και $p_0 = 0$, προκύπτει η σχέση:

$$p_b = \gamma h \qquad (2)$$

Στη θέση όπου πρόκειται να ανοιχθεί η οπή (σημείο A), οι πιέσεις $p_{A,\varepsilon\sigma}$ στο εσωτερικό και $p_{A,\varepsilon\xi}$ στο εξωτερικό του σωλήνα δίνονται από τις σχέσεις (3) και (4), αντίστοιχα:

$$p_{A,\varepsilon\sigma} = \tfrac{3}{4}\gamma h \qquad (3)$$

$$p_{A,\varepsilon\sigma} = p_b = \gamma h \qquad (4)$$

Επειδή $p_{A,\varepsilon\xi} > p_{A,\varepsilon\sigma}$, με το άνοιγμα της οπής, η υδραργυρική στήλη θα χωριστεί σε δύο τμήματα στο ύψος του σημείου A (βλ. Σχήμα Θ-04β). Το άνω τμήμα θα κινηθεί προς το κλειστό άκρο του σωλήνα καταλαμβάνοντας τον υπάρχοντα κενό χώρο, καθώς η δύναμη πίεσης $p_b A = \gamma h A$ που ασκείται στη βάση αυτής της στήλης είναι μεγαλύτερη από το βάρος της, $B = 0{,}75\gamma h A$. Το κάτω τμήμα της υδραργυρικής στήλης, στην κορυφή του οποίου η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική, θα κινηθεί προς τη λεκάνη του βαρομέτρου μέχρι οι επιφάνειες του Hg εντός και εκτός του σωλήνα να βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, όπως απαιτείται από την αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων.

Θεμα Θ-05

Διατύπωση: *Αν έχουμε πολλά συγκοινωνούντα δοχεία που περιέχουν το ίδιο υγρό, η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού θα βρίσκεται πάντα στο αυτό ύψος σε όλα τα δοχεία;*

Απάντηση: Για να είναι πάντα η ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στο ίδιο ύψος (έστω h) σε όλα τα συγκοινωνούντα δοχεία πρέπει να ικανοποιούνται οι εξής προϋποθέσεις:

- Το υγρό να είναι σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.
- Η εξωτερική πίεση p_0 που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού να είναι η ίδια σε όλα τα δοχεία.
- Το ειδικό βάρος γ του υγρού να είναι το ίδιο σε όλα τα δοχεία. Όμως επειδή το ειδικό βάρος $\gamma = \rho g$, για να ισχύει αυτό ($\gamma = \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}$) θα πρέπει:
  - Η πυκνότητα ρ του υγρού να είναι παντού η ίδια, κάτι που προϋποθέτει την αυτή θερμοκρασία σε όλα τα δοχεία.
  - Η επιτάχυνση βαρύτητας g να έχει την ίδια τιμή στις θέσεις όλων των δοχείων.

Εφόσον ικανοποιούνται οι παραπάνω προϋποθέσεις, η πίεση p στον πυθμένα όλων των δοχείων θα έχει την ίδια τιμή, η οποία δίνεται από τη θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής:

$$p = p_0 + \gamma h = p_0 + \rho g h \qquad (1)$$

Θεμα Θ-06

Διατύπωση: *Σε ορισμένη απόσταση z από την επιφάνεια του εδάφους, η πίεση του ατμοσφαιρικού αέρα είναι 90 kPa και η επιτάχυνση βαρύτητας 9,805 m/s^2. Στη θέση αυτή και για αέρα σε στατική ισορροπία, η μεταβολή της πίεσης ως προς το ύψος βρέθηκε ότι είναι dp/dz = −10,9 Pa/m. Να προσδιοριστεί η θερμοκρασία του αέρα στο υψόμετρο z. Ο ατμοσφαιρικός αέρας θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο με ειδική σταθερά 287 J/(kg K).*

Απάντηση: Η κατανομή της πίεσης p του ατμοσφαιρικού αέρα, σε στατική ισορροπία, ως συνάρτηση του ύψους z δίνεται από εξίσωση (3-10):

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma = -\rho g \tag{1}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα του αέρα. Επειδή ο αέρας συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο, η πυκνότητα ρ δίνεται από την καταστατική εξίσωση:

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{2}$$

όπου R είναι η ειδική σταθερά του αέρα. Εισάγοντας την έκφραση αυτή της πυκνότητας ρ στην εξίσωση (1) και, στη συνέχεια, λύνοντας τη νέα εξίσωση ως προς T, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$T = -\frac{gp}{R(dp/dz)} = -\frac{(9{,}805\ \mathrm{m/s^2})(90\times 10^3\ \mathrm{Pa})}{[(287\ \mathrm{J/(kg\cdot K)}](-10{,}9\ \mathrm{Pa/m})} = 282\ \mathrm{K} \tag{3}$$

Άρα, η θερμοκρασία του ατμοσφαιρικού αέρα στο δεδομένο υψόμετρο είναι 9 ^{o}C.

Θεμα Θ-07

Διατύπωση: *Πότε ένα σώμα βυθισμένο σε υγρό δέχεται μεγαλύτερη άνωση, όταν αυτό είναι σε μικρό ή σε μεγάλο βάθος;*

Απάντηση: Η άνωση F_B που υφίσταται ένα σώμα βυθισμένο σε υγρό δίνεται από τη σχέση:

$$F_B = \gamma_\upsilon V_\sigma \tag{1}$$

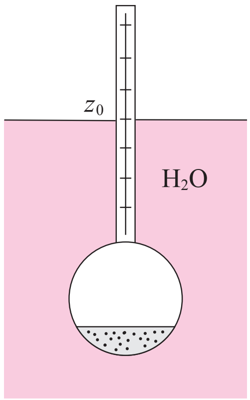
όπου γ_υ είναι το ειδικό βάρος του υγρού και V_σ ο όγκος του σώματος. Το ειδικό βάρος του υγρού θεωρείται σταθερό, οπότε η δύναμη F_B εξαρτάται αποκλειστικά από τον όγκο του σώματος. Επομένως, εκείνο που πρέπει να διερευνήσουμε είναι η επίδραση του βάθους h του υγρού στον όγκο V_σ του σώματος, η οποία εξαρτάται από τη *συμπιεστότητα* του σώματος.

***Ασυμπίεστο σώμα*:** Στην περίπτωση αυτή ο όγκος V_σ του σώματος είναι σταθερός, ανεξάρτητα από το βάθος h στο οποίο είναι βυθισμένο το σώμα. Άρα, *η δύναμη F_B που ασκείται σε ασυμπίεστο σώμα βυθισμένο σε υγρό είναι σταθερή.*

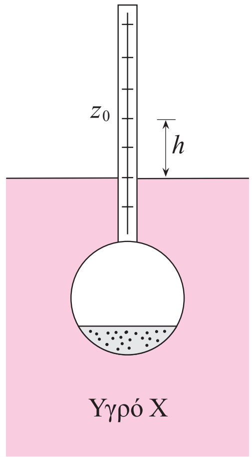
***Συμπιεστό σώμα*:** Σύμφωνα με τη θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής η πίεση στα υγρά όταν είναι σε στατική ισορροπία αυξάνεται με το βάθος h του υγρού. Αυτό συνεπάγεται μείωση του όγκου V_σ ενός συμπιεστού σώματος με την αύξηση του βάθους h του υγρού. Άρα, *η δύναμη F_B που ασκείται σε συμπιεστό σώμα βυθισμένο σε υγρό μειώνεται με την αύξηση του βάθους του υγρού.*

Θέμα Θ-08

Διατύπωση: *Όταν ένα υδρόμετρο (ή πυκνόμετρο) επιπλέει στο νερό, το κυλινδρικό του στέλεχος είναι βυθισμένο έτσι ώστε ένα ορισμένο σημείο του, έστω το z_0, να βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού (Σχήμα Θ-08α). Όταν το υδρόμετρο τοποθετηθεί σε ένα άλλο υγρό Χ, σχετικής πυκνότητας ρ_s, το στέλεχος αυτού ανέρχεται και το σημείο z_0 βρίσκεται πλέον σε απόσταση h από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού (Σχήμα Θ-08β). Το βαθμονομημένο στέλεχος του υδρομέτρου έχει εγκάρσια διατομή A και σφαιρικό τμήμα που έχει όγκο V. Να ευρεθεί η εξίσωση που δίνει τη σχετική πυκνότητα ρ_s του υγρού Χ ως συνάρτηση της απόστασης h.*



Σχήμα Θ-08α



Σχήμα Θ-08β

Απάντηση: Και στις δύο περιπτώσεις, που απεικονίζονται στα Σχήματα Θ-08α και Θ-08β, το βάρος του υδρομέτρου είναι ίσο με την άνωση, δηλαδή το βάρος του εκτοπιζόμενου υγρού. Για το υδρόμετρο που επιπλέει στο νερό (w) ισχύει η σχέση:

$$F_g = F_{B,w} \quad \Rightarrow \quad mg = \gamma_w V \quad \Rightarrow \quad mg = \rho_w g V \tag{1}$$

Όμοια, για το υδρόμετρο που επιπλέει στο υγρό (X) ισχύει η σχέση:

$$F_g = F_{B,X} \quad \Rightarrow \quad mg = \gamma_X V' \quad \Rightarrow \quad mg = \rho_w \rho_s g (V - Ah) \tag{2}$$

Από την εξίσωση των δεύτερων μελών των εξισώσεων (1) και (2), προκύπτει:

$$\rho_w g V = \rho_w \rho_s g (V - Ah) \tag{3}$$

Με απάλειψη των μεγεθών ρ_w και g από την εξίσωση (3), προκύπτει τελικά η ζητούμενη σχέση που δίνει τη σχετική πυκνότητα ρ_s του υγρού Χ ως συνάρτηση της απόστασης h:

$$\rho_s = \frac{1}{1 - (A/V)h} \tag{4}$$

Μέρος Δεύτερο

Υποδειγματικές Λύσεις Προβλημάτων

Στατικη των Ρευστων

Προβλημα Α-04

Διατύπωση: *Το βαθύτερο γνωστό σημείο βρίσκεται στον Ειρηνικό ωκεανό και είναι 11 034 m. Να υπολογιστεί η σχετική πίεση στο σημείο αυτό στις εξής δύο περιπτώσεις:*

α *Το νερό θεωρείται ότι είναι ασυμπίεστο με πυκνότητα 1025 kg/m³.*

β *Το νερό θεωρείται ότι έχει σταθερό μέτρο ελαστικότητας 2,42 x 10⁹ Pa και πυκνότητα 1025 kg/m³ στην επιφάνεια του ωκεανού.*

Λύση: α Για ασυμπίεστο νερό σε στατική ισορροπία και σταθερή επιτάχυνση βαρύτητας, ισχύει η θεμελιώδης αρχή της Υδροστατικής με τη μορφή:

$$p - p_b = \gamma h = \rho g h \qquad (\alpha\text{-}1)$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (α-1), προκύπτει:

$$p - p_b = \left(1025\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)\left(9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(11034\ \mathrm{m}) = 1{,}11\times10^8\ \mathrm{Pa} \qquad (\alpha\text{-}2)$$

Άρα, για ασυμπίεστο νερό, η μέγιστη σχετική πίεση στον Ειρηνικό ωκεανό είναι 111 MPa.

β Η βασική εξίσωση που εκφράζει την κατανομή της πίεσης $p(z)$ σε ρευστό που βρίσκεται σε στατική ισορροπία είναι:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad dp = -\rho g dz \qquad (\beta\text{-}1)$$

Αν η πυκνότητα ρ του ρευστού είναι συνάρτηση της πίεσης p, για να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση της εξίσωσης (β-1), πρέπει να βρούμε την έκφραση της συνάρτησης $\rho = f(p)$. Ως γνωστόν (§2-3), το μέτρο συμπιεστότητας k ενός υλικού είναι ίσο με το αντίστροφο του μέτρου ελαστικότητας E αυτού:

$$k = \frac{1}{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{E} \quad \Rightarrow \quad dp = E\frac{d\rho}{\rho} \tag{β-2}$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, η εξίσωση (β-1) γράφεται με τη μορφή:

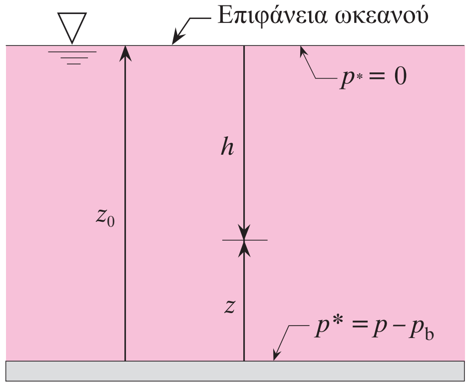
$$\frac{d\rho}{\rho^2} = -\frac{g}{E}dz \tag{β-3}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα Α-04, το διαφορικό $dz = d(z_0 - h) = -dh$. Έτσι, η εξίσωση (β-3) μπορεί να γραφεί με την ισοδύναμη μορφή:

$$\frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{g}{E}dh \tag{β-4}$$

Στη συνέχεια προχωρούμε στην ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (β-4):

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2} = \int_0^h \frac{g}{E}dh \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{g}{E}h \tag{β-5}$$



Σχήμα Α-04

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση ως προς ρ, προκύπτει η σχέση:

$$\rho = \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{g}{E}h\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1024}\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} - \frac{(9{,}81\ \text{m/s}^2)(11034\ \text{m})}{2{,}42\times 10^9\ \text{Pa}}\right)^{-1} = 1074\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{β-6}$$

Ήδη μπορούμε να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (β-2):

$$\int_{p_b}^{p} dp = \int_{\rho_0}^{\rho} E\frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad p - p_b = E\ln\frac{\rho}{\rho_0} \tag{β-7}$$

Από την αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (β-7), προκύπτει:

$$p - p_b = (2{,}42\times 10^9\ \text{Pa})\ln\left(\frac{1074\ \text{kg/m}^3}{1025\ \text{kg/m}^3}\right) = 1{,}13\times 10^8\ \text{Pa} \tag{β-8}$$

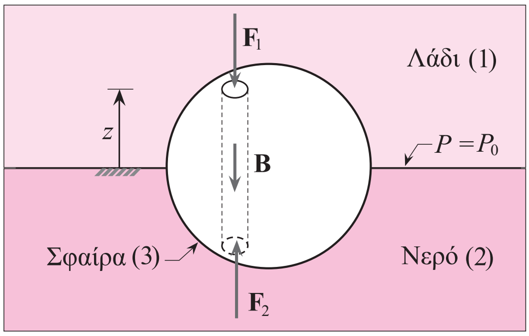
Άρα, για νερό με σταθερό το μέτρο E, η μέγιστη σχετική πίεση στον Ειρηνικό ωκεανό είναι 113 MPa.

Πρόβλημα Α-05

Διατύπωση: *Σε ένα δοχείο που περιέχει λάδι και νερό, θερμοκρασίας 5 °C, βυθίζεται μια σφαίρα διαμέτρου 5 cm και βάρους 0,6 N. Η σφαίρα ισορροπεί βυθισμένη κατά το ήμισυ σε καθένα από τα δύο υγρά. Να υπολογιστεί η πυκνότητα του λαδιού.*

Λύση: Το Σχήμα Α-05 δείχνει τη σφαίρα (3) βυθισμένη κατά το ήμισυ σε καθένα από τα δύο υγρά, λάδι (1) και νερό (2), τα οποία βρίσκονται σε κατάσταση στατικής ισορροπίας.

Για την εύρεση της σχέσης που συνδέει τις πυκνότητες ρ_1, ρ_2 και ρ_3 των δύο υγρών (1 και 2) και της σφαίρας (3), εργαζόμαστε ως εξής: Θεωρούμε ως σύστημα ένα στοιχειώδες τμήμα της σφαίρας σε σχήμα κυλίνδρου, εγκάρσιας διατομής dA και μήκους $2z$, όπως φαίνεται στο Σχήμα Α-05. Στο θεωρούμενο σύστημα ασκούνται τρεις δυνάμεις: (i) η *δύναμη πίεσης* F_1 του λαδιού, (ii) η *δύναμη πίεσης* F_2 του νερού, και (iii) το *βάρος* B. Επειδή το σύστημα (ως τμήμα της σφαίρας) είναι ακίνητο, σύμφωνα με τον 2ο νόμο κίνησης του Newton, η συνισταμένη των τριών δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό κατά την κατακόρυφη διεύθυνση z είναι μηδέν:



Σχήμα Α-05

$$F_2 - F_1 - B = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 dA - p_1 dA - \gamma_3 (2z) dA = 0 \tag{1}$$

Οι πιέσεις p_1 του λαδιού και p_2 του νερού υπολογίζονται από τη θεμελειώδη αρχή της Υδροστατικής, με πίεση αναφοράς την πίεση p_0 στη διεπιφάνεια των δύο ηρεμούντων υγρών:

$$p_1 = p_0 - \gamma_1 z \qquad (2\alpha) \qquad\qquad p_2 = p_0 + \gamma_2 |-z| \qquad (2\beta)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω εκφράσεις των πιέσεων p_1 και p_2 στην εξίσωση (1), προκύπτει:

$$[(p_0 + \gamma_2 |-z|) - (p_0 - \gamma_1 z) - 2\gamma_3 z] dA = 0 \tag{3}$$

Το ειδικό βάρος $\gamma = \rho g$, οπότε η εξίσωση (3) οδηγεί τελικά στη σχέση:

$$\rho_1 = 2\rho_3 - \rho_2 \tag{4}$$

Η πυκνότητα του νερού θερμοκρασίας 5 °C είναι ρ_2 = 1000 kg/m^3. Η πυκνότητα ρ_3 της σφαίρας υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$B_{\sigma\varphi} = \gamma_3 V_{\sigma\varphi} = \rho_3 g \left(\tfrac{4}{3}\pi R^3\right) = \rho_3 g \left(\tfrac{1}{6}\pi d^3\right) \tag{5}$$

Λύνοντας την εξίσωση (5) ως προς ρ_3, λαμβάνεται η σχέση:

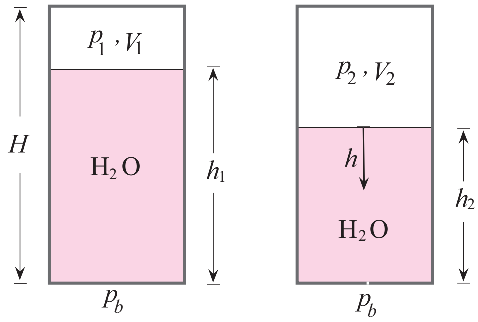
$$\rho_3 = \frac{6B_{\sigma\varphi}}{\pi g d^3} = \frac{6(0{,}6\ \mathrm{N})}{\pi (9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(0{,}05\ \mathrm{m})^3} \simeq 935\ \mathrm{kg/m^3} \tag{6}$$

Επομένως, η πυκνότητα ρ_1 του λαδιού είναι

$$\rho_1 = 2(935\ \mathrm{kg/m^3}) - (1000\ \mathrm{kg/m^3}) = 870\ \mathrm{kg/m^3} \tag{7}$$

Πρόβλημα Α-06

Διατύπωση: *Ένα κλειστό κυλινδρικό δοχείο ύψους 2 m περιέχει νερό θερμοκρασίας 20 °C μέχρι ύψος 1,5 m. Η πίεση του αέρα στην κορυφή του δοχείου είναι 100 kPa, όση είναι και η ατμοσφαιρική. Στον πυθμένα του δοχείου υπάρχει μια μικρή οπή από την οποία αρχίζει να εκρέει το νερό στην ατμόσφαιρα. Να υπολογιστούν:* ***(α)*** *το βάθος του νερού και* ***(β)*** *η πίεση του αέρα στο δοχείο όταν σταματήσει η εκροή του νερού.*



Σχήμα Α-06

Λύση: α Έστω (p_1, V_1) η αρχική και (p_2, V_2) η τελική κατάσταση του αέρα στο δοχείο. Τα αντίστοιχα ύψη της στάθμης του νερού στο δοχείο, ύψους H, είναι h_1 και h_2 (βλ. Σχήμα Α-06). Στις δεδομένες συνθήκες, ο αέρας μπορεί να θεωρηθεί ότι συμπεριφέρεται σαν ιδανικό αέριο.

Όταν σταματήσει η εκροή του νερού, η πίεση στη θέση της οπής, συνεπώς, και σε όλα τα σημεία του πυθμένα του δοχείου είναι ίση με την ατμοσφαιρική, p_b = 100 kPa. Επομένως, με βάση τη θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής, θα ισχύει η σχέση:

$$p_b = p_2 + \gamma_w h_2 \quad \text{(α-1)}$$

όπου γ_w είναι το ειδικό βάρος του νερού (γ_w = 9,79 kN/m^3). Η πίεση p_2 του αέρα στο δοχείο υπολογίζεται από τον νόμο Boyle-Charles:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2} \quad \Rightarrow \quad p_2 = \frac{V_1}{V_2}\frac{T_2}{T_1}p_1 \quad \text{(α-2)}$$

Υποθέτοντας ότι η θερμοκρασία του αέρα είναι σταθερή ($T_1 = T_2$) και με αναφορά στο Σχήμα Α-06, η τελευταία εξίσωση απλοποιείται στη σχέση:

$$p_2 = \frac{V_1}{V_2}p_1 = \frac{A(H-h_1)}{A(H-h_2)}p_b \quad \Rightarrow \quad p_2 = \left(\frac{H-h_1}{H-h_2}\right)p_b \quad \text{(α-3)}$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή της πίεσης p_2 στην εξίσωση (α-1), προκύπτει η σχέση:

$$p_b = \left(\frac{H-h_1}{H-h_2}\right)p_b + \gamma_w h_2 \quad \text{`(α-4)}$$

Με αναδιάταξη των όρων της, η εξίσωση (α-4) γράφεται με την ακόλουθη μορφή:

$$\gamma_w h_2^2 - (p_b + \gamma_w H)h_2 + h_1 p_b = 0 \quad \text{(α-5)}$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση (α-5) ως προς h_2, προκύπτει η έκφραση:

$$h_2 = \frac{(p_b + \gamma_w H) \pm \sqrt{(p_b + \gamma_w H)^2 - 4\gamma_w h_1 p_b}}{2\gamma_w} \quad \text{(α-6)}$$

Για ευκολία υπολογίζουμε πρώτα την τιμή του αθροίσματος:

$$p_b + \gamma_w H = (100\,\text{kPa}) + (9{,}79\,\text{kN/m}^3)(2\,\text{m}) = 119{,}6\,\text{kPa} \quad \text{(α-7)}$$

Κατόπιν προχωρούμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (α-6):

$$h_2 = \frac{(119{,}6\,\text{kPa}) \pm \sqrt{(119{,}6\,\text{kPa})^2 - 4(9{,}79\,\text{kN/m}^3)(1{,}5\,\text{m})(100\,\text{kPa})}}{2(9{,}79\,\text{kN/m}^3)} \quad \text{(α-8)}$$

Μετά την εκτέλεση των πράξεων, οι τιμές που λαμβάνονται για το h_2 είναι 1,42 και 10,8 m. Από φυσική άποψη, η αποδεκτή τιμή για το βάθος του νερού στο δοχείο είναι $h_2 = 1{,}42$ m.

β Η πίεση p_2 του αέρα στο δοχείο υπολογίζεται από την εξίσωση (α-3):

$$p_2 = \left(\frac{H-h_1}{H-h_2}\right)p_b = \frac{[(2\,\text{m})-(1{,}5\,\text{m})](100\,\text{kPa})}{(2\,\text{m})-(1{,}42\,\text{m})} = 86{,}2\,\text{kPa} \qquad (\beta\text{-}1)$$

Πρόβλημα Α-07

Διατύπωση: *Ένα υδραργυρικό μανόμετρο συνδέεται με μια ανοικτή δεξαμενή νερού και μια κλειστή δεξαμενή μεθανόλης όπως φαίνεται στο Σχήμα Α-07. Τα τρία υγρά βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον (20 °C και 100 kPa). Τα ύψη των στηλών h_1, h_2, h_3 και h_4 είναι 100, 20, 5 και 25 cm, αντίστοιχα. Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Α.*

Λύση: Γενικά, στα μανόμετρα στήλης υγρού, για να συσχετίσουμε τη μετρούμενη διαφορά πίεσης, αρχίζουμε από το ένα άκρο του δοθέντος συστήματος και, κινούμενοι διαμέσου του μανομέτρου, καταλήγουμε στο άλλο άκρο του, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής ($p = p_0 + \gamma h$), η οποία ισχύει για ρευστά σε στατική ισορροπία με σταθερό ειδικό βάρος. Στο υπό εξέταση υδραυλικό σύστημα υπάρχουν τρία υγρά: νερό (1), υδράργυρος (2) και μεθανόλη (3). Τα ειδικά βάρη, $\gamma = \rho g$, των τριών υγρών σε θερμοκρασία 20 °C είναι: $\gamma_1 = 9{,}79$ kN/m³, $\gamma_2 = 133{,}0$ kN/m³ και $\gamma_3 = 7{,}76$ kN/m³.

Για το μανόμετρο της διάταξης του Σχήματος Α-07, θα αρχίσουμε από το σημείο 1 και κινούμενοι διαμέσου του μανομέτρου θα καταλήξουμε στο σημείο *Α*. Επειδή η ελεύθερη επιφάνεια του νερού στην ανοικτή δεξαμενή είναι εκτεθειμένη στην ατμόσφαιρα, η πίεση στο σημείο 1 είναι ίση με την τοπική βαρομετρική πίεση:

$$p_1 = p_b \qquad (1)$$

Καθώς κινούμαστε τώρα από το σημείο 1 στο σημείο 2, η πίεση αυξάνεται κατά $\gamma_1 h_1$, δηλαδή:

$$p_2 = p_1 + \gamma_1 h_1 \qquad (2)$$

Επειδή τα σημεία 2 και 3 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του νερού, η πίεση στο σημείο 3 είναι ίση με την πίεση στο σημείο 2:

$$p_3 = p_2 \qquad (3)$$

Υπενθυμίζεται ότι η εξίσωση (3) ισχύει μόνο όταν μεταξύ των δύο σημείων (2 και 3) υπάρχει το *ίδιο ρευστό* σε στατική ισορροπία. Κατά την κίνηση από το σημείο 3 στο σημείο 4, η πίεση μειώνεται κατά το άθροισμα $\gamma_1 h_2$ και $\gamma_2 h_4$, δηλαδή:

$$p_4 = p_3 - \gamma_1 h_2 - \gamma_2 h_4 \qquad (4)$$

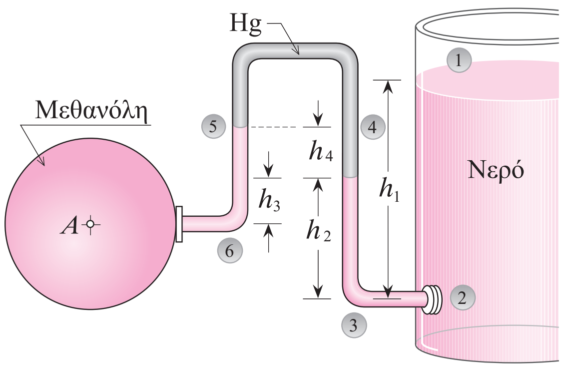
Επειδή τα σημεία 4 και 5 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός του υδραργύρου, η πίεση στο σημείο 5 είναι ίση με εκείνη στο σημείο 4:

$$p_5 = p_4 \tag{5}$$

Καθώς προχωρούμε τώρα από το σημείο 5 στο σημείο 6, η πίεση της μεθανόλης αυξάνεται κατά $\gamma_3(h_3 + h_4)$, δηλαδή:

$$p_6 = p_5 + \gamma_3(h_3 + h_4) \tag{6}$$

Τέλος, επειδή τα σημεία 6 και A βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο εντός της μεθανόλης, οι πιέσεις στα σημεία A και 6 είναι ίσες:



Σχήμα A-07

$$p_A = p_6 \tag{7}$$

Στη συνέχεια προσθέτουμε κατά μέλη της εξισώσεις (1) έως και (7), οπότε λαμβάνεται η παρακάτω εξίσωση υπολογισμού της πίεσης p_A:

$$p_A = p_b + \gamma_1(h_1 - h_2) - \gamma_2 h_4 + \gamma_3(h_3 + h_4) \tag{8}$$

Γνωρίζοντας τώρα τις τιμές των p_b, γ και h (σε kPa, kN/m^3 και m, αντίστοιχα), μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική εφαρμογή της εξίσωσης (8):

$$p_A = [(100) + (9,79)(0,80) - (133,0)\,(0,25) + (7,76)\,(0,30)]\,\text{kPa} = 76,9\,\text{kPa} \tag{9}$$

Άρα, η στατική πίεση στο σημείο A της δεξαμενής μεθανόλης είναι περίπου 77 kPa.